

1. A(-2, 3), B(4, 3)에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 P의 좌표를 구하면?

① (-2, 0)

② (-1, 0)

③ (0, 0)

④ (1, 0)

⑤ (2, 0)

해설

점 P를 $(\alpha, 0)$ 이라 하자.

$\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$$(\alpha + 2)^2 + (0 - 3)^2 = (\alpha - 4)^2 + (0 - 3)^2$$

$$\therefore \alpha = 1$$

$$\therefore P = (1, 0)$$

2. 두 점 A(1, 9), B(2, 3)과 직선 $x + y + 1 = 0$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $AP + BP$ 의 최솟값은?

- ① 5 ② $8\sqrt{2}$ ③ 12 ④ $9\sqrt{2}$ ⑤ 13

해설

점 B의 직선 $x + y + 1 = 0$ 에 대한 대칭점을 $B'(a, b)$ 라고 하면 $\overline{BB'}$ 의 중점은 직선 $x + y + 1 = 0$ 위의 점이므로 $\frac{a+2}{2} + \frac{b+3}{2} + 1 = 0$
 $\therefore a + b + 7 = 0 \cdots \textcircled{A}$
또, $\overline{BB'} \perp$ (직선 $x + y + 1 = 0$) 이므로 $\frac{b-3}{a-2} = 1$ 에서 $b = a + 1 \cdots \textcircled{B}$
 $\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 에서 $a = -4, b = -3$
 $\therefore B'(-4, -3)$
 $\therefore \overline{AB'} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$
 $\overline{AP} + \overline{PB} = \overline{AP} + \overline{PB'} \geq \overline{AB'} = 13$

3. 정점 A(4, 2)과 직선 $y = x$ 위를 움직이는 동점 P, x 축 위를 움직이는 동점 Q에 대하여 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QA}$ 가 최소가 되는 거리는?

- ① $3\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $4\sqrt{3}$ ④ $3\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{10}$

해설

최솟값은 점 A를 $y = x$ 에 대해 대칭시킨 점과 A를 x 축에 대칭시킨 점 사이의 거리와 같다.

$y = x$ 에 대한 대칭점은 A'(2, 4)

x 축에 대한 대칭점은 A''(4, -2)이므로

$$\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QA} \geq \overline{A'A''}$$

$$= \sqrt{(2-4)^2 + (4+2)^2} = 2\sqrt{10}$$

4. $(0, 0)$, $(0, 4)$, $(4, 4)$ 와 $(4, 0)$ 을 꼭짓점으로 하는 정사각형을 생각하자. $(0, 1)$ 에서 출발하여 윗변과 밑변으로 반사시켜 $(4, 2)$ 에 도달하는 꺾인 직선을 그리려면 윗변의 어느 점을 지나야 하는가? (단, 입사각과 반사각은 같다)
- ① $(1, 4)$ ② $\left(\frac{10}{7}, 4\right)$ ③ $\left(\frac{5}{3}, 4\right)$
④ $\left(\frac{4}{3}, 4\right)$ ⑤ $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$

해설

대칭성을 이용하여 $(0, 1)$ 과 $(4, 10)$ 을 연결하는 직선과 $y = 4$ 와의 교점을 계산하면 된다.

$$\begin{cases} y = \frac{9}{4}x + 1 \\ y = 4 \end{cases} \quad \therefore x = \frac{4}{3}$$

따라서, $\left(\frac{4}{3}, 4\right)$ 를 지난다.

5. 두 점 A(-2, 6) , B(2, -4)를 잇는 선분을 $t : 1-t$ 로 내분하는 점이 제 4사분면에 있도록 t 의 값의 범위를 정하면?

- ① $t > \frac{1}{2}$ ② $t > \frac{3}{5}$ ③ $t > \frac{3}{4}$ ④ $t < \frac{2}{5}$ ⑤ $t < \frac{1}{6}$

해설

내분점 $(2t + (1-t)(-2), -4t + (1-t)6) = (4t-2, -10t+6)$

$\therefore 4t-2 > 0$ 이고 $-10t+6 < 0$

$\therefore t > \frac{1}{2}$ 이고 $t > \frac{3}{5}$

$\therefore t > \frac{3}{5}$

6. 세 점 A (1, 5), B (-4, -7), C (5, 2)가 좌표평면 위에 있다. $\triangle ABC$ 에서 $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라 할 때, 점 D의 좌표를 구하면?

- ① (0, 0) ② $\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ③ $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
 ④ $\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ⑤ $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$

해설

$$\overline{AB} = 13, \overline{AC} = 5$$

$$\text{따라서 } \overline{AB} : \overline{AC} = 13 : 5$$

D는 B, C를 13 : 5로 내분한 점

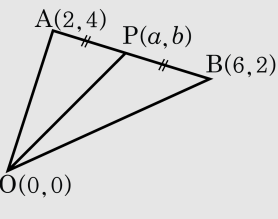
$$\therefore \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

7. 세 점 $O(0,0)$, $A(2,4)$, $B(6,2)$ 와 선분 AB 위의 점 $P(a,b)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 넓이가 삼각형 OAP 의 넓이의 2배일 때, $a+b$ 의 값은?

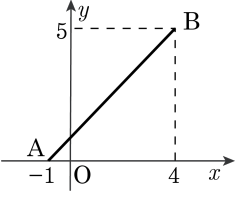
- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

다음 그림에서 $\triangle OAB$ 와 $\triangle OAP$ 의 높이가 같으므로
 $\triangle OAB = 2\triangle OAP$ 이려면
 P 는 선분 AB 의 중점이어야 한다.
 이 때, $P\left(\frac{2+6}{2}, \frac{4+2}{2}\right)$
 즉 $P(4,3)$ 이므로 $a=4, b=3$
 $\therefore a+b=7$



8. 두 점 A(-1, 0), B(4, 5)에 대하여 두 점 A, B로부터의 거리의 비가 3 : 2 점 P의 자취의 방정식은?



- ① $(x-5)^2 + (y-6)^2 = 50$ ② $(x-6)^2 + (y-7)^2 = 60$
 ③ $(x-7)^2 + (y-6)^2 = 70$ ④ $(x-7)^2 + (y-8)^2 = 80$
 ⑤ $(x-8)^2 + (y-9)^2 = 72$

해설

점 P를 (x, y) 라 두면

$$\overline{AP} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$$

$$\overline{BP} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-5)^2}$$

$\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} : \frac{\overline{BP}}{\overline{AP}} = 3 : 2$ 이므로

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} : \sqrt{(x-4)^2 + (y-5)^2} = 3 : 2$$

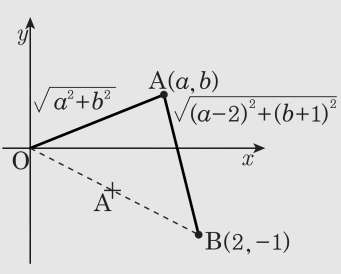
정리하면 $(x-8)^2 + (y-9)^2 = 72$

9. 좌표평면 위에 점 $O(0, 0)$, $A(a, b)$, $B(2, -1)$ 이 있다. 이때, $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{(a-2)^2 + (b+1)^2}$ 의 최솟값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ $\sqrt{5}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

해설

$\sqrt{a^2 + b^2}$ 은 $\overline{OA}$ 의 길이이고,
 $\sqrt{(a-2)^2 + (b+1)^2}$ 은 $\overline{AB}$ 의 길이이다.
 따라서, 준 식은 O, A, B 가 일
 직선상에 있을 때
 최소가 된다. (그림 참조)
 따라서, $\overline{OA} + \overline{AB}$ 의 최솟값은
 $\overline{OB} = \sqrt{5}$



10. 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC에서 변 BC 위에 한 점 P가 있다.
 $\overline{AP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 최솟값은?

① $\frac{6}{5}$

② $\frac{5}{4}$

③ $\frac{4}{3}$

④ $\frac{7}{2}$

⑤ $\frac{7}{4}$

해설

$\overline{BC}$ 를 x 축, $\overline{BC}$ 의 수직이등분선을 y 축으로 잡고

$A(0, \sqrt{3})$, $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$ 이라고 하자.

점 P는 $\overline{BC}$ 위의 점이므로

좌표를 $P(x, 0)$ 이라고 하면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2 + \overline{CP}^2 &= (x^2 + 3) + (x - 1)^2 \\ &= 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{2}\end{aligned}$$

따라서 $x = \frac{1}{2}$ 일 때, $\overline{AP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 최솟값은 $\frac{7}{2}$ 이다.

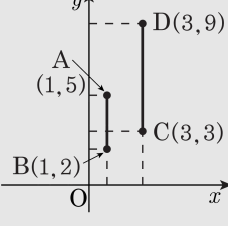
11. $f(x) = ax + b$ 이고 $2 \leq f(1) \leq 5$, $3 \leq f(3) \leq 9$ 라고 할 때, a 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

- ① 2
- ② $\frac{5}{2}$
- ③ 3
- ④ $\frac{7}{2}$
- ⑤ 4

해설

다음 그림과 같이 $f(x) = ax + b$ 가 선분 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ 를 동시에 지나야 하고

a 는 $y = f(x)$ 의 기울기이므로



a 의 최댓값은 $\overline{BD}$ 의 기울기이고

a 의 최솟값은 $\overline{AC}$ 의 기울기이다.

$\overline{BD}$ 의 기울기 $= \frac{9-2}{3-1} = \frac{7}{2}$

$\overline{AC}$ 의 기울기 $= \frac{3-5}{3-1} = -1$

$\therefore$ 최댓값+최솟값 $= \frac{7}{2} - 1 = \frac{5}{2}$

(다른 풀이) $f(1) = a + b$, $f(3) = 3a + b$ 이므로

$\therefore -1 \leq a \leq \frac{7}{2}$

12. 「 m, n 을 서로소인 자연수라 할 때, 좌표평면위의 두 점 $P(m, 0)$, $Q(0, n)$ 을 잇는 선분 PQ 위에는 x 좌표, y 좌표가 모두 자연수인 점이 존재하지 않는다.」를 다음과 같이 증명하였다.

<증명>

두 점 P, Q 를 지나는 직선의 방정식은

(가)

 이다. 따라서 $nx + my = mn$ ($0 < x < m, 0 < y < n$) 을 만족하는 자연수 x, y 가 존재한다고 가정하면 $my = n(m - x)$ 좌변이 m 의 배수이므로 우변도 m 의 배수이고, m, n 이 서로소이므로

(나)

 는 m 의 배수가 된다.
이것은 $0 < m - x < \div(다)$

 에 모순이다.

위

의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

- ① $nx + my = 1, m - x, m$

② $nx + my = 1, m + x, 2m$

③ $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1, m - x, m$

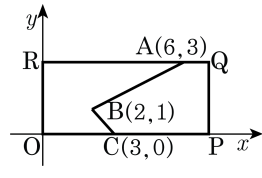
④ $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1, m + x, 2m$

⑤ $nx + my = 1, m + x, n$

해설

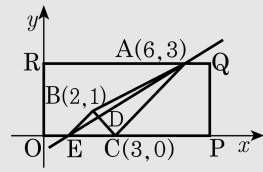
두 점 P, Q 를 지나는 직선의 x 절편, y 절편이 각각 m, n 이므로
 $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1 \Leftrightarrow nx + my = mn \cdots \cdots \textcircled{가}$
 $\textcircled{가}$ 을 만족하는 자연수 x, y 가 존재한다고 가정하면
 $my = n(m - x)$ 에서 m, n 이 서로소이므로 $m - x$ 는 m 의 배수가 된다.
이것은 $0 < m - x < m$ 에 모순이다.

13. $\overline{AB}$ 와 $\overline{BC}$ 는 직사각형 OPQR을 두 부분으로 나누는 경계선이다. 이 경계선을 두 부분의 넓이의 변화 없이 점 A를 지나는 직선으로 바꿀 때, 이 직선의 기울기는?



- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

해설



$\overline{AC}$ 와 평행한 보조선 $\overline{BE}$ 를 긋는다.

$\overline{AC} \parallel \overline{BE}$ 이므로 $\triangle ABC = \triangle AEC$,

$\triangle ABD = \triangle CDE$

따라서 $\overline{AE}$ 가 직선 경계임을 알 수 있다.

(직선 AC의 기울기) = (직선 BE의 기울기) = 1

점 B(2, 1)을 지나고 기울기 1인 직선의 방정식은

$y = x - 1$ 이고 E(1, 0)임을 알 수 있다.

$\therefore$ (직선 AE의 기울기) = $\frac{3}{5}$

14. 직선 $y = mx + n (m \neq 0)$ 은 직선 $ax + by + c = 0$ 에 평행하고, 직선 $px + qy + r = 0$ 에 수직이다. 다음 중 옳은 것을 모두 구하면?

- ☐ ㉠ $a + bm = 0$
- ☐ ㉡ $p + qm = 0$
- ☐ ㉢ $ap + bq = 0$

- ☒ ㉠ ☐ ㉠
- ☐ ㉡ ☐ ㉡
- ☐ ㉢ ☐ ㉡, ㉢
- ☐ ㉣ ☐ ㉠, ㉢
- ☐ ㉤ ☐ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$y = mx + n \cdots \textcircled{1}$

$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \cdots \textcircled{2}$

$y = -\frac{p}{q}x - \frac{r}{q} \cdots \textcircled{3}$

I) $\textcircled{1} // \textcircled{2} : m = -\frac{a}{b}$

$\therefore a + bm = 0$

II) $\textcircled{1} \perp \textcircled{3} : m \left(-\frac{p}{q} \right) = -1$

$\therefore mp - q = 0$

15. 세 직선 $l: y = -\frac{1}{2}x + 4$, $m: x + 2y - 2 = 0$, $n: 2x - y + 4 = 0$ 에 대한 다음 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ 두 직선 l 과 m 은 평행하다.
- ㉡ 두 직선 m 과 n 은 수직이다.
- ㉢ 두 직선 l 과 n 은 수직이다.

- ① ㉠
- ② ㉢
- ③ ㉠, ㉡
- ④ ㉡, ㉢
- ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$l: y = -\frac{1}{2}x + 4$
 $m: x + 2y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 1$
 $n: 2x - y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = 2x + 4$
㉠ 두 직선 l 과 m 은 기울기는 같고
y 절편은 다르므로 평행하다. (참)
㉡ 두 직선 m 과 n 의 기울기의 곱은
 $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 = -1$ 이므로 수직이다. (참)
㉢ 두 직선 l 과 n 의 기울기의 곱은
 $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 = -1$ 이므로 수직이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡, ㉢이다.

16. 두 점 $(2, 3)$, $(1, 2)$ 를 지나는 직선 위에 두 직선 $y - 3x - 4 = 0$, $y - ax - 2 = 0$ 의 교점이 있다고 할 때, a 의 값을 구하면?

① $\frac{2}{3}$

② $\frac{4}{3}$

③ $\frac{5}{3}$

④ $\frac{8}{3}$

⑤ $\frac{10}{3}$

해설

결국 세 직선의 교점이 일치하므로

두 점 $(2, 3)$, $(1, 2)$ 를 지나는

직선과 직선 $y - 3x - 4 = 0$ 의 교점이

직선 $y - ax - 2 = 0$ 위에 있다.

두 점 $(2, 3)$, $(1, 2)$ 를 지나는 직선은

$$y - 2 = \frac{3 - 2}{2 - 1}(x - 1)$$

$$\therefore y = x + 1$$

따라서 두 직선

$$y - 3x - 4 = 0 \text{과 } y = x + 1 \text{의 교점은 } \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

교점이 $y - ax - 2 = 0$ 위에 있으므로

$$-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}a - 2 = 0$$

$$\therefore a = \frac{5}{3}$$

17. 두 직선 $mx - y + m + 1 = 0$ 과 $y = -x + 2$ 가 제1사분면에서 만나도록 하는 상수 m 의 값의 범위는?

- ① $\frac{1}{3} < m < 1$ ② $-\frac{1}{3} < m < 1$
 ③ $-1 < m < 2$ ④ $m < -\frac{1}{3}, m > 1$
 ⑤ $-1 < m < -\frac{1}{3}$

해설

$$mx - y + m + 1 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$\Leftrightarrow m(x+1) - (y-1) = 0 \text{ 에서}$$

이 직선은 m 의 값에 관계없이

항상 점 $(-1, 1)$ 을 지난다.

다음 그림에서 $\textcircled{1}$ 이 직선 $y = -x + 2$

와

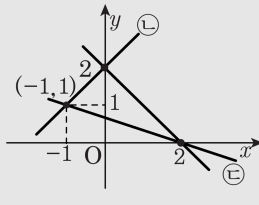
제1사분면에서 내려면 $\textcircled{1}$ 의 기울기 m

은

$\textcircled{L}$ 의 기울기 $\frac{2-1}{0-(-1)} = 1$ 보다 작고

$\textcircled{R}$ 의 기울기 $\frac{0-1}{2-(-1)} = -\frac{1}{3}$ 보다 커야한다.

$$\therefore -\frac{1}{3} < m < 1$$



18. x, y 에 대한 방정식 $xy + x + y - 1 = 0$ 을 만족시키는 정수 x, y 를 좌표평면 위의 점 (x, y) 로 나타낼 때, 이 점들을 꼭지점으로 하는 사각형의 넓이는?

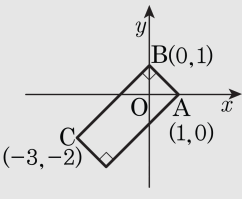
- ① 2
- ② 6
- ③ 8
- ④ $3\sqrt{2}$
- ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$xy + x + y - 1 = 0$ 에서 $(x + 1)(y + 1) = 2 \cdots \textcircled{1}$ 이고, x, y 는 정수이므로

$\textcircled{1}$ 을 만족하는 정수 해를 순서쌍으로 나타내면 $(0, 1), (1, 0), (-2, -3), (-3, -2)$ 이다.

네 점을 꼭짓점으로 하는 사각형은 그림과 같다.



사각형 $ABCD$ 는 직사각형이고 넓이는

$$\overline{AB} \times \overline{BC} = \sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 6$$

19. 직선 $y = \frac{4}{3}x$ 와 x 축이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식을 구할 때 기울기는? (단, 기울기는 양수이다.)

- ① $\frac{1}{4}$
- ② $\frac{1}{3}$
- ③ $\frac{1}{2}$
- ④ $\frac{2}{3}$
- ⑤ $\frac{3}{4}$

해설

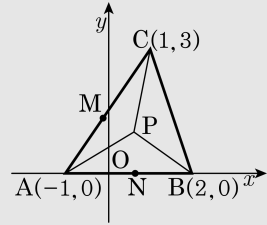
각의 이등분선은 각의 두 변에서 같은 거리에 있는 점들이다. 각의 이등분선 위의 임의의 점 $P(x, y)$ 에서 각의 두 변인 x 축과 직선 $y = \frac{4}{3}x$ 에 이르는 거리는 같다. $|y| = \frac{|4x - 3y|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}, y = \pm \frac{4x - 3y}{5}$
기울기가 양수이므로 $y = \frac{1}{2}x$, 기울기는 $\frac{1}{2}$

20. 좌표평면 위에 세 점 $A(-1,0)$, $B(2,0)$, $C(1,3)$ 이 있다. $\triangle ABC$ 의 내부의 점 P 가 $\triangle BPC = \triangle APC + \triangle APB$ 인 관계를 만족시키면서 움직인다. 점 P 가 그리는 도형의 길이는?

① $\frac{\sqrt{10}}{2}$ ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $\sqrt{10}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

해설

점 P가 $\triangle ABC$ 의 내부의 점이고
 $\triangle BPC = \triangle APC + \triangle APB$ 이므로



$$\therefore \Delta BPC = \frac{1}{2} \Delta ABC$$

점 P는 $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ 의 중점 M, N 을 잇는 선분 위에 있다.

그런데 $M\left(0, \frac{3}{2}\right), N\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

점 P의 자취 $\overline{MN} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

21. 방정식 $x^2 + y^2 + 4x - 6y + k + 10 = 0$ 이 원을 나타내도록 하는 실수 k 의 값의 범위는?

㉠ $k < 3$

㉡ $k > 3$

㉢ $0 < k < 3$

㉣ $k > 2$

㉤ $k < 2$

해설

$x^2 + y^2 + 4x - 6y + k + 10 = 0$ 을 완전제곱식으로

나타내면 $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 3 - k$

원이 되려면 반지름이 0 보다 커야 하므로

$\sqrt{3 - k} > 0, 3 - k > 0 \quad \therefore k < 3$

22. 두 정점 A(-3, 0), B(3, 0) 과 원 $x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0$ 이 있다. 이 원 위에 있는 한 점 P(a , b) 를 잡아 $\triangle PAB$ 를 만들 때, $\triangle PAB$ 의 무게중심의 자취는 원이다. 이 자취의 길이를 구하면?

- ① $\frac{5}{3}\pi$ ② $\frac{5}{2}\pi$ ③ $\frac{4}{3}\pi$ ④ $\frac{10}{3}\pi$ ⑤ $\frac{9}{4}\pi$

해설

점 P(a , b) 는 원 $x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0$ 위에 있으므로

$$a^2 + b^2 - 8b - 9 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$\triangle PAB$ 의 무게중심의 좌표를 (x , y) 라고 하면,

$$x = \frac{a}{3}, y = \frac{b}{3}$$

$$\therefore a = 3x, b = 3y$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면,

$$(3x)^2 + (3y)^2 - 8(3y) - 9 = 0$$

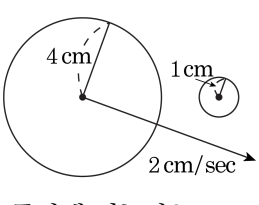
$$\therefore x^2 + y^2 - \frac{8}{3}y = 1$$

$$x^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2$$

$$\therefore r = \frac{5}{3}$$

$$\therefore l = 2\pi r = 2 \times \frac{5}{3}\pi = \frac{10}{3}\pi$$

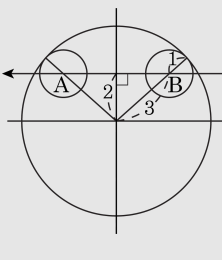
23. 반지름의 길이가 1cm 인 원에 반지름의 길이가 4cm 인 원이 초속 2cm 의 속도로 그림과 같이 직선 방향으로 진행한다고 한다. 두 원의 중심거리의 최단거리는 2cm 라 할 때, 반지름의 길이가 1cm 인 원 전체가 몇 초동안 반지름의 길이 4cm 인 원 안에 완전히 품기게 되는가?



- ① 1 초 ② $\sqrt{2}$ 초 ③ $\sqrt{3}$ 초
- ④ 2 초 ⑤ $\sqrt{5}$ 초

해설

작은 원이 큰 원 안에 포함되기 위해서는
 내접해야 하므로,
 $AB = 2 \times \sqrt{9 - 4} = 2\sqrt{5}$ 이고,
 2cm/s로 움직이므로,
 $\frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$ (초) 가 된다.



24. 다음 방정식으로 표시되는 그래프는 m 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다.
그 점의 좌표가 (a,b) 일 때, $a+b$ 의 값은? (단, $a < 0, b < 0$)

$$(x^2 + y^2 + 2x + 3y - 1)m + (x^2 + y^2 + 2x + 2y - 3) = 0$$

- ① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

m 의 값에 관계없이 다음 두 원의 교점을 지난다.

$x^2 + y^2 + 2x + 3y - 1 = 0$,

$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 3 = 0$

연립하여 풀면 $(x,y) = (-3,-2), (1,-2)$

그러므로 $(a,b) = (-3,-2)$

25. 두 원 $x^2 + y^2 = 9, x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$ 의 두 교점 사이의 거리를 구하면?

- ① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{10}$ ④ $\sqrt{11}$ ⑤ $\sqrt{13}$

해설

두 원의 교점을 이은 선분이 공통현 이다.

두 원의 공통현의 방정식은

$$(x^2 + y^2 - 9) - (x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16) = 0$$

$$\therefore 8x + 6y - 25 = 0$$

이때, 다음 그림과 같이 이 두 원의 교점을 A, B 라 하고

공통현 AB의 중점을 M이라고 하면

$\overline{OO'}$ 은 $\overline{AB}$ 를 수직이등분하므로 $\overline{AB} = 2\overline{AM} =$

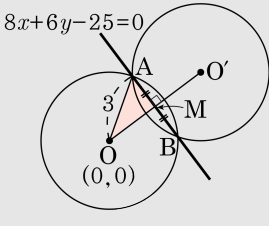
$$2\sqrt{3^2 - \overline{OM}^2} \dots\dots \textcircled{\text{A}}$$

그런데 $\overline{OM}$ 은 원점 O에서 직선 $8x + 6y - 25 = 0$ 까지의 거리이므로

$$\overline{OM} = \frac{|-25|}{\sqrt{8^2 + 6^2}} = \frac{5}{2} \dots\dots \textcircled{\text{B}}$$

②을 ①에 대입하면 구하는 두 교점 사이의 거리는

$$\overline{AB} = 2\overline{AM} = 2\sqrt{3^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{11}}{2} = \sqrt{11}$$



26. 두 원 $(x+1)^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 = 0$ 의 공통접선의 개수는?

- ① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$(x+1)^2 + y^2 = 1$ 에서 이 원의 중심을 C_1 이라

하면 점 C_1 의 좌표는 $(-1, 0)$ 이고

반지름의 길이는 1 이다.

$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 = 0$ 에서

$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 16$ 이므로

이 원의 중심을 C_2 이라 하면

점 C_2 의 좌표는 $(3, 3)$ 이고

반지름의 길이는 4 이다.

$\overline{C_1 C_2} = 5$ 이고

두 원의 반지름의 길이는 1, 4 이므로

두 원은 서로 외접하게 된다.

따라서 공통접선은 3 개이다.

27. 점 P (3,0) 에서 원 $(x+2)^2+(y+1)^2=10$ 에 그은 접선의 길이는?

- ① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{10}$ ③ 4 ④ $2\sqrt{5}$ ⑤ 5

해설

원의 중심을 C 라 하면 C (-2, -1) 이
므로
 $\overline{CP} = \sqrt{(3+2)^2+(0+1)^2} = \sqrt{26}$
 $\overline{CQ} = \sqrt{10}$
따라서, $\triangle CPQ$ 는 $\overline{CP}$ 가 빗변인 직각
삼각형이므로
 $\overline{PQ} = \sqrt{\overline{CP}^2 - \overline{CQ}^2} = \sqrt{26-10} = 4$

28. 두 원 $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + (y - 3)^2 = 4$ 의 공통접선의 방정식이 $y = mx + n$ 일 때, $m^2 + n^2$ 의 값은? (단, $m \neq 0$)

- ① 15
- ② 16
- ③ 17
- ④ 18
- ⑤ 19

해설

원 $x^2 + y^2 = 1$ 의 중심 (0, 0) 에서
직선 $y = mx + n$,
즉 $mx - y + n = 0$ 에 이르는 거리가 1 이므로
$$\frac{|n|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 1$$
$$\therefore m^2 = n^2 - 1 \dots \textcircled{\small{\text{㉠}}}$$
원 $x^2 + (y - 3)^2 = 4$ 의 중심 (0, 3) 에서
직선 $mx - y + n = 0$ 에 이르는 거리가 2 이므로
$$\frac{|-3 + n|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 2$$
$$\therefore n^2 - 6n + 9 = 4m^2 + 4 \dots \textcircled{\small{\text{㉡}}}$$
$$\textcircled{\small{\text{㉠}}} \text{ 을 } \textcircled{\small{\text{㉡}}} \text{ 에 대입하면,}$$
$$n^2 - 6n + 9 = 4(n^2 - 1) + 4, 3n^2 + 6n - 9 = 0$$
$$n^2 + 2n - 3 = 0, (n + 3)(n - 1) = 0$$
$$\therefore n = -3 \text{ 또는 } n = 1$$
이 때, $n = 1$ 이면 $m = 0$ 이 되므로 $n = -3$
 $n = -3$ 을 $\textcircled{\small{\text{㉠}}}$ 에 대입하면 $m^2 = 8$
$$\therefore m^2 + n^2 = 8 + 9 = 17$$

29. 실수 x, y 가 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$ 을 만족할 때, $x^2 + y^2$ 의 최댓값을 a , 최솟값을 b 라 할 때, $a+b$ 를 구하면?

① $2\sqrt{7}$ ② $2\sqrt{13}$ ③ $2\sqrt{17}$ ④ 16 ⑤ 28

해설

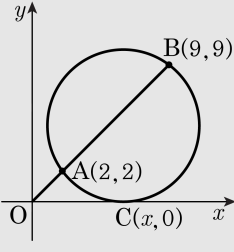
$x^2 + y^2 = k$ 인 원을 생각해보면,
두 원이 외접할 때 k 가 최소, 내접할 때 k 가 최대가 된다.
 $\Rightarrow$ 외접 : 중심사이의 거리 = 반지름의 합
 $\Rightarrow \sqrt{3^2 + 2^2} = 1 + \sqrt{k} \quad \therefore k = (\sqrt{13} - 1)^2$
 $\Rightarrow$ 내접 : 중심사이의 거리 = 반지름의 차
 $\Rightarrow \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{k} - 1 \quad \therefore k = (\sqrt{13} + 1)^2$
 $\therefore k$ 의 합은 $(\sqrt{13} - 1)^2 + (\sqrt{13} + 1)^2 = 28$

30. 좌표평면 위의 두 점 (2, 2), (9, 9) 를 지나고 x 축의 양의 부분과 접하는 원 O 의 접점의 x 좌표는 ?

- ① $\frac{9}{2}$
- ② 5
- ③ $\frac{11}{2}$
- ④ 6
- ⑤ $\frac{13}{2}$

해설

그림에서 $\overline{OC}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$



$$x^2 = \sqrt{2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{9^2 + 9^2} = 36 \quad x = 6$$

31. 두 원 $C_1 : (x-1)^2 + y^2 = 1$, $C_2 : (x-3)^2 + y^2 = 1$ 에 동시에 외접하는 제1 사분면 위의 원 C_3 가 있다. 세 원의 중심을 이은 삼각형이 정삼각형이 될 때, 원점에서 원 C_3 의 중심까지의 거리를 d , 원 C_3 의 반지름의 길이를 r 라 하자. 이때, $d \times r$ 의 값은?

- ① $\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{6}$ ④ $\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

해설

세 원의 중심을 각각 A, B, C 라 하면,
두 원의 중심의 좌표가 A(1, 0), B(3, 0) 이다.

$\overline{AC} = 2$ 이고 삼각형 ABC 가
정삼각형이므로 C(a, b) 라 하면

$$a = 1 + \overline{AC} \cos 60^\circ, b = \overline{AC} \sin 60^\circ$$

$$\therefore C(2, \sqrt{3})$$

따라서 원 C_3 는 중심이 $(2, \sqrt{3})$ 이고
반지름의 길이가 1 인 원이므로, 원점에서
원의 중심 C(2, $\sqrt{3}$) 까지의 거리는

$$d = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{7}$$

$$\therefore d \times r = \sqrt{7}$$

