

1. 두 원 $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + (y-3)^2 = 4$ 의 공통접선의 방정식이 $y = mx + n$ 일 때, $m^2 + n^2$ 의 값은? (단, $m \neq 0$)

① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

해설

원 $x^2 + y^2 = 1$ 의 중심 (0, 0)에서

직선 $y = mx + n$,

즉 $mx - y + n = 0$ 에 이르는 거리가 1이므로

$$\frac{|n|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 1$$

$$\therefore m^2 = n^2 - 1 \dots \textcircled{A}$$

원 $x^2 + (y-3)^2 = 4$ 의 중심 (0, 3)에서

직선 $mx - y + n = 0$ 에 이르는 거리가 2이므로

$$\frac{|-3 + n|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 2$$

$$\therefore n^2 - 6n + 9 = 4m^2 + 4 \dots \textcircled{B}$$

① 을 ② 에 대입하면,

$$n^2 - 6n + 9 = 4(n^2 - 1) + 4, 3n^2 + 6n - 9 = 0$$

$$n^2 + 2n - 3 = 0, (n+3)(n-1) = 0$$

$$\therefore n = -3 \text{ 또는 } n = 1$$

이 때, $n = 1$ 이면 $m = 0$ 이 되므로 $n = -3$

$n = -3$ 을 ① 에 대입하면 $m^2 = 8$

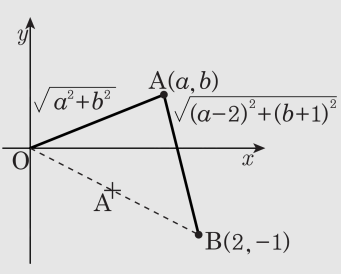
$$\therefore m^2 + n^2 = 8 + 9 = 17$$

2. 좌표평면 위에 점 $O(0, 0)$, $A(a, b)$, $B(2, -1)$ 이 있다. 이때, $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{(a-2)^2 + (b+1)^2}$ 의 최솟값을 구하면?

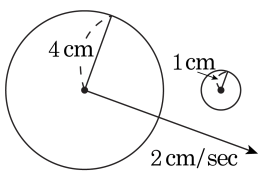
- ① 1 ② 2 ③ $\sqrt{5}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

해설

$\sqrt{a^2 + b^2}$ 은 $\overline{OA}$ 의 길이이고,
 $\sqrt{(a-2)^2 + (b+1)^2}$ 은 $\overline{AB}$ 의 길이이다.
 따라서, 준 식은 O, A, B 가 일
 직선상에 있을 때
 최소가 된다. (그림 참조)
 따라서, $\overline{OA} + \overline{AB}$ 의 최솟값은
 $\overline{OB} = \sqrt{5}$



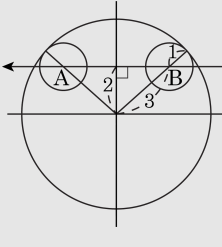
3. 반지름의 길이가 1cm 인 원에 반지름의 길이가 4cm 인 원이 초속 2cm 의 속도로 그림과 같이 직선 방향으로 진행한다고 한다. 두 원의 중심거리의 최단거리는 2cm 라 할 때, 반지름의 길이가 1cm 인 원 전체가 몇 초동안 반지름의 길이 4cm 인 원 안에 완전히 품기게 되는가?



- ① 1 초 ② $\sqrt{2}$ 초 ③ $\sqrt{3}$ 초
 ④ 2 초 ⑤ $\sqrt{5}$ 초

해설

작은 원이 큰 원 안에 포함되기 위해서는
 내접해야 하므로,
 $AB = 2 \times \sqrt{9 - 4} = 2\sqrt{5}$ 이고,
 2cm/s로 움직이므로,
 $\frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$ (초) 가 된다.



4. 원 $x^2 + y^2 = a^2$ 밖의 한 점 $P(\alpha, \beta)$ 로부터 이 원에 두 접선을 그었을 때, 두 접점을 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

- ① $\alpha x + \beta y = a^2$ ② $\alpha x + \beta y = 1$ ③ $\beta x + \alpha y = a^2$
 ④ $\beta x + \alpha y = 1$ ⑤ $\beta x - \alpha y = a^2$

해설

점 $P(\alpha, \beta)$ 에서

원 $x^2 + y^2 = a^2 \dots \textcircled{1}$ 에 그은 접선의 접점을 T, T' 이라 하면,

$$\overline{PT} = \overline{PT'}$$

따라서 직선 TT' 은 주어진 원과 중심 P ,

반지름 $\overline{PT}$ 인 원과의 공통현이다.

$$\overline{PT}^2 = \overline{PO}^2 - \overline{TO}^2 = \alpha^2 + \beta^2 - a^2$$

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \overline{PT}^2$$

$$\therefore (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 - a^2 \dots \textcircled{2}$$

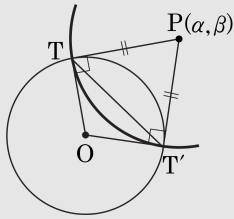
$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 을 하면,

$$x^2 + y^2 - (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2$$

$$= -\alpha^2 - \beta^2 + 2a^2$$

$$\therefore 2\alpha x + 2\beta y = 2a^2$$

$$\therefore \alpha x + \beta y = a^2$$



5. 두 원 $(x+1)^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 = 0$ 의 공통접선의 개수는?

① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$(x+1)^2 + y^2 = 1$ 에서 이 원의 중심을 C_1 이라

하면 점 C_1 의 좌표는 $(-1, 0)$ 이고

반지름의 길이는 1 이다.

$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 = 0$ 에서

$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 16$ 이므로

이 원의 중심을 C_2 이라 하면

점 C_2 의 좌표는 $(3, 3)$ 이고

반지름의 길이는 4 이다.

$\overline{C_1 C_2} = 5$ 이고

두 원의 반지름의 길이는 1, 4 이므로

두 원은 서로 외접하게 된다.

따라서 공통접선은 3 개이다.

6. 방정식 $x^2 + y^2 + 4x - 6y + k + 10 = 0$ 이 원을 나타내도록 하는 실수 k 의 값의 범위는?

① $k < 3$

② $k > 3$

③ $0 < k < 3$

④ $k > 2$

⑤ $k < 2$

해설

$x^2 + y^2 + 4x - 6y + k + 10 = 0$ 을 완전제곱식으로

나타내면 $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 3 - k$

원이 되려면 반지름이 0 보다 커야 하므로

$\sqrt{3 - k} > 0, 3 - k > 0 \quad \therefore k < 3$

7. 실수 x, y 가 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$ 을 만족할 때, $x^2 + y^2$ 의 최댓값을 a , 최솟값을 b 라 할 때, $a+b$ 를 구하면?

① $2\sqrt{7}$ ② $2\sqrt{13}$ ③ $2\sqrt{17}$ ④ 16 ⑤ 28

해설

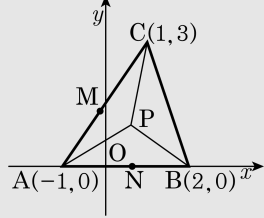
$x^2 + y^2 = k$ 인 원을 생각해보면,
두 원이 외접할 때 k 가 최소, 내접할 때 k 가 최대가 된다.
 $\Rightarrow$ 외접 : 중심사이의 거리 = 반지름의 합
 $\Rightarrow \sqrt{3^2 + 2^2} = 1 + \sqrt{k} \quad \therefore k = (\sqrt{13} - 1)^2$
 $\Rightarrow$ 내접 : 중심사이의 거리 = 반지름의 차
 $\Rightarrow \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{k} - 1 \quad \therefore k = (\sqrt{13} + 1)^2$
 $\therefore k$ 의 합은 $(\sqrt{13} - 1)^2 + (\sqrt{13} + 1)^2 = 28$

8. 좌표평면 위에 세 점 $A(-1, 0)$, $B(2, 0)$, $C(1, 3)$ 이 있다. $\triangle ABC$ 의 내부의 점 P 가 $\triangle BPC = \triangle APC + \triangle APB$ 인 관계를 만족시키면서 움직인다. 점 P 가 그리는 도형의 길이는?

- ① $\frac{\sqrt{10}}{2}$ ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $\sqrt{10}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

해설

점 P 가 $\triangle ABC$ 의 내부의 점이고
 $\triangle BPC = \triangle APC + \triangle APB$ 이므로



$$\therefore \triangle BPC = \frac{1}{2} \triangle ABC$$

점 P 는 $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ 의 중점 M , N 을 잇는 선분 위에 있다.

$$\text{그런데 } M\left(0, \frac{3}{2}\right), N\left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$\text{점 } P \text{의 자취 } \overline{MN} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

9. x, y 에 관한 이차방정식 $2x^2 - 3xy + ay^2 - 2x + 9y + b = 0$ 이 직교하는 두 직선의 곱을 나타낼 때, ab 를 구하면?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

준식이 나타내는 두 직선을
 $px + qy + r = 0 \cdots \textcircled{1}$,
 $p'x + q'y + r' = 0 \cdots \textcircled{2}$ 이라 하자.
 $\textcircled{1}$ 과 $\textcircled{2}$ 은 서로 직교하므로
 $pp' + qq' = 0$ 이다.
(준식) $= (px + qy + r)(p'x + q'y + r') = 0$ 의
전개식에서 x^2 의 계수와 y^2 의 계수의 합은
 $pp' + qq' = 0$ 이므로 $a + 2 = pp' + qq' = 0$
 $\therefore a = -2$
 $a = -2$ 를 준식에 대입하여 정리하면
(준식)
 $= 2x^2 - (3y + 2)x + (-2y^2 + 9y + b) = 0 \cdots \textcircled{3}$
 $\textcircled{3}$ 이 두 직선의 곱을 나타내므로
 $\textcircled{3}$ 의 판별식 $D_1 = (3y + 2)^2 - 8(-2y^2 + 9y + b)$
 $= 25y^2 - 60y + (4 - 8b) \cdots \textcircled{4}$ 이 완전제곱식이다.
따라서 $\textcircled{4}$ 의 판별식 $\frac{D_2}{4}$ 는 0이다.
 $\frac{D_2}{4} = 30^2 - 25(4 - 8b) = 0$
 $\therefore b = -4$
 $\therefore ab = (-2) \cdot (-4) = 8$

10. 직선 $y = mx + n (m \neq 0)$ 은 직선 $ax + by + c = 0$ 에 평행하고, 직선 $px + qy + r = 0$ 에 수직이다. 다음 중 옳은 것을 모두 구하면?

$\neg$

$a + bm = 0$

$\angle$

$p + qm = 0$

$\ominus$

$ap + bq = 0$

- ①

$\neg$

②

$\angle$

③

$\angle, \ominus$
- ④

$\neg, \ominus$

⑤

$\neg, \angle, \ominus$

해설

$y = mx + n \cdots ①$

$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \cdots ②$

$y = -\frac{p}{q}x - \frac{r}{q} \cdots ③$

I) ① // ② : $m = -\frac{a}{b}$

$\therefore a + bm = 0$

II) ① $\perp$ ③ : $m \left(-\frac{p}{q} \right) = -1$

$\therefore mp - q = 0$

11. 세 직선 $l: y = -\frac{1}{2}x + 4$, $m: x + 2y - 2 = 0$, $n: 2x - y + 4 = 0$ 에 대한 다음 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ 두 직선 l 과 m 은 평행하다.
- ㉡ 두 직선 m 과 n 은 수직이다.
- ㉢ 두 직선 l 과 n 은 수직이다.

- ① ㉠
- ② ㉢
- ③ ㉠, ㉡
- ④ ㉡, ㉢
- ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$l: y = -\frac{1}{2}x + 4$
 $m: x + 2y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 1$
 $n: 2x - y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = 2x + 4$
㉠ 두 직선 l 과 m 은 기울기는 같고
y 절편은 다르므로 평행하다. (참)
㉡ 두 직선 m 과 n 의 기울기의 곱은
 $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 = -1$ 이므로 수직이다. (참)
㉢ 두 직선 l 과 n 의 기울기의 곱은
 $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 = -1$ 이므로 수직이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡, ㉢이다.