

1. $(0,0)$, $(0,4)$, $(4,4)$ 와 $(4,0)$ 을 꼭짓점으로 하는 정사각형을 생각하자. $(0,1)$ 에서 출발하여 윗변과 밑변으로 반사시켜 $(4,2)$ 에 도달하는 꺾인 직선을 그리려면 윗변의 어느 점을 지나야 하는가? (단, 입사각과 반사각은 같다)

① $(1, 4)$

② $\left(\frac{10}{7}, 4\right)$

③ $\left(\frac{5}{3}, 4\right)$

④ $\left(\frac{4}{3}, 4\right)$

⑤ $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$

해설

대칭성을 이용하여 $(0,1)$ 과 $(4,10)$ 을 연결하는 직선과 $y=4$ 와의 교점을 계산하면 된다.

$$\begin{cases} y = \frac{9}{4}x + 1 \\ y = 4 \end{cases} \quad \therefore x = \frac{4}{3}$$

따라서, $\left(\frac{4}{3}, 4\right)$ 를 지난다.

2. 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC에서 변 BC 위에 한 점 P가 있다.
 $\overline{AP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 최솟값은?

① $\frac{6}{5}$

② $\frac{5}{4}$

③ $\frac{4}{3}$

④ $\frac{7}{2}$

⑤ $\frac{7}{4}$

해설

$\overline{BC}$ 를 x 축, $\overline{BC}$ 의 수직이등분선을 y 축으로 잡고
 $A(0, \sqrt{3})$, $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$ 이라고 하자.

점 P는 $\overline{BC}$ 위의 점이므로
좌표를 $P(x, 0)$ 이라고 하면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2 + \overline{CP}^2 &= (x^2 + 3) + (x - 1)^2 \\ &= 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{2}\end{aligned}$$

따라서 $x = \frac{1}{2}$ 일 때, $\overline{AP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 최솟값은 $\frac{7}{2}$ 이다.

3. 「 m, n 을 서로소인 자연수라 할 때, 좌표평면위의 두 점 $P(m, 0)$, $Q(0, n)$ 을 잇는 선분 PQ 위에는 x 좌표, y 좌표가 모두 자연수인 점이 존재하지 않는다.」를 다음과 같이 증명하였다.

<증명>

두 점 P, Q 를 지나는 직선의 방정식은

(가) 이다. 따라서 $nx + my = mn$ ($0 < x < m, 0 < y < n$) 을 만족하는 자연수 x, y 가 존재한다고 가정하면 $my = n(m - x)$ 좌변이 m 의 배수이므로 우변도 m 의 배수이고,

m, n 이 서로소이므로

(나) 는 m 의 배수가 된다.

이것은 $0 < m - x < (다)$ 에 모순이다.

위

의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

- ① $nx + my = 1, m - x, m$ ② $nx + my = 1, m + x, 2m$
 ③ $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1, m - x, m$ ④ $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1, m + x, 2m$
 ⑤ $nx + my = 1, m + x, n$

해설

두 점 P, Q 를 지나는 직선의 x 절편, y 절편이 각각 m, n 이므로

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1 \Leftrightarrow nx + my = mn \dots\dots ㉠$$

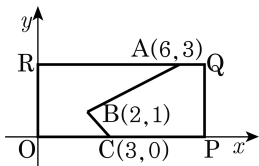
㉠을 만족하는 자연수 x, y 가 존재한다고 가정하면

$my = n(m - x)$ 에서 m, n 이 서로소이므로

$m - x$ 는 m 의 배수가 된다.

이것은 $0 < m - x < m$ 에 모순이다.

4. $\overline{AB}$ 와 $\overline{BC}$ 는 직사각형 OPQR을 두 부분으로 나누는 경계선이다. 이 경계선을 두 부분의 넓이의 변화 없이 점 A를 지나는 직선으로 바꿀 때, 이 직선의 기울기는?



① $\frac{1}{3}$

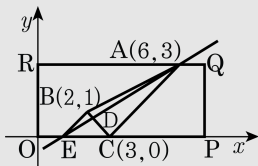
② $\frac{1}{2}$

③ $\frac{3}{5}$

④ $\frac{3}{4}$

⑤ $\frac{5}{6}$

해설



$\overline{AC}$ 와 평행한 보조선 $\overline{BE}$ 를 긋는다.

$\overline{AC} \parallel \overline{BE}$ 이므로 $\triangle ABC = \triangle AEC$,

$\triangle ABD = \triangle CDE$

따라서 $\overline{AE}$ 가 직선 경계임을 알 수 있다.

(직선 AC의 기울기) = (직선 BE의 기울기) = 1

점 B(2, 1)을 지나고 기울기 1인 직선의 방정식은 $y = x - 1$ 이고 E(1, 0)임을 알 수 있다.

$\therefore$ (직선 AE의 기울기) = $\frac{3}{5}$

5. 직선 $y = mx + n (m \neq 0)$ 은 직선 $ax + by + c = 0$ 에 평행하고, 직선 $px + qy + r = 0$ 에 수직이다. 다음 중 옳은 것을 모두 구하면?

㉠ $a + bm = 0$

㉡ $p + qm = 0$

㉢ $ap + bq = 0$

㉠ ㉠

㉡ ㉡

㉢ ㉡, ㉢

㉣ ㉠, ㉢

㉤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$$y = mx + n \cdots \textcircled{1}$$

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \cdots \textcircled{2}$$

$$y = -\frac{p}{q}x - \frac{r}{q} \cdots \textcircled{3}$$

$$\text{I) } \textcircled{1} // \textcircled{2} : m = -\frac{a}{b}$$

$$\therefore a + bm = 0$$

$$\text{II) } \textcircled{1} \perp \textcircled{3} : m \left(-\frac{p}{q} \right) = -1$$

$$\therefore mp - q = 0$$

6. 두 직선 $mx - y + m + 1 = 0$ 과 $y = -x + 2$ 가 제1사분면에서 만나도록 하는 상수 m 의 값의 범위는?

① $\frac{1}{3} < m < 1$

② $-\frac{1}{3} < m < 1$

③ $-1 < m < 2$

④ $m < -\frac{1}{3}, m > 1$

⑤ $-1 < m < -\frac{1}{3}$

해설

$$mx - y + m + 1 = 0 \cdots \textcircled{A}$$

$$\Leftrightarrow m(x+1) - (y-1) = 0 \text{ 에서}$$

이 직선은 m 의 값에 관계없이

항상 점 $(-1, 1)$ 을 지난다.

다음 그림에서 $\textcircled{A}$ 이 직선 $y = -x + 2$

와

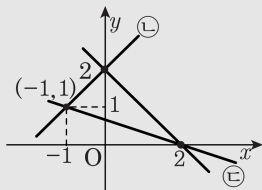
제1사분면에서 내려면 $\textcircled{A}$ 의 기울기 m

은

$\textcircled{B}$ 의 기울기 $\frac{2-1}{0-(-1)} = 1$ 보다 작고

$\textcircled{C}$ 의 기울기 $\frac{0-1}{2-(-1)} = -\frac{1}{3}$ 보다 커야한다.

$$\therefore -\frac{1}{3} < m < 1$$



7. 좌표평면 위의 원점에서 직선 $3x - y + 2 - k(x + y) = 0$ 까지의 거리의 최대값은?(단, k 는 실수)

① $\frac{1}{4}$

② $\frac{\sqrt{2}}{4}$

③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

⑤ $\sqrt{2}$

해설

원점 O 에서 직선 $(3 - k)x - (1 + k)y + 2 = 0$ 까지의 거리는

$$\frac{|2|}{\sqrt{(3-k)^2 + (1+k)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2k^2 - 4k + 10}}$$

거리가 최대가 되려면 분모가 최소일 때이다.

$$2k^2 - 4k + 10 = 2(k - 1)^2 + 8 \geq 8 \text{ 이므로}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2k^2 - 4k + 10}} \leq \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \text{최대값 } \frac{\sqrt{2}}{2}$$

8. 직선 $y = \frac{4}{3}x$ 와 x 축이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식을 구할 때 기울기는? (단, 기울기는 양수이다.)

① $\frac{1}{4}$

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{2}{3}$

⑤ $\frac{3}{4}$

해설

각의 이등분선은 각의 두 변에서 같은 거리에 있는 점들이다. 각의 이등분선 위의 임의의 점 $P(x, y)$ 에서 각의 두 변인 x 축과 직선

$$y = \frac{4}{3}x \text{ 에 이르는 거리는 같다. } |y| = \frac{|4x - 3y|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}, y = \pm \frac{4x - 3y}{5}$$

기울기가 양수이므로 $y = \frac{1}{2}x$, 기울기는 $\frac{1}{2}$

9. 점 A(6, 2)와 직선 $x + 2y - 2 = 0$ 위를 움직이는 점 P가 있다. $\overline{AP}$ 를 1 : 3으로 내분하는 점의 자취는?

① $x - 2y - 8 = 0$

② $x + 2y - 8 = 0$

③ $x - 2y + 8 = 0$

④ $x + 2y + 8 = 0$

⑤ $x - 2y = 0$

해설

P (a, b)라 하면 $a + 2b - 2 = 0 \cdots \textcircled{7}$

$\overline{AP}$ 의 1 : 3 내분점을 Q (x, y)라 하면

$$Q(x, y) = \left(\frac{a + 18}{1 + 3}, \frac{b + 6}{1 + 3} \right)$$

$$x = \frac{a + 18}{1 + 3}, y = \frac{b + 6}{1 + 3}$$

$$a = 4x - 18, b = 4y - 6$$

⑦에 대입하면,

$$4x - 18 + 2(4y - 6) - 2 = 0 \Rightarrow x + 2y - 8 = 0$$

10. 세 점 $(-3, 1)$, $(5, 5)$, $(-2, 2)$ 를 꼭지점으로 하는 삼각형의 외접원의 중심(외심)의 좌표를 구하면?

① $(3, -1)$

② $(2, 1)$

③ $(4, 2)$

④ $(-3, -2)$

⑤ $(3, -2)$

해설

외접원의 방정식을

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \cdots \textcircled{1} \text{ 이라 하면,}$$

①은 $(-3, 1)$, $(5, 5)$, $(-2, -2)$ 를 지나므로

$$\begin{cases} 10 - 3A + B + C = 0 \\ 50 + 5A + 5B + C = 0 \\ 8 - 2A - 2B + C = 0 \end{cases}$$

세 식을 연립하여 풀면

$$A = -4, B = -2, C = -20$$

따라서, 구하는 원은 $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$

즉, $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$ 이고 중심은 $(2, 1)$

11. 두 정점 $A(-3, 0)$, $B(3, 0)$ 과 원 $x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0$ 이 있다. 이 원 위에 있는 한 점 $P(a, b)$ 를 잡아 $\triangle PAB$ 를 만들 때, $\triangle PAB$ 의 무게중심의 자취는 원이다. 이 자취의 길이를 구하면?

① $\frac{5}{3}\pi$

② $\frac{5}{2}\pi$

③ $\frac{4}{3}\pi$

④ $\frac{10}{3}\pi$

⑤ $\frac{9}{4}\pi$

해설

점 $P(a, b)$ 는 원 $x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0$ 위에 있으므로
 $a^2 + b^2 - 8b - 9 = 0 \cdots \textcircled{1}$

$\triangle PAB$ 의 무게중심의 좌표를 (x, y) 라고 하면,

$$x = \frac{a}{3}, y = \frac{b}{3}$$

$$\therefore a = 3x, b = 3y$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면,

$$(3x)^2 + (3y)^2 - 8(3y) - 9 = 0$$

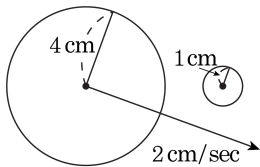
$$\therefore x^2 + y^2 - \frac{8}{3}y = 1$$

$$x^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2$$

$$\therefore r = \frac{5}{3}$$

$$\therefore l = 2\pi r = 2 \times \frac{5}{3}\pi = \frac{10}{3}\pi$$

12. 반지름의 길이가 1cm 인 원에 반지름의 길이가 4cm 인 원이 초속 2cm 의 속도로 그림과 같이 직선 방향으로 진행한다고 한다. 두 원의 중심거리의 최단거리는 2cm 라 할 때, 반지름의 길이가 1cm 인 원 전체가 몇 초동안 반지름의 길이 4cm 인 원 안에 완전히 품기게 되는가?



① 1 초

② $\sqrt{2}$ 초

③ $\sqrt{3}$ 초

④ 2 초

⑤ $\sqrt{5}$ 초

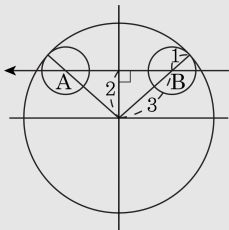
해설

작은 원이 큰 원 안에 포함되기 위해서는
내접해야 하므로,

$$\overline{AB} = 2 \times \sqrt{9 - 4} = 2\sqrt{5} \text{ 이고,}$$

2 cm/s로 움직이므로,

$$\frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}(\text{초}) \text{ 가 된다.}$$



13. 원 $x^2 + y^2 = a^2$ 밖의 한 점 $P(\alpha, \beta)$ 로부터 이 원에 두 접선을 그었을 때, 두 접점을 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

① $\alpha x + \beta y = a^2$

② $\alpha x + \beta y = 1$

③ $\beta x + \alpha y = a^2$

④ $\beta x + \alpha y = 1$

⑤ $\beta x - \alpha y = a^2$

해설

점 $P(\alpha, \beta)$ 에서

원 $x^2 + y^2 = a^2 \dots \textcircled{1}$ 에 그은 접선의 접점을 T, T' 이라 하면,

$$\overline{PT} = \overline{PT'}$$

따라서 직선 TT' 은 주어진 원과 중심 P ,

반지름 $\overline{PT}$ 인 원과의 공통현이다.

$$\overline{PT}^2 = \overline{PO}^2 - \overline{TO}^2 = \alpha^2 + \beta^2 - a^2$$

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \overline{PT}^2$$

$$\therefore (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 - a^2 \dots \textcircled{2}$$

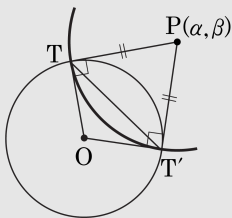
$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 을 하면,

$$x^2 + y^2 - (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2$$

$$= -\alpha^2 - \beta^2 + 2a^2$$

$$\therefore 2\alpha x + 2\beta y = 2a^2$$

$$\therefore \alpha x + \beta y = a^2$$



14. 두 원 $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$ 의 두 교점 사이의 거리를 구하면?

① $\sqrt{2}$

② $\sqrt{5}$

③ $\sqrt{10}$

④ $\sqrt{11}$

⑤ $\sqrt{13}$

해설

두 원의 교점을 이은 선분이 공통현이다.

두 원의 공통현의 방정식은

$$(x^2 + y^2 - 9)$$

$$(x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16) = 0$$

$$\therefore 8x + 6y - 25 = 0$$

이때, 다음 그림과 같이 이 두 원의 교점을 A, B라고 하고
공통현 AB의 중점을 M이라고 하면

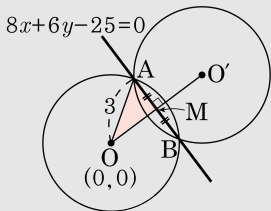
$$\overline{OO'} \text{은 } \overline{AB} \text{를 수직이등분하므로 } \overline{AB} = 2\overline{AM} = 2\sqrt{3^2 - \overline{OM}^2} \dots\dots \textcircled{7}$$

그런데 $\overline{OM}$ 은 원점 O에서 직선 $8x + 6y - 25 = 0$ 까지의 거리이므로

$$\overline{OM} = \frac{|-25|}{\sqrt{8^2 + 6^2}} = \frac{5}{2} \dots\dots \textcircled{8}$$

⑧을 ⑦에 대입하면 구하는 두 교점 사이의 거리는

$$\overline{AB} = 2\overline{AM} = 2\sqrt{3^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{11}}{2} = \sqrt{11}$$



15. 두 원 $(x+1)^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 = 0$ 의 공통접선의 개수는?

① 0개

② 1개

③ 2개

④ 3개

⑤ 4개

해설

$(x+1)^2 + y^2 = 1$ 에서 이 원의 중심을 C_1 이라
하면 점 C_1 의 좌표는 $(-1, 0)$ 이고
반지름의 길이는 1 이다.

$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 = 0$ 에서
 $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 16$ 이므로
이 원의 중심을 C_2 이라 하면
점 C_2 의 좌표는 $(3, 3)$ 이고
반지름의 길이는 4 이다.

$\overline{C_1 C_2} = 5$ 이고

두 원의 반지름의 길이는 1, 4 이므로
두 원은 서로 외접하게 된다.
따라서 공통접선은 3 개이다.

16. 직선 $y = mx + 3$ 이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 와 서로 만나지 않을 때, m 값의 범위를 구하면?

① $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$

② $-2\sqrt{2} \leq m \leq 2\sqrt{2}$

③ $-2\sqrt{3} < m < 2\sqrt{3}$

④ $m \leq -2\sqrt{2}, m \geq 2\sqrt{2}$

⑤ $m < -3\sqrt{2}, m > 3\sqrt{2}$

해설

원과 직선이 서로 만나지 않으려면 원의 중심부터 직선까지 거리가 반지름보다 커야 한다.

$$\therefore \frac{|m \times 0 + (-1) \times 0 + 3|}{\sqrt{m^2 + 1}} > 1$$

$$\Rightarrow m^2 + 1 < 9$$

$$\Rightarrow -2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$$

17. $y = x + k$ 가 원 $x^2 + y^2 + 6y - 16 = 0$ 에 의해서 잘린 현의 길이가 8 일 때, 상수 k 값의 합은 ?

① 6

② 9

③ -6

④ -9

⑤ 4

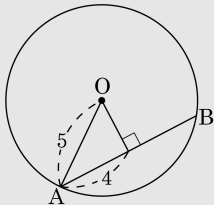
해설

$$\begin{cases} y = x + k \cdots \textcircled{1} \\ x^2 + (y + 3)^2 = 25 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 의 교점을 A, B 라 하면

$\overline{AB} = 8$, $\overline{OA} = 5$ 이므로

점 O 에서 $\textcircled{1}$ 에 이르는 거리는 3 이다.



$$\frac{|3 + k|}{\sqrt{1 + 1}} = 3, \quad k^2 + 6k - 9 = 0$$

k 값의 합 $\Rightarrow -6$