1. $(0,0)$, $(0,4)$, $(4,4)$와 $(4,0)$을 꼭짓점으로 하는 정사각형을 생각하자. $(0,\ 1)$에서 출발하여 윗변과 밑변으로 반사시켜 $(4,2)$에 도달하는 꺾인 직선을 그리려면 윗변의 어느 점을 지나야 하는가? (단, 입사각과 반사각은 같다)

① $(1,\ 4)$　② $\left(\frac{10}{7},\ 4\right)$　③ $\left(\frac{5}{3},\ 4\right)$

④ $\left(\frac{4}{3},\ 4\right)$　⑤ $\left(\frac{3}{2},\ 4\right)$

해설

대칭성을 이용하여 $(0,1)$과 $(4,10)$을 연결하는 직선과 $y=4$와의 교점을 계산하면 된다.

$$\begin{cases} y = \frac{9}{4}x + 1 \\ y = 4 \end{cases} \quad \therefore\ x = \frac{4}{3}$$

따라서, $\left(\frac{4}{3}, 4\right)$를 지난다.

2. 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC에서 변 BC 위에 한 점 P 가 있다. $\overline{AP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 최솟값은?

① $\frac{6}{5}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

해설

$\overline{BC}$를 x 축, $\overline{BC}$의 수직이등분선을 y축으로 잡고
$A(0, \sqrt{3})$, $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$ 이라고 하자.
점 P는 $\overline{BC}$ 위의 점이므로
좌표를 $P(x, 0)$ 이라고 하면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2 + \overline{CP}^2 &= (x^2 + 3) + (x - 1)^2 \\ &= 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{2}\end{aligned}$$

따라서 $x = \frac{1}{2}$ 일 때, $\overline{AP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 최솟값은 $\frac{7}{2}$ 이다.

3. 「$m,\ n$ 을 서로소인 자연수라 할 때, 좌표평면위의 두 점 $\mathrm{P}(m,\ 0)$, $\mathrm{Q}(0,\ n)$ 을 잇는 선분 PQ 위에는 x 좌표, y 좌표가 모두 자연수인 점이 존재하지 않는다.」를 다음과 같이 증명하였다.

<증명>

두 점 P, Q 를 지나는 직선의 방정식은
$\boxed{(가)}$ 이다. 따라서 $nx+my=mn\ (0<x<m,\ 0<y<n)$ 을 만족하는 자연수 $x,\ y$ 가 존재한다고 가정하면 $my=n(m-x)$
좌변이 m 의 배수이므로 우변도 m 의 배수이고,
$m,\ n$ 이 서로소이므로
$\boxed{(나)}$ 는 m 의 배수가 된다.
이것은 $0<m-x<\boxed{(다)}$ 에 모순이다.

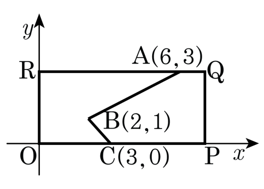
위의 증명에서 (가), (나), (다) 에 알맞은 것은?

① $nx+my=1,\ \ m-x,\ \ m$
② $nx+my=1,\ \ m+x,\ \ 2m$
③ $\dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}=1,\ \ m-x,\ \ m$
④ $\dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}=1,\ \ m+x,\ \ 2m$
⑤ $nx+my=1,\ \ m+x,\ \ n$

해설

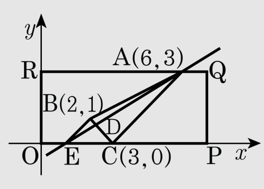
두 점 P, Q 를 지나는 직선의 x 절편, y 절편이
각각 $m,\ n$ 이므로
$\dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}=1 \Leftrightarrow nx+my=mn$ ······ ㉠
㉠을 만족하는 자연수 $x,\ y$ 가
존재한다고 가정하면
$my=n(m-x)$ 에서 $m,\ n$ 이 서로소이므로
$m-x$ 는 m 의 배수가 된다.
이것은 $0<m-x<m$ 에 모순이다.

4. $\overline{AB}$와 $\overline{BC}$는 직사각형 OPQR을 두 부분으로 나누는 경계선이다. 이 경계선을 두 부분의 넓이의 변화 없이 점 A를 지나는 직선으로 바꿀 때, 이 직선의 기울기는?



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

해설



$\overline{AC}$와 평행한 보조선 $\overline{BE}$를 긋는다.

$\overline{AC} // \overline{BE}$이므로 $\triangle ABC = \triangle AEC$,

$\triangle ABD = \triangle CDE$

따라서 $\overline{AE}$가 직선 경계임을 알 수 있다.

(직선 AC의 기울기)= (직선 BE의 기울기)= 1

점 B(2, 1)을 지나고 기울기 1인 직선의 방정식은

$y = x - 1$이고 E(1, 0)임을 알 수 있다.

$\therefore$ (직선 AE 의 기울기)= $\frac{3}{5}$

5. 직선 $y = mx + n(m \neq 0)$ 은 직선 $ax + by + c = 0$ 에 평행하고, 직선 $px + qy + r = 0$ 에 수직이다. 다음 중 옳은 것을 모두 구하면?

㉠ $a + bm = 0$	㉡ $p + qm = 0$	㉢ $ap + bq = 0$

① ㉠　　② ㉡　　③ ㉡, ㉢
④ ㉠, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$y = mx + n \cdots$ ①

$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \cdots$ ②

$y = -\frac{p}{q}x - \frac{r}{q} \cdots$ ③

Ⅰ) ① // ② : $m = -\frac{a}{b}$

$\therefore a + bm = 0$

Ⅱ) ①⊥③ : $m\left(-\frac{p}{q}\right) = -1$

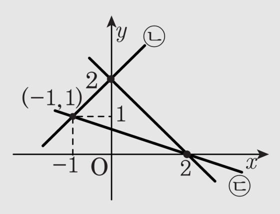
$\therefore mp - q = 0$

6. 두 직선 $mx-y+m+1=0$ 과 $y=-x+2$ 가 제1사분면에서 만나도록 하는 상수 m 의 값의 범위는?

① $\frac{1}{3}<m<1$
② $-\frac{1}{3}<m<1$
③ $-1<m<2$
④ $m<-\frac{1}{3},\ m>1$
⑤ $-1<m<-\frac{1}{3}$

해설

$mx-y+m+1=0 \cdots$ ㉠
$\Leftrightarrow m(x+1)-(y-1)=0$ 에서
이 직선은 m 의 값에 관계없이
항상 점 $(-1,1)$ 을 지난다.
다음 그림에서 ㉠이 직선 $y=-x+2$ 와
제1사분면에서 나려면 ㉠의 기울기 m 은



㉡의 기울기 $\frac{2-1}{0-(-1)}=1$ 보다 작고
㉢의 기울기 $\frac{0-1}{2-(-1)}=-\frac{1}{3}$ 보다 커야한다.
$\therefore\ -\frac{1}{3}<m<1$

7. 좌표평면 위의 원점에서 직선$3x-y+2-k(x+y)=0$ 까지의 거리의 최대값은?(단, k 는 실수)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\sqrt{2}$

해설

원점 O 에서 직선 $(3-k)x-(1+k)y+2=0$ 까지의 거리는

$$\frac{|2|}{\sqrt{(3-k)^2+(1+k)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2k^2-4k+10}}$$

거리가 최대가 되려면 분모가 최소일 때이다.

$2k^2-4k+10=2(k-1)^2+8\geq 8$ 이므로

$$\frac{2}{\sqrt{2k^2-4k+10}}\leq\frac{2}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\therefore$ 최대값 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

8. 직선 $y=\frac{4}{3}x$ 와 x 축이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식을 구할 때 기울기는? (단, 기울기는 양수이다.)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

해설

각의 이등분선은 각의 두 변에서 같은 거리에 있는 점들이다. 각의 이등분선 위의 임의의 점 $P\,(x,\ y)$ 에서 각의 두 변인 x 축과 직선 $y=\frac{4}{3}x$ 에 이르는 거리는 같다. $|y|=\frac{|4x-3y|}{\sqrt{3^2+4^2}}$, $y=\pm\frac{4x-3y}{5}$

기울기가 양수이므로 $y=\frac{1}{2}x$, 기울기는 $\frac{1}{2}$

9. 점 A(6, 2)와 직선 $x+2y-2=0$ 위를 움직이는 점 P가 있다. $\overline{AP}$를 1 : 3으로 내분하는 점의 자취는?

① $x-2y-8=0$ ② $x+2y-8=0$ ③ $x-2y+8=0$
④ $x+2y+8=0$ ⑤ $x-2y=0$

해설

P $(a,\ b)$라 하면 $a+2b-2=0\ \cdots$ ㉠
$\overline{AP}$의 1 : 3 내분점을 Q $(x,\ y)$라 하면
$\mathrm{Q}(x,\ y)=\left(\dfrac{a+18}{1+3},\dfrac{b+6}{1+3}\right)$
$x=\dfrac{a+18}{1+3}$, $y=\dfrac{b+6}{1+3}$
$a=4x-18$, $b=4y-6$
㉠에 대입하면,
$4x-18+2(4y-6)-2=0 \Rightarrow x+2y-8=0$

10. 세 점$(-3,\ 1)$, $(5,\ 5)$, $(-2, 2)$ 를 꼭지점으로 하는 삼각형의 외접원의 중심(외심)의 좌표를 구하면?

① $(3,\ -1)$　　② $(2,\ 1)$　　③ $(4,\ 2)$

④ $(-3,\ -2)$　　⑤ $(3,\ -2)$

해설

외접원의 방정식을

$x^2+y^2+\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}=0 \cdots$ ㉠ 이라 하면,

㉠은 $(-3,\ 1)$, $(5,\ 5)$, $(-2,\ -2)$를 지나므로

$$\begin{cases} 10-3\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}=0 \\ 50+5\mathrm{A}+5\mathrm{B}+\mathrm{C}=0 \\ 8-2\mathrm{A}-2\mathrm{B}+\mathrm{C}=0 \end{cases}$$

세 식을 연립하여 풀면

$\mathrm{A}=-4,\ \mathrm{B}=-2,\ \mathrm{C}=-20$

따라서, 구하는 원은 $x^2+y^2-4x-2y-20=0$

즉, $(x-2)^2+(y-1)^2=25$ 이고 중심은 $(2,\ 1)$

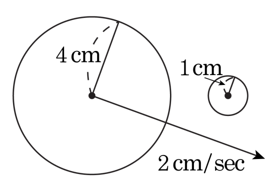
11. 두 정점 A$(-3,\ 0)$, B$(3,\ 0)$ 과 원 $x^2+y^2-8y-9=0$ 이 있다. 이 원 위에 있는 한 점 P$(a,\ b)$ 를 잡아 $\triangle$PAB 를 만들 때, $\triangle$PAB 의 무게중심의 자취는 원이다. 이 자취의 길이를 구하면?

① $\frac{5}{3}\pi$　② $\frac{5}{2}\pi$　③ $\frac{4}{3}\pi$　④ $\frac{10}{3}\pi$　⑤ $\frac{9}{4}\pi$

해설

점 P$(a,\ b)$ 는 원 $x^2+y^2-8y-9=0$ 위에 있으므로
$a^2+b^2-8b-9=0\cdots$ ㉠
$\triangle$PAB 의 무게중심의 좌표를 $(x,\ y)$ 라고 하면,
$x=\frac{a}{3},\ y=\frac{b}{3}$
$\therefore\ a=3x,\ b=3y$
이것을 ㉠에 대입하면,
$(3x)^2+(3y)^2-8(3y)-9=0$
$\therefore\ x^2+y^2-\frac{8}{3}y=1$
$x^2+\left(y-\frac{4}{3}\right)^2=\left(\frac{5}{3}\right)^2$
$\therefore\ r=\frac{5}{3}$
$\therefore\ l=2\pi r=2\times\frac{5}{3}\pi=\frac{10}{3}\pi$

12. 반지름의 길이가 1 cm 인 원에 반지름의 길이가 4 cm 인 원이 초속 2 cm 의 속도로 그림과 같이 직선 방향으로 진행한다고 한다. 두 원의 중심거리의 최단거리는 2 cm 라 할 때, 반지름의 길이가 1 cm 인 원 전체가 몇 초동안 반지름의 길이 4 cm 인 원 안에 완전히 품기게 되는가?



① 1 초　　② $\sqrt{2}$ 초　　③ $\sqrt{3}$ 초

④ 2 초　　⑤ $\sqrt{5}$ 초

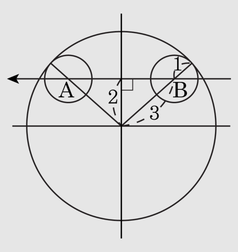
해설

작은 원이 큰 원 안에 포함되기 위해서는 내접해야 하므로,

$\overline{AB} = 2 \times \sqrt{9-4} = 2\sqrt{5}$ 이고,

2 cm/s로 움직이므로,

$\dfrac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$(초) 가 된다.



13. 원 $x^2+y^2=a^2$ 밖의 한 정점 $\mathrm{P}(\alpha, \beta)$ 로부터 이 원에 두 접선을 그었을 때, 두 접점을 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

① $\alpha x+\beta y=a^2$ ② $\alpha x+\beta y=1$ ③ $\beta x+\alpha y=a^2$

④ $\beta x+\alpha y=1$ ⑤ $\beta x-\alpha y=a^2$

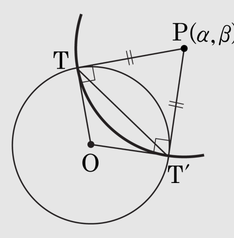
해설

점 $\mathrm{P}(\alpha, \beta)$ 에서

원 $x^2+y^2=a^2 \cdots$ ㉠ 에 그은 접선의 접점을 T, T′ 이라 하면,

$\overline{\mathrm{PT}}=\overline{\mathrm{PT'}}$

따라서 직선 TT′ 은 주어진 원과 중심 P, 반지름 $\overline{\mathrm{PT}}$ 인 원과의 공통현 이다.



$\overline{\mathrm{PT}}^2=\overline{\mathrm{PO}}^2-\overline{\mathrm{TO}}^2=\alpha^2+\beta^2-a^2$

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\overline{\mathrm{PT}}^2$

$\therefore\ (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2-a^2 \cdots$ ㉡

㉠ − ㉡을 하면,

$x^2+y^2-(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2$

$=-\alpha^2-\beta^2+2a^2$

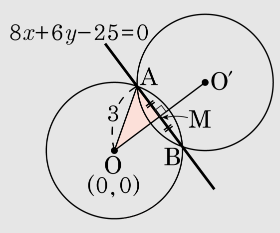
$\therefore\ 2\alpha x+2\beta y=2a^2$

$\therefore\ \alpha x+\beta y=a^2$

14. 두 원 $x^2+y^2=9, x^2+y^2-8x-6y+16=0$ 의 두 교점 사이의 거리를 구하면?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{10}$ ④ $\sqrt{11}$ ⑤ $\sqrt{13}$

해설



두 원의 교점을 이은 선분이 공통현이다.
두 원의 공통현의 방정식은
$\left(x^2+y^2-9\right)-\left(x^2+y^2-8x-6y+16\right)=0$
$\therefore 8x+6y-25=0$
이때, 다음 그림과 같이 이 두 원의 교점을 A, B라 하고 공통현 AB의 중점을 M이라고 하면
$\overline{OO'}$ 은 $\overline{AB}$ 를 수직이등분하므로 $\overline{AB}=2\overline{AM}=2\sqrt{3^2-\overline{OM}^2}\cdots\cdots$ ㉠
그런데 $\overline{OM}$ 은 원점 O에서 직선 $8x+6y-25=0$ 까지의 거리이므로
$\overline{OM}=\dfrac{|-25|}{\sqrt{8^2+6^2}}=\dfrac{5}{2}\cdots\cdots$ ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면 구하는 두 교점 사이의 거리는
$\overline{AB}=2\overline{AM}=2\sqrt{3^2-\left(\dfrac{5}{2}\right)^2}=2\cdot\dfrac{\sqrt{11}}{2}=\sqrt{11}$

15. 두 원 $(x+1)^2+y^2=1$, $x^2+y^2-6x-6y+2=0$ 의 공통접선의 개수는?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$(x+1)^2+y^2=1$ 에서 이 원의 중심을 C_1 이라
하면 점 C_1 의 좌표는 $(-1,\ 0)$ 이고
반지름의 길이는 1 이다.
$x^2+y^2-6x-6y+2=0$ 에서
$(x-3)^2+(y-3)^2=16$ 이므로
이 원의 중심을 C_2 이라 하면
점 C_2 의 좌표는 $(3,\ 3)$ 이고
반지름의 길이는 4 이다.
$\overline{\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2}=5$ 이고
두 원의 반지름의 길이는 1, 4 이므로
두 원은 서로 외접하게 된다.
따라서 공통접선은 3 개이다.

16. 직선 $y = mx + 3$ 이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 와 서로 만나지 않을 때, m 값의 범위를 구하면?

① $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$　　② $-2\sqrt{2} \le m \le 2\sqrt{2}$

③ $-2\sqrt{3} < m < 2\sqrt{3}$　　④ $m \le -2\sqrt{2},\ m \ge 2\sqrt{2}$

⑤ $m < -3\sqrt{2},\ m > 3\sqrt{2}$

해설

원과 직선이 서로 만나지 않으려면 원의 중심부터 직선까지 거리가 반지름보다 커야 한다.

$$\therefore \quad \frac{|m \times 0 + (-1) \times 0 + 3|}{\sqrt{m^2 + 1}} > 1$$

$$\Rightarrow \quad m^2 + 1 < 9$$

$$\Rightarrow \quad -2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$$

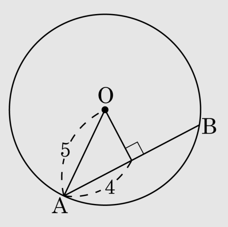
17. $y = x + k$ 가 원 $x^2 + y^2 + 6y - 16 = 0$ 에 의해서 잘린 현의 길이가 8 일 때, 상수 k 값의 합은 ?

① 6　　② 9　　③ −6　　④ −9　　⑤ 4

해설

$$\begin{cases} y = x + k \ \cdots ㉠ \\ x^2 + (y+3)^2 = 25 \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠, ㉡의 교점을 A, B 라 하면
$\overline{AB} = 8, \ \overline{OA} = 5$ 이므로
점 O 에서 ㉠에 이르는 거리는 3 이다.



$\dfrac{|3+k|}{\sqrt{1+1}} = 3, \quad k^2 + 6k - 9 = 0$

k 값의 합 $\Rightarrow \ -6$