1. $\mathrm{A}(-2,3), \mathrm{B}(4,3)$ 에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P의 좌표를 구하면?

① $(-2,0)$ ② $(-1,0)$ ③ $(0,0)$

④ $(1,0)$ ⑤ $(2,0)$

해설

점 P를 $(\alpha, 0)$이라 하자.

$\overline{\mathrm{AP}}^2 = \overline{\mathrm{BP}}^2$ 이므로

$(\alpha+2)^2 + (0-3)^2 = (\alpha-4)^2 + (0-3)^2$

$\therefore \ \alpha = 1$

$\therefore \ P = (1,0)$

2. 두 점 $A(1,\ 9)$, $B(2,\ 3)$과 직선 $x+y+1=0$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은?

① 5 ② $8\sqrt{2}$ ③ 12 ④ $9\sqrt{2}$ ⑤ 13

해설

점 B의 직선 $x+y+1=0$에 대한 대칭점을
$B'(a, b)$라고 하면 $\overline{BB'}$의 중점은
직선 $x+y+1=0$위의 점이므로

$$\frac{a+2}{2}+\frac{b+3}{2}+1=0$$

$\therefore\ a+b+7=0 \cdots$ ㉠

또, $\overline{BB'}\perp$(직선 $x+y+1=0$)이므로

$\dfrac{b-3}{a-2}=1$에서 $b=a+1 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=-4, b=-3$

$\therefore\ B'(-4,-3)$

$\therefore\ \overline{AB'}=\sqrt{5^2+12^2}=13$

$\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{AP}+\overline{PB'}\geq\overline{AB'}=13$

3. 정점 $\mathrm{A}(4,\ 2)$과 직선 $y=x$ 위를 움직이는 동점 P, x축 위를 움직이는 동점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QA}}$가 최소가 되는 거리는?

① $3\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $4\sqrt{3}$ ④ $3\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{10}$

해설

최솟값은 점 A를 $y=x$에 대해 대칭시킨 점과 A를 x축에 대칭시킨 점 사이의 거리와 같다.

$y=x$에 대한 대칭점은 $\mathrm{A}'(2,4)$

x축에 대한 대칭점은 $\mathrm{A}''(4,-2)$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QA}}\geq\overline{\mathrm{A}'\mathrm{A}''}$

$=\sqrt{(2-4)^2+(4+2)^2}=2\sqrt{10}$

4. $(0,0)$, $(0,4)$, $(4,4)$와 $(4,0)$을 꼭짓점으로 하는 정사각형을 생각하자. $(0,\ 1)$에서 출발하여 윗변과 밑변으로 반사시켜 $(4,2)$에 도달하는 꺾인 직선을 그리려면 윗변의 어느 점을 지나야 하는가? (단, 입사각과 반사각은 같다)

① $(1,\ 4)$ ② $\left(\frac{10}{7},\ 4\right)$ ③ $\left(\frac{5}{3},\ 4\right)$

④ $\left(\frac{4}{3},\ 4\right)$ ⑤ $\left(\frac{3}{2},\ 4\right)$

해설

대칭성을 이용하여 $(0,1)$과 $(4,10)$을 연결하는 직선과 $y=4$와의 교점을 계산하면 된다.

$$\begin{cases} y = \frac{9}{4}x + 1 \\ y = 4 \end{cases} \qquad \therefore\ x = \frac{4}{3}$$

따라서, $\left(\frac{4}{3}, 4\right)$를 지난다.

5. 두 점 A$(-2,\ 6)$, B$(2,\ -4)$를 잇는 선분을 $t : 1-t$ 로 내분하는 점이 제 4사분면에 있도록 t의 값의 범위를 정하면?

① $t > \dfrac{1}{2}$　② $t > \dfrac{3}{5}$　③ $t > \dfrac{3}{4}$　④ $t < \dfrac{2}{5}$　⑤ $t < \dfrac{1}{6}$

해설

내분점 $(2t + (1-t)(-2),\ -4t + (1-t)6) = (4t-2,\ -10t+6)$

$\therefore\ 4t - 2 > 0$이고 $-10t + 6 < 0$

$\therefore\ t > \dfrac{1}{2}$이고 $t > \dfrac{3}{5}$

$\therefore\ t > \dfrac{3}{5}$

6. 세 점 A $(1,5)$, B $(-4,-7)$, C $(5,2)$가 좌표평면 위에 있다. $\triangle ABC$ 에서 $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 할 때, 점 D 의 좌표를 구하면?

① $(0,0)$　② $\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$　③ $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

④ $\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$　⑤ $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$

해설

$\overline{AB} = 13$, $\overline{AC} = 5$

따라서 $\overline{AB} : \overline{AC} = 13 : 5$

D 는 B , C 를 $13 : 5$ 로 내분한 점

$\therefore \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

7. 세 점 $\mathrm{O}(0,0), \mathrm{A}(2,4), \mathrm{B}(6,2)$ 와 선분 AB 위의 점 $\mathrm{P}(a,b)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 넓이가 삼각형 OAP 의 넓이의 2배일 때, $a+b$ 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

다음 그림에서 $\triangle\mathrm{OAB}$ 와 $\triangle\mathrm{OAP}$ 의 높이가 같으므로

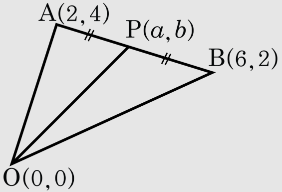
$\triangle\mathrm{OAB} = 2\triangle\mathrm{OAP}$ 이려면

P는 선분 AB 의 중점이어야 한다.

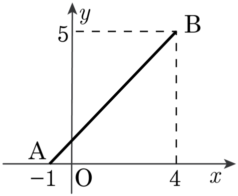
이 때, $\mathrm{P}\left(\frac{2+6}{2}, \frac{4+2}{2}\right)$

즉 $\mathrm{P}(4,3)$ 이므로 $a=4, b=3$

$\therefore a+b=7$



8. 두 점 A(−1, 0), B(4, 5)에 대하여 두 점 A, B 로부터의 거리의 비가 3 : 2 점 P의 자취의 방정식은?



① $(x-5)^2+(y-6)^2=50$
② $(x-6)^2+(y-7)^2=60$
③ $(x-7)^2+(y-6)^2=70$
④ $(x-7)^2+(y-8)^2=80$
⑤ $(x-8)^2+(y-9)^2=72$

해설

점 P를 (x, y)라 두면

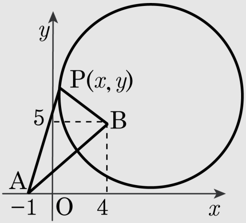
$\overline{AP}=\sqrt{(x+1)^2+y^2}$

$\overline{BP}=\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2}$

$\overline{AP}:\overline{BP}=3:2$이므로

$\sqrt{(x+1)^2+y^2}:\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2}=3:2$

정리하면 $(x-8)^2+(y-9)^2=72$

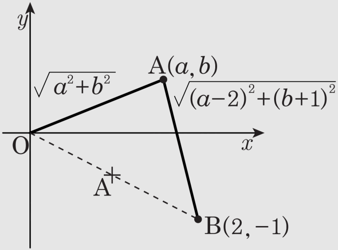


9. 좌표평면 위에 점 $O(0,\ 0)$, $A(a,\ b)$, $B(2, -1)$ 이 있다. 이때, $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a-2)^2+(b+1)^2}$ 의 최솟값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ $\sqrt{5}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

해설

$\sqrt{a^2+b^2}$ 은 $\overline{OA}$ 의 길이이고, $\sqrt{(a-2)^2+(b+1)^2}$ 은 $\overline{AB}$ 의 길이이다.
따라서, 준 식은 O, A, B 가 일직선상에 있을 때 최소가 된다. (그림 참조)
따라서, $\overline{OA}+\overline{AB}$ 의 최솟값은 $\overline{OB}=\sqrt{5}$



10. 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC에서 변 BC 위에 한 점 P가 있다. $\overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{CP}}^2$ 의 최솟값은?

① $\frac{6}{5}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

해설

$\overline{\mathrm{BC}}$를 x 축, $\overline{\mathrm{BC}}$의 수직이등분선을 y축으로 잡고
$\mathrm{A}(0, \sqrt{3})$, $\mathrm{B}(-1, 0)$, $\mathrm{C}(1, 0)$ 이라고 하자.
점 P는 $\overline{\mathrm{BC}}$ 위의 점이므로
좌표를 $\mathrm{P}(x, 0)$ 이라고 하면

$$\overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{CP}}^2 = (x^2 + 3) + (x - 1)^2$$
$$= 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{2}$$

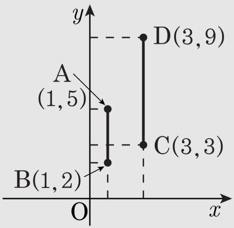
따라서 $x = \frac{1}{2}$ 일 때, $\overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{CP}}^2$ 의 최솟값은 $\frac{7}{2}$ 이다.

11. $f(x) = ax + b$ 이고 $2 \le f(1) \le 5$, $3 \le f(3) \le 9$ 라고 할 때, a의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① 2 ② $\dfrac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\dfrac{7}{2}$ ⑤ 4

해설

다음 그림과 같이 $f(x) = ax + b$ 가 선분 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ 를 동시에 지나야 하고
a는 $y = f(x)$ 의 기울기이므로



a의 최댓값은 $\overline{BD}$ 의 기울기이고
a의 최솟값은 $\overline{AC}$ 의 기울기이다.

$\overline{BD}$ 의 기울기$= \dfrac{9-2}{3-1} = \dfrac{7}{2}$

$\overline{AC}$ 의 기울기$= \dfrac{3-5}{3-1} = -1$

$\therefore$ 최댓값+최솟값$= \dfrac{7}{2} - 1 = \dfrac{5}{2}$

(다른 풀이) $f(1) = a + b$, $f(3) = 3a + b$ 이므로

$\therefore \quad -1 \le a \le \dfrac{7}{2}$

12. 「m, n 을 서로소인 자연수라 할 때, 좌표평면위의 두 점 $\mathrm{P}(m,\ 0)$, $\mathrm{Q}(0,\ n)$ 을 잇는 선분 PQ 위에는 x 좌표, y 좌표가 모두 자연수인 점이 존재하지 않는다.」를 다음과 같이 증명하였다.

<증명>

두 점 P, Q 를 지나는 직선의 방정식은
(가) 이다. 따라서 $nx+my=mn$ $(0<x<m,\ 0<y<n)$ 을 만족하는 자연수 x, y 가 존재한다고 가정하면 $my=n(m-x)$
좌변이 m 의 배수이므로 우변도 m 의 배수이고,
m, n 이 서로소이므로
(나) 는 m 의 배수가 된다.
이것은 $0<m-x<$ (다) 에 모순이다.

위의 증명에서 (가), (나), (다) 에 알맞은 것은?

① $nx+my=1,\ \ m-x,\ \ m$
② $nx+my=1,\ \ m+x,\ \ 2m$
③ $\dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}=1,\ \ m-x,\ \ m$
④ $\dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}=1,\ \ m+x,\ \ 2m$
⑤ $nx+my=1,\ \ m+x,\ \ n$

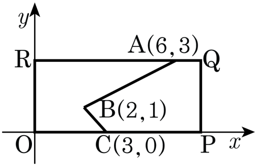
해설

두 점 P, Q 를 지나는 직선의 x 절편, y 절편이
각각 m, n 이므로

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1 \Leftrightarrow nx+my=mn \quad \cdots\cdots \ ㉠$$

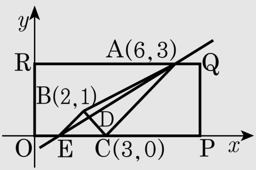
㉠을 만족하는 자연수 x, y 가
존재한다고 가정하면
$my=n(m-x)$ 에서 m, n 이 서로소이므로
$m-x$ 는 m 의 배수가 된다.
이것은 $0<m-x<m$ 에 모순이다.

13. $\overline{AB}$와 $\overline{BC}$는 직사각형 OPQR을 두 부분으로 나누는 경계선이다. 이 경계선을 두 부분의 넓이의 변화 없이 점 A를 지나는 직선으로 바꿀 때, 이 직선의 기울기는?



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

해설



$\overline{AC}$와 평행한 보조선 $\overline{BE}$를 긋는다.

$\overline{AC}\,//\,\overline{BE}$이므로 $\triangle ABC = \triangle AEC$,

$\triangle ABD = \triangle CDE$

따라서 $\overline{AE}$가 직선 경계임을 알 수 있다.

(직선 AC의 기울기)$=$ (직선 BE의 기울기)$= 1$

점 B(2, 1)을 지나고 기울기 1인 직선의 방정식은

$y = x - 1$이고 E(1, 0) 임을 알 수 있다.

$\therefore$ (직선 AE 의 기울기)$= \frac{3}{5}$

14. 직선 $y=mx+n(m\neq 0)$ 은 직선 $ax+by+c=0$ 에 평행하고, 직선 $px+qy+r=0$ 에 수직이다. 다음 중 옳은 것을 모두 구하면?

㉠ $a+bm=0$	㉡ $p+qm=0$	㉢ $ap+bq=0$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉡, ㉢
④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$y=mx+n \cdots ①$

$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b} \cdots ②$

$y=-\frac{p}{q}x-\frac{r}{q} \cdots ③$

Ⅰ) ①//② : $m=-\frac{a}{b}$

$\therefore a+bm=0$

Ⅱ) ①⊥③ : $m\left(-\frac{p}{q}\right)=-1$

$\therefore mp-q=0$

15. 세 직선 $l : y = -\frac{1}{2}x + 4$, $m : x + 2y - 2 = 0$, $n : 2x - y + 4 = 0$ 에 대한 다음<보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ 두 직선 l 과 m 은 평행하다.

㉡ 두 직선 m 과 n 은 수직이다.

㉢ 두 직선 l 과 n 은 수직이다.

① ㉠　　② ㉢　　③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$l : y = -\frac{1}{2}x + 4$

$m : x + 2y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 1$

$n : 2x - y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = 2x + 4$

㉠ 두 직선 l 과 m 은 기울기는 같고
y 절편은 다르므로 평행하다. (참)

㉡ 두 직선 m 과 n 의 기울기의 곱은
$\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 = -1$ 이므로 수직이다. (참)

㉢ 두 직선 l 과 n 의 기울기의 곱은
$\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 = -1$ 이므로 수직이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡, ㉢이다.

16. 두 점 $(2,\ 3)$, $(1, 2)$를 지나는 직선 위에 두 직선 $y-3x-4=0$, $y-ax-2=0$의 교점이 있다고 할 때, a의 값을 구하면?

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{3}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{10}{3}$

해설

결국 세 직선의 교점이 일치하므로
두 점 $(2,\ 3)$, $(1,\ 2)$를 지나는
직선과 직선 $y-3x-4=0$의 교점이
직선 $y-ax-2=0$위에 있다.
두 점 $(2,\ 3)$, $(1, 2)$를 지나는 직선은

$$y-2=\frac{3-2}{2-1}(x-1)$$

$\therefore\ y=x+1$
따라서 두 직선
$y-3x-4=0$과 $y=x+1$의 교점은 $\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$
교점이 $y-ax-2=0$위에 있으므로

$$-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}a-2=0$$

$\therefore\ a=\frac{5}{3}$

17. 두 직선 $mx-y+m+1=0$ 과 $y=-x+2$ 가 제1사분면에서 만나도록 하는 상수 m 의 값의 범위는?

① $\frac{1}{3}<m<1$

② $-\frac{1}{3}<m<1$

③ $-1<m<2$

④ $m<-\frac{1}{3},\ m>1$

⑤ $-1<m<-\frac{1}{3}$

해설

$mx-y+m+1=0\cdots$ ㉠

$\Leftrightarrow m(x+1)-(y-1)=0$ 에서

이 직선은 m 의 값에 관계없이

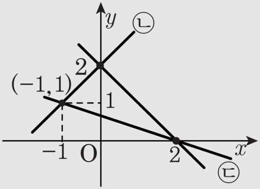
항상 점 $(-1,1)$ 을 지난다.

다음 그림에서 ㉠이 직선 $y=-x+2$

와

제1사분면에서 나려면 ㉠의 기울기 m

은



㉡의 기울기 $\frac{2-1}{0-(-1)}=1$ 보다 작고

㉢의 기울기 $\frac{0-1}{2-(-1)}=-\frac{1}{3}$ 보다 커야한다.

$\therefore\ -\frac{1}{3}<m<1$

18. x, y 에 대한 방정식 $xy+x+y-1=0$ 을 만족시키는 정수 x, y 를 좌표평면 위의 점 $(x,\ y)$ 로 나타낼 때, 이 점들을 꼭지점으로 하는 사각형의 넓이는?

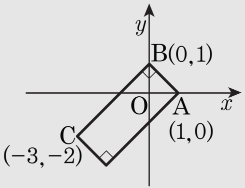
① 2 ② 6 ③ 8 ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$xy+x+y-1=0$ 에서 $(x+1)(y+1)=2\cdots$ ㉠ 이고, x, y 는 정수이므로

㉠ 을 만족하는 정수해를 순서쌍으로 나타내면 $(0,\ 1)$, $(1,\ 0)$, $(-2,-3)$, $(-3,-2)$ 이다.

네 점을 꼭짓점으로 하는 사각형은 그림과 같다.



사각형 $ABCD$ 는 직사각형이고 넓이는

$\overline{AB}\times\overline{BC}=\sqrt{2}\times3\sqrt{2}=6$

19. 직선 $y = \frac{4}{3}x$ 와 x 축이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식을 구할 때 기울기는? (단, 기울기는 양수이다.)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

해설

각의 이등분선은 각의 두 변에서 같은 거리에 있는 점들이다. 각의 이등분선 위의 임의의 점 $P(x, y)$ 에서 각의 두 변인 x 축과 직선 $y = \frac{4}{3}x$ 에 이르는 거리는 같다. $|y| = \frac{|4x - 3y|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$, $y = \pm\frac{4x - 3y}{5}$

기울기가 양수이므로 $y = \frac{1}{2}x$, 기울기는 $\frac{1}{2}$

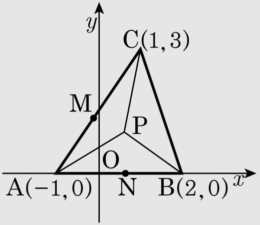
20. 좌표평면 위에 세 점 $A(-1, 0)$, $B(2, 0)$, $C(1, 3)$이 있다. $\triangle ABC$의 내부의 점 P가 $\triangle BPC = \triangle APC + \triangle APB$인 관계를 만족시키면서 움직인다. 점 P가 그리는 도형의 길이는?

① $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $\sqrt{10}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

해설

점 P가 $\triangle ABC$의 내부의 점이고

$\triangle BPC = \triangle APC + \triangle APB$ 이므로



$\therefore \ \triangle BPC = \dfrac{1}{2}\triangle ABC$

점 P는 $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ 의 중점 M, N 을 잇는 선분 위에 있다.

그런데 $M\left(0,\ \dfrac{3}{2}\right)$, $N\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$

점 P의 자취 $\overline{MN} = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{9}{4}} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$

21. 방정식 $x^2+y^2+4x-6y+k+10=0$ 이 원을 나타내도록 하는 실수 k 의 값의 범위는?

① $k<3$　　② $k>3$　　③ $0<k<3$

④ $k>2$　　⑤ $k<2$

해설

$x^2+y^2+4x-6y+k+10=0$ 을 완전제곱식으로 나타내면 $(x+2)^2+(y-3)^2=3-k$

원이 되려면 반지름이 0 보다 커야 하므로

$\sqrt{3-k}>0,\ 3-k>0 \quad \therefore\ k<3$

22. 두 정점 A$(-3,\ 0)$, B$(3,\ 0)$ 과 원 $x^2+y^2-8y-9=0$ 이 있다. 이 원 위에 있는 한 점 P$(a,\ b)$ 를 잡아 △PAB 를 만들 때, △PAB 의 무게중심의 자취는 원이다. 이 자취의 길이를 구하면?

① $\frac{5}{3}\pi$ ② $\frac{5}{2}\pi$ ③ $\frac{4}{3}\pi$ ④ $\frac{10}{3}\pi$ ⑤ $\frac{9}{4}\pi$

해설

점 P$(a,\ b)$ 는 원 $x^2+y^2-8y-9=0$ 위에 있으므로

$a^2+b^2-8b-9=0 \cdots$ ㉠

△PAB 의 무게중심의 좌표를 $(x,\ y)$ 라고 하면,

$$x=\frac{a}{3},\ y=\frac{b}{3}$$

$\therefore\ a=3x,\ b=3y$

이것을 ㉠에 대입하면,

$$(3x)^2+(3y)^2-8(3y)-9=0$$

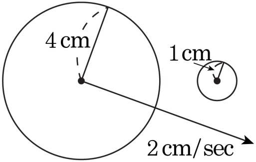
$$\therefore\ x^2+y^2-\frac{8}{3}y=1$$

$$x^2+\left(y-\frac{4}{3}\right)^2=\left(\frac{5}{3}\right)^2$$

$$\therefore\ r=\frac{5}{3}$$

$$\therefore\ l=2\pi r=2\times\frac{5}{3}\pi=\frac{10}{3}\pi$$

23. 반지름의 길이가 1 cm 인 원에 반지름의 길이가 4 cm 인 원이 초속 2 cm 의 속도로 그림과 같이 직선 방향으로 진행한다고 한다. 두 원의 중심거리의 최단거리는 2 cm 라 할 때, 반지름의 길이가 1 cm 인 원 전체가 몇 초동안 반지름의 길이 4 cm 인 원 안에 완전히 품기게 되는가?



① 1 초 ② $\sqrt{2}$ 초 ③ $\sqrt{3}$ 초

④ 2 초 ⑤ $\sqrt{5}$ 초

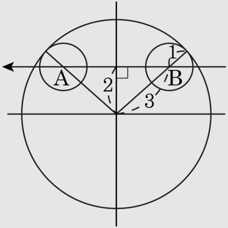
해설

작은 원이 큰 원 안에 포함되기 위해서는 내접해야 하므로,

$\overline{AB} = 2 \times \sqrt{9-4} = 2\sqrt{5}$ 이고,

2 cm/s 로 움직이므로,

$\frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$(초) 가 된다.



24. 다음 방정식으로 표시되는 그래프는 m 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다.
그 점의 좌표가 (a, b) 일 때, $a+b$ 의 값은? (단, $a<0, b<0$)

$$(x^2+y^2+2x+3y-1)m+(x^2+y^2+2x+2y-3)=0$$

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

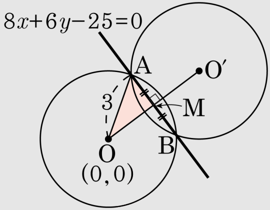
m 의 값에 관계없이 다음 두 원의 교점을 지난다.
$x^2+y^2+2x+3y-1=0$,
$x^2+y^2+2x+2y-3=0$
연립하여 풀면 $(x, y)=(-3,-2),(1,-2)$
그러므로 $(a, b)=(-3,-2)$

25. 두 원 $x^2+y^2=9, x^2+y^2-8x-6y+16=0$의 두 교점 사이의 거리를 구하면?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{10}$ ④ $\sqrt{11}$ ⑤ $\sqrt{13}$

해설

두 원의 교점을 이은 선분이 공통현이다.



두 원의 공통현의 방정식은

$(x^2+y^2-9)-(x^2+y^2-8x-6y+16)=0$

$\therefore 8x+6y-25=0$

이때, 다음 그림과 같이 이 두 원의 교점을 A, B라 하고 공통현 AB의 중점을 M이라고 하면

$\overline{OO'}$은 $\overline{AB}$를 수직이등분하므로 $\overline{AB}=2\overline{AM}=2\sqrt{3^2-\overline{OM}^2}\cdots\cdots$㉠

그런데 $\overline{OM}$은 원점 O에서 직선 $8x+6y-25=0$까지의 거리이므로

$\overline{OM}=\dfrac{|-25|}{\sqrt{8^2+6^2}}=\dfrac{5}{2}\cdots\cdots$㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 구하는 두 교점 사이의 거리는

$\overline{AB}=2\overline{AM}=2\sqrt{3^2-\left(\dfrac{5}{2}\right)^2}=2\cdot\dfrac{\sqrt{11}}{2}=\sqrt{11}$

26. 두 원 $(x+1)^2+y^2=1$, $x^2+y^2-6x-6y+2=0$ 의 공통접선의 개수는?

① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$(x+1)^2+y^2=1$ 에서 이 원의 중심을 C_1 이라 하면 점 C_1 의 좌표는 $(-1,\ 0)$ 이고 반지름의 길이는 1 이다.

$x^2+y^2-6x-6y+2=0$ 에서 $(x-3)^2+(y-3)^2=16$ 이므로 이 원의 중심을 C_2 이라 하면 점 C_2 의 좌표는 $(3,\ 3)$ 이고 반지름의 길이는 4 이다.

$\overline{C_1C_2}=5$ 이고 두 원의 반지름의 길이는 1, 4 이므로 두 원은 서로 외접하게 된다.

따라서 공통접선은 3 개이다.

27. 점 P$(3,0)$ 에서 원 $(x+2)^2+(y+1)^2=10$ 에 그은 접선의 길이는?

① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{10}$ ③ 4 ④ $2\sqrt{5}$ ⑤ 5

해설

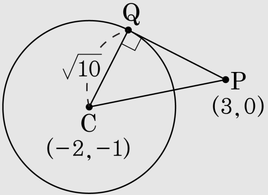
원의 중심을 C 라 하면 C$(-2,-1)$ 이므로

$\overline{\mathrm{CP}} = \sqrt{(3+2)^2+(0+1)^2} = \sqrt{26}$

$\overline{\mathrm{CQ}} = \sqrt{10}$

따라서, $\triangle$CPQ 는 $\overline{\mathrm{CP}}$ 가 빗변인 직각삼각형이므로

$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{\overline{\mathrm{CP}}^2 - \overline{\mathrm{CQ}}^2} = \sqrt{26-10} = 4$



28. 두 원 $x^2+y^2=1$, $x^2+(y-3)^2=4$ 의 공통접선의 방정식이 $y=mx+n$ 일 때, m^2+n^2 의 값은?(단, $m \neq 0$)

① 15　② 16　③ 17　④ 18　⑤ 19

해설

원 $x^2+y^2=1$ 의 중심 $(0,\ 0)$ 에서
직선 $y=mx+n$,
즉 $mx-y+n=0$ 에 이르는 거리가 1이므로

$$\frac{|n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$$

$\therefore\ m^2=n^2-1\ \cdots$ ㉠
원 $x^2+(y-3)^2=4$ 의 중심 $(0,\ 3)$ 에서
직선 $mx-y+n=0$ 에 이르는 거리가 2이므로

$$\frac{|-3+n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$$

$\therefore\ n^2-6n+9=4m^2+4\ \cdots$ ㉡
㉠ 을 ㉡ 에 대입하면,
$n^2-6n+9=4(n^2-1)+4$, $3n^2+6n-9=0$
$n^2+2n-3=0$, $(n+3)(n-1)=0$
$\therefore\ n=-3$ 또는 $n=1$
이 때, $n=1$ 이면 $m=0$ 이 되므로 $n=-3$
$n=-3$ 을 ㉠ 에 대입하면 $m^2=8$
$\therefore\ m^2+n^2=8+9=17$

29. 실수 x, y 가 $(x-3)^2+(y-2)^2=1$ 을 만족할 때, x^2+y^2 의 최댓값을 a , 최솟값을 b 라 할 때, $a+b$ 를 구하면?

① $2\sqrt{7}$ ② $2\sqrt{13}$ ③ $2\sqrt{17}$ ④ 16 ⑤ 28

해설

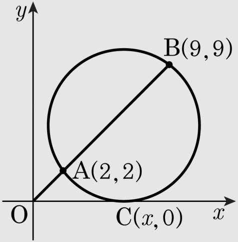
$x^2+y^2=k$ 인 원을 생각해보면,
두 원이 외접할 때 k 가 최소, 내접할 때 k 가 최대가 된다.
$\Rightarrow$ 외접 : 중심사이의 거리 = 반지름의 합
$\Rightarrow$ $\sqrt{3^2+2^2}=1+\sqrt{k}$ $\therefore$ $k=(\sqrt{13}-1)^2$
$\Rightarrow$ 내접 : 중심사이의 거리 = 반지름의 차
$\Rightarrow$ $\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{k}-1$ $\therefore$ $k=(\sqrt{13}+1)^2$
$\therefore$ k 의 합은 $(\sqrt{13}-1)^2+(\sqrt{13}+1)^2=28$

30. 좌표평면 위의 두 점 (2, 2), (9, 9) 를 지나고 x 축의 양의 부분과 접하는 원 O 의 접점의 x 좌표는 ?

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

해설

그림에서 $\overline{OC}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$



$x^2 = \sqrt{2^2+2^2} \cdot \sqrt{9^2+9^2} = 36 \quad x = 6$

31. 두 원 $C_1 : (x-1)^2 + y^2 = 1$, $C_2 : (x-3)^2 + y^2 = 1$ 에 동시에 외접하는 제1 사분면 위의 원 C_3 가 있다. 세 원의 중심을 이은 삼각형이 정삼각형이 될 때, 원점에서 원 C_3 의 중심까지의 거리를 d , 원 C_3 의 반지름의 길이를 r 라 하자. 이때, $d \times r$ 의 값은?

① $\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{6}$ ④ $\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

해설

세 원의 중점을 각각 A, B, C 라 하면,
두 원의 중심의 좌표가 A(1, 0), B(3, 0)
이다.
$\overline{AC} = 2$ 이고 삼각형 ABC 가
정삼각형이므로 C$(a,\ b)$ 라 하면
$a = 1 + \overline{AC}\cos 60°$, $b = \overline{AC}\sin 60°$
$\therefore$ C$(2,\ \sqrt{3})$
따라서 원 C_3 는 중심이 $(2,\ \sqrt{3})$ 이고
반지름의 길이가 1 인 원이므로, 원점에서
원의 중심 C$(2,\ \sqrt{3})$ 까지의 거리는

$$d = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{7}$$

$$\therefore d \times r = \sqrt{7}$$