1. 직선 $x+y=2$ 위에 있고, 두 점 $\mathrm{A}(0,6)$, $\mathrm{B}(2,2)$ 에서 같은 거리에 있는 점을 P 라 할 때, $\overline{\mathrm{AP}}$ 의 길이를 구하면?

① 2　② $\sqrt{5}$　③ $2\sqrt{2}$　④ $\sqrt{10}$　⑤ 5

해설

$x+y=2$ 위에 있는 점 P 는
$(\alpha, -\alpha+2)$ 로 나타낼 수 있다.
$\overline{\mathrm{AP}}^2 = \overline{\mathrm{BP}}^2$ 이므로
$\alpha^2 + (-\alpha-4)^2 = (\alpha-2)^2 + (-\alpha)^2$
$\alpha = -1$
$\mathrm{P}(-1,\ 3)$
$\therefore\ \overline{AP} = \sqrt{(-1)^2+(-3)^2} = \sqrt{10}$

2. 두 점 A(1, 9), B(2, 3)과 직선 $x+y+1=0$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은?

① 5　② $8\sqrt{2}$　③ 12　④ $9\sqrt{2}$　⑤ 13

해설

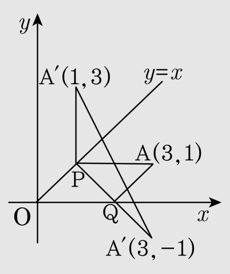
점 B의 직선 $x+y+1=0$에 대한 대칭점을
$\mathrm{B}'(a,b)$라고 하면 $\overline{\mathrm{BB}'}$의 중점은
직선 $x+y+1=0$ 위의 점이므로
$\frac{a+2}{2}+\frac{b+3}{2}+1=0$
$\therefore\ a+b+7=0\cdots$㉠
또, $\overline{\mathrm{BB}'}\perp$(직선 $x+y+1=0$)이므로
$\frac{b-3}{a-2}=1$에서 $b=a+1\cdots$㉡
㉠, ㉡에서 $a=-4, b=-3$
$\therefore\ \mathrm{B}'(-4,-3)$
$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}'}=\sqrt{5^2+12^2}=13$
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}'}\geq\overline{\mathrm{AB}'}=13$

3. 정점 $A(3,1)$ 과 직선 $y=x$ 위를 움직이는 동점 P , x 축 위를 움직이는 동점 Q 에 대하여 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QA}$ 의 최소거리를 구하면?

① $2\sqrt{3}$ ② 4 ③ $2\sqrt{5}$ ④ $3\sqrt{5}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

해설

점 A 의 $y=x$ 에 대한 대칭점을 A' ,



점 A 의 x 축에 대한 A'' 라 하면,

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QA}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QA''}} ge \overline{\mathrm{A'A''}}$

$\overline{\mathrm{A'A''}}=\sqrt{(3-1)^2+(-1-3)^2}=2\sqrt{5}$

따라서 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QA}$ 의 최솟값은 $2\sqrt{5}$ 이다.

4. 정점 $\mathrm{A}(4,\ 2)$과 직선 $y=x$ 위를 움직이는 동점 P, x축 위를 움직이는 동점 Q 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QA}}$가 최소가 되는 거리는?

① $3\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $4\sqrt{3}$ ④ $3\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{10}$

해설

최솟값은 점 A를 $y=x$에 대해 대칭시킨 점과 A를 x축에 대칭시킨 점 사이의 거리와 같다.
$y=x$에 대한 대칭점은 $\mathrm{A}'(2,4)$
x축에 대한 대칭점은 $\mathrm{A}''(4,-2)$ 이므로
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QA}} \geq \overline{\mathrm{A}'\mathrm{A}''}$
$= \sqrt{(2-4)^2+(4+2)^2} = 2\sqrt{10}$

5. $(0,0)$, $(0,4)$, $(4,4)$와 $(4,0)$을 꼭짓점으로 하는 정사각형을 생각하자. $(0,\ 1)$에서 출발하여 윗변과 밑변으로 반사시켜 $(4,2)$에 도달하는 꺾인 직선을 그리려면 윗변의 어느 점을 지나야 하는가? (단, 입사각과 반사각은 같다)

① $(1,\ 4)$ ② $\left(\frac{10}{7},\ 4\right)$ ③ $\left(\frac{5}{3},\ 4\right)$
④ $\left(\frac{4}{3},\ 4\right)$ ⑤ $\left(\frac{3}{2},\ 4\right)$

해설

대칭성을 이용하여 $(0,1)$과 $(4,10)$을 연결하는 직선과 $y=4$와의 교점을 계산하면 된다.

$$\begin{cases} y = \frac{9}{4}x + 1 \\ y = 4 \end{cases} \quad \therefore\ x = \frac{4}{3}$$

따라서, $\left(\frac{4}{3}, 4\right)$를 지난다.

6. 두 점 $A(-2,\ 6)$, $B(2,\ -4)$를 잇는 선분을 $t : 1-t$ 로 내분하는 점이 제 4사분면에 있도록 t의 값의 범위를 정하면?

① $t > \frac{1}{2}$ ② $t > \frac{3}{5}$ ③ $t > \frac{3}{4}$ ④ $t < \frac{2}{5}$ ⑤ $t < \frac{1}{6}$

해설

내분점 $(2t+(1-t)(-2),\ -4t+(1-t)6) = (4t-2,\ -10t+6)$

$\therefore\ 4t-2>0$ 이고 $-10t+6<0$

$\therefore\ t > \frac{1}{2}$ 이고 $t > \frac{3}{5}$

$\therefore\ t > \frac{3}{5}$

7. 평행사변형 ABCD에서 꼭짓점 A$(-1,\ -2)$, B$(6,\ 4)$, D$(0,\ 2)$이고, $\overline{\mathrm{AB}}$와 $\overline{\mathrm{BC}}$가 이웃하는 두 변일 때 나머지 한 꼭짓점 C의 좌표는?

① C$(5,\ 0)$ ② C$(0,\ 5)$ ③ C$(7,\ 8)$
④ C$(8,\ 7)$ ⑤ C$(7,\ 6)$

해설

C(a, b) 라고 하면, 평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 $\overline{\mathrm{AC}}$의 중점과 $\overline{\mathrm{BD}}$의 중점은 같다.

$$\left(\frac{-1+a}{2},\ \frac{-2+b}{2}\right) = \left(\frac{6+0}{2},\ \frac{4+2}{2}\right)$$

$-1+a=6,\ -2+b=6$

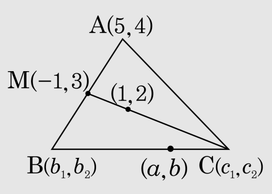
$\therefore\ a=7,\ b=8$

$\therefore\ \mathrm{C}(7, 8)$

8. 삼각형 ABC에서 꼭지점 A 의 좌표가 $(5,\ 4)$, 변 AB 의 중점 M 의 좌표가 $(-1,\ 3)$, 무게중심의 좌표가 $(1,\ 2)$ 일 때 변 BC 를 $2\ :\ 1$ 로 내분하는 점의 좌표는 $(a,\ b\ )$ 라 한다. 이 때, $a+b$ 의 값은?

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{2}{3}$　③ 1　④ $\frac{4}{3}$　⑤ $\frac{5}{3}$

해설



B 의 좌표를 $(b_1,\ b_2)$, C 의 좌표를 $(c_1,\ c_2)$ 라고 하면

$\overline{\mathrm{AB}}$ 의 중점의 좌표가

$\left(\frac{b_1+5}{2},\ \frac{b_2+4}{2}\right)$ 이므로

$\frac{b_1+5}{2}=-1, \frac{b_2+4}{2}=3$ 이다.

따라서 $b_1=-7,\ b_2=2$

즉 $\mathrm{B}(-7,\ 2)$

$\overline{\mathrm{CM}}$ 을 $2\ :\ 1$ 로 내분하는 점이

$\triangle\mathrm{ABC}$ 의 무게중심이므로

$\left(\frac{2\times(-1)+1\times c_1}{2+1},\ \frac{2\times 3+1\times c_2}{2+1}\right)=(1,\ 2)$

$\left(\frac{c_1-2}{3},\ \frac{6+c_2}{3}\right)=(1,\ 2)$ 에서 $c_1=5,\ c_2=0$

$\overline{\mathrm{BC}}$ 의 $2:1$ 로 내분점을 계산하면,

$\left(\frac{2\times 5+1\times(-7)}{2+1},\ \frac{2\times 0+1\times 2}{2+1}\right)=\left(1,\ \frac{2}{3}\right)$

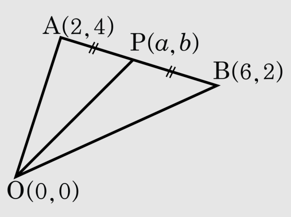
따라서 $a+b=\frac{5}{3}$ 가 된다.

9. 세 점 $\mathrm{O}(0,0), \mathrm{A}(2,4), \mathrm{B}(6,2)$ 와 선분 AB 위의 점 $\mathrm{P}(a,b)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 넓이가 삼각형 OAP 의 넓이의 2배일 때, $a+b$ 의 값은?

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

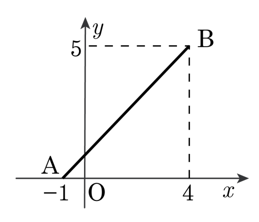
해설

다음 그림에서 $\triangle\mathrm{OAB}$ 와 $\triangle\mathrm{OAP}$ 의 높이가 같으므로
$\triangle\mathrm{OAB} = 2\triangle\mathrm{OAP}$ 이려면
P는 선분 AB의 중점이어야 한다.



이 때, $\mathrm{P}\left(\frac{2+6}{2}, \frac{4+2}{2}\right)$
즉 $\mathrm{P}(4,3)$ 이므로 $a=4, b=3$
$\therefore a+b=7$

10. 두 점 A$(-1,\ 0)$, B$(4,\ 5)$에 대하여 두 점 A, B로부터의 거리의 비가 $3:2$ 점 P의 자취의 방정식은?



① $(x-5)^2+(y-6)^2=50$ ② $(x-6)^2+(y-7)^2=60$

③ $(x-7)^2+(y-6)^2=70$ ④ $(x-7)^2+(y-8)^2=80$

⑤ $(x-8)^2+(y-9)^2=72$

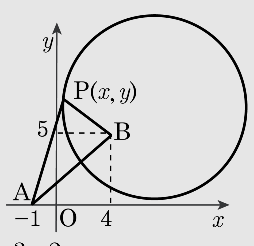
해설

점 P를 (x, y)라 두면

$\overline{AP}=\sqrt{(x+1)^2+y^2}$

$\overline{BP}=\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2}$

$\overline{AP}:\overline{BP}=3:2$이므로



$\sqrt{(x+1)^2+y^2}:\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2}=3:2$

정리하면 $(x-8)^2+(y-9)^2=72$

11. 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC에서 변 BC 위에 한 점 P 가 있다. $\overline{AP}^2+\overline{CP}^2$ 의 최솟값은?

① $\frac{6}{5}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

해설

$\overline{BC}$를 x 축, $\overline{BC}$의 수직이등분선을 y축으로 잡고
$A(0,\sqrt{3})$, $B(-1,0)$, $C(1,0)$ 이라고 하자.
점 P는 $\overline{BC}$ 위의 점이므로
좌표를 $P(x,0)$ 이라고 하면

$$\overline{AP}^2+\overline{CP}^2=(x^2+3)+(x-1)^2$$
$$=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{2}$$

따라서 $x=\frac{1}{2}$ 일 때, $\overline{AP}^2+\overline{CP}^2$ 의 최솟값은 $\frac{7}{2}$ 이다.

12. 두 점 $A(-2,\ -3)$, $B(2,\ 1)$ 을 지나는 직선에 평행하고, 점 $(2,\ 1)$ 을 지나는 직선의 방정식은?

① $y = x + 1$　　② $y = x - 1$　　③ $y = -x + 1$

④ $y = -x - 1$　　⑤ $y = x$

해설

기울기가 m 이고, 점$(x_1,\ y_1)$ 을 지나는 직선의 방정식은 $y - y_1 = m(x - x_1)$

두 점 $A(-2,\ -3)$, $B(2,\ 1)$ 을 지나는 직선의 기울기가

$\dfrac{1-(-3)}{2-(-2)} = 1$ 이므로,

구하는 직선의 방정식은

$y - 1 = 1 \cdot (x - 2)$

$\therefore\ y = x - 1$

13. 두 이차함수 $y=-x^2+3$과 $y=x^2-4x+3$의 그래프의 꼭지점을 각각 A, B라 할 때, 직선 AB의 x절편은?

① $\frac{3}{2}$　② $\frac{4}{3}$　③ $\frac{2}{3}$　④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{1}{3}$

해설

$y=-x^2+3$ 의 꼭지점은 $A(0,3)$ 이고,
$y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$이므로 꼭지점은 $B(2,-1)$ 이다.
이 때, 두 점 $A(0,3)$,$B(2,-1)$을 지나는
직선의 방정식은 $y=-2x+3$
따라서, x절편은 $0=-2x+3$에서
$x=\frac{3}{2}$ 이므로 $\frac{3}{2}$이다.

14. x, y에 관한 이차방정식 $2x^2-3xy+ay^2-2x+9y+b=0$이 직교하는 두 직선의 곱을 나타낼 때, ab를 구하면?

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

준식이 나타내는 두 직선을
$px+qy+r=0 \cdots$ ㉠ ,
$p'x+q'y+r'=0 \cdots$ ㉡이라 하자.
㉠과 ㉡은 서로 직교하므로
$pp'+qq'=0$이다.
(준식)$=(px+qy+r)(p'x+q'y+r')=0$의
전개식에서 x^2의 계수와 y^2의 계수의 합은
$pp'+qq'$이므로 $a+2=pp'+qq'=0$
$\therefore\ a=-2$
$a=-2$를 준식에 대입하여 정리하면
(준식)
$=2x^2-(3y+2)x+(-2y^2+9y+b)=0 \cdots$ ㉢
㉢이 두 직선의 곱을 나타내므로
㉢의 판별식 $\mathrm{D}_1=(3y+2)^2-8(-2y^2+9y+b)$
$=25y^2-60y+(4-8b) \cdots$ ㉣이 완전제곱식이다.
따라서 ㉣의 판별식 $\frac{\mathrm{D}_2}{4}$는 0이다.
$\frac{\mathrm{D}_2}{4}=30^2-25(4-8b)=0$
$\therefore\ b=-4$
$\therefore\ ab=(-2)\cdot(-4)=8$

15. 직선 $y = mx + n(m \neq 0)$ 은 직선 $ax + by + c = 0$ 에 평행하고, 직선 $px + qy + r = 0$ 에 수직이다. 다음 중 옳은 것을 모두 구하면?

㉠ $a + bm = 0$	㉡ $p + qm = 0$	㉢ $ap + bq = 0$

① ㉠　　② ㉡　　③ ㉡, ㉢
④ ㉠, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$y = mx + n \cdots$ ①

$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \cdots$ ②

$y = -\frac{p}{q}x - \frac{r}{q} \cdots$ ③

Ⅰ) ① // ② : $m = -\frac{a}{b}$

$\therefore a + bm = 0$

Ⅱ) ①⊥③ : $m\left(-\frac{p}{q}\right) = -1$

$\therefore mp - q = 0$

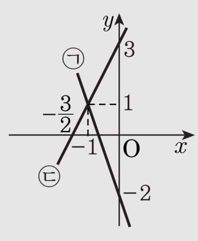
16. 다음 세 직선이 삼각형을 만들 수 있기 위한 k 의조건은?

$$3x+y+2=0,\ x+3y+k=0,\ 2x-y+3=0$$

① $k \neq -2$ ② $k \neq -3$ ③ $k \neq -4$
④ $k \neq -7$ ⑤ $k \neq -11$

해설

$3x+y+2=0 \cdots$ ㉠
$x+3y+k=0 \cdots$ ㉡ 일 때,
$2x-y+3=0 \cdots$ ㉢



다음 그림과 같이
세 직선이 삼각형을 만들려면 평행한 직선이 없어야 하고 세 직선이 한 점에서 만나지 않아야 한다.
㉠, ㉡, ㉢ 중에 어느 두 직선도 평행하지 않으므로 세 직선이 한 점에서 만나지 않을 조건을 구한다.
㉠과 ㉢을 연립하여 교점의 좌표를 구하면$(-1,\ 1)$ 이다.
이 점을 ㉡에 대입했을 때 등식이 성립하지 않아야 하므로 $-1+3+k \neq 0$, $\therefore\ k \neq -2$

17. 두 점 A$(-1,\ 4)$, B$(3,\ 2)$ 을 이은 선분 AB 의 수직이등분선 위에 있는 점을 고르면?

① $(-2,\ 5)$　　② $(1,\ 2)$　　③ $(4,\ 9)$
④ $(5,\ -7)$　　⑤ $(7,\ -15)$

해설

$\overline{\mathrm{AB}}$ 의 방정식을 구해보면,

$y = \dfrac{2-4}{3-(-1)}(x-3)+2 \quad \therefore\ y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{7}{2}$

$\therefore$ 수직이등분성의 기울기는 2 이고 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 중점 을 지난다.

$\Rightarrow\ y = 2\left(x - \dfrac{-1+3}{2}\right) + \dfrac{4+2}{2} = 2x+1$

$\Rightarrow$ 점 $(4,\ 9)$ 를 지난다.

18. 직선 $y=\frac{4}{3}x$ 와 x 축이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식을 구할 때 기울기는? (단, 기울기는 양수이다.)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

해설

각의 이등분선은 각의 두 변에서 같은 거리에 있는 점들이다. 각의 이등분선 위의 임의의 점 $P\,(x,\ y)$ 에서 각의 두 변인 x 축과 직선 $y=\frac{4}{3}x$ 에 이르는 거리는 같다. $|y|=\frac{|4x-3y|}{\sqrt{3^2+4^2}}$, $y=\pm\frac{4x-3y}{5}$

기울기가 양수이므로 $y=\frac{1}{2}x$, 기울기는 $\frac{1}{2}$

19. 점 A(6, 2)와 직선 $x+2y-2=0$ 위를 움직이는 점 P가 있다. $\overline{\mathrm{AP}}$를 1 : 3으로 내분하는 점의 자취는?

① $x-2y-8=0$ ② $x+2y-8=0$ ③ $x-2y+8=0$
④ $x+2y+8=0$ ⑤ $x-2y=0$

해설

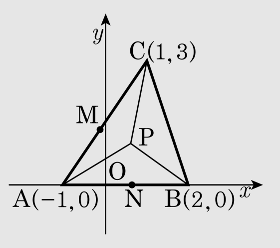
P $(a,\ b)$라 하면 $a+2b-2=0$ ⋯㉠
$\overline{\mathrm{AP}}$의 1 : 3 내분점을 Q $(x,\ y)$라 하면
$\mathrm{Q}(x,\ y)=\left(\dfrac{a+18}{1+3},\dfrac{b+6}{1+3}\right)$
$x=\dfrac{a+18}{1+3}$, $y=\dfrac{b+6}{1+3}$
$a=4x-18$, $b=4y-6$
㉠에 대입하면,
$4x-18+2(4y-6)-2=0 \Rightarrow x+2y-8=0$

20. 좌표평면 위에 세 점 A$(-1, 0)$, B$(2, 0)$, C$(1, 3)$ 이 있다. $\triangle$ABC 의 내부의 점 P 가 $\triangle BPC = \triangle APC + \triangle APB$ 인 관계를 만족시키면서 움직인다. 점 P 가 그리는 도형의 길이는?

① $\frac{\sqrt{10}}{2}$　② $\sqrt{2}$　③ 2　④ $\sqrt{10}$　⑤ $2\sqrt{2}$

해설

점 P 가 $\triangle$ABC 의 내부의 점이고
$\triangle BPC = \triangle APC + \triangle APB$ 이므로



$\therefore\ \triangle BPC = \frac{1}{2}\triangle ABC$

점 P 는 $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ 의 중점 M, N 을 잇는 선분 위에 있다.

그런데 M$\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$, N$\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$

점 P 의 자취 $\overline{MN} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

21. 두 정점 $\mathrm{A}(-3,\ 0)$, $\mathrm{B}(3,\ 0)$ 과 원 $x^2+y^2-8y-9=0$ 이 있다. 이 원 위에 있는 한 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$ 를 잡아 $\triangle\mathrm{PAB}$ 를 만들 때, $\triangle\mathrm{PAB}$ 의 무게중심의 자취는 원이다. 이 자취의 길이를 구하면?

① $\frac{5}{3}\pi$　　② $\frac{5}{2}\pi$　　③ $\frac{4}{3}\pi$　　④ $\frac{10}{3}\pi$　　⑤ $\frac{9}{4}\pi$

해설

점 $\mathrm{P}(a,\ b)$ 는 원 $x^2+y^2-8y-9=0$ 위에 있으므로

$a^2+b^2-8b-9=0\cdots$ ㉠

$\triangle\mathrm{PAB}$ 의 무게중심의 좌표를 $(x,\ y)$ 라고 하면,

$x=\frac{a}{3},\ y=\frac{b}{3}$

$\therefore\ a=3x,\ b=3y$

이것을 ㉠에 대입하면,

$(3x)^2+(3y)^2-8(3y)-9=0$

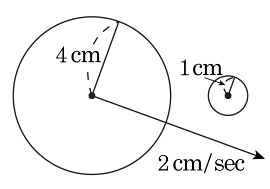
$\therefore\ x^2+y^2-\frac{8}{3}y=1$

$x^2+\left(y-\frac{4}{3}\right)^2=\left(\frac{5}{3}\right)^2$

$\therefore\ r=\frac{5}{3}$

$\therefore\ l=2\pi r=2\times\frac{5}{3}\pi=\frac{10}{3}\pi$

22. 반지름의 길이가 1 cm 인 원에 반지름의 길이가 4 cm 인 원이 초속 2 cm 의 속도로 그림과 같이 직선 방향으로 진행한다고 한다. 두 원의 중심거리의 최단거리는 2 cm 라 할 때, 반지름의 길이가 1 cm 인 원 전체가 몇 초동안 반지름의 길이 4 cm 인 원 안에 완전히 품기게 되는가?



① 1 초 ② $\sqrt{2}$ 초 ③ $\sqrt{3}$ 초

④ 2 초 ⑤ $\sqrt{5}$ 초

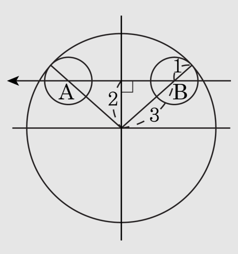
해설

작은 원이 큰 원 안에 포함되기 위해서는 내접해야 하므로,

$\overline{AB} = 2 \times \sqrt{9-4} = 2\sqrt{5}$ 이고,

2 cm/s 로 움직이므로,

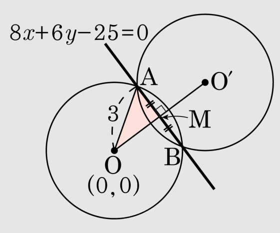
$\frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$(초) 가 된다.



23. 두 원 $x^2+y^2=9, x^2+y^2-8x-6y+16=0$의 두 교점 사이의 거리를 구하면?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{10}$ ④ $\sqrt{11}$ ⑤ $\sqrt{13}$

해설



두 원의 교점을 이은 선분이 공통현이다.
두 원의 공통현의 방정식은
$(x^2+y^2-9) - (x^2+y^2-8x-6y+16)=0$
$\therefore 8x+6y-25=0$
이때, 다음 그림과 같이 이 두 원의 교점을 A, B라 하고 공통현 AB의 중점을 M이라고 하면
$\overline{OO'}$은 $\overline{AB}$를 수직이등분하므로 $\overline{AB}=2\overline{AM}=2\sqrt{3^2-\overline{OM}^2}$ ……㉠
그런데 $\overline{OM}$은 원점 O에서 직선 $8x+6y-25=0$까지의 거리이므로
$\overline{OM}=\dfrac{|-25|}{\sqrt{8^2+6^2}}=\dfrac{5}{2}$ ……㉡
㉡을 ㉠에 대입하면 구하는 두 교점 사이의 거리는
$\overline{AB}=2\overline{AM}=2\sqrt{3^2-\left(\dfrac{5}{2}\right)^2}=2\cdot\dfrac{\sqrt{11}}{2}=\sqrt{11}$

24. 두 원 $(x+1)^2+y^2=1$, $x^2+y^2-6x-6y+2=0$ 의 공통접선의 개수는?

① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$(x+1)^2+y^2=1$ 에서 이 원의 중심을 C_1 이라 하면 점 C_1 의 좌표는 $(-1,\ 0)$ 이고
반지름의 길이는 1 이다.
$x^2+y^2-6x-6y+2=0$ 에서
$(x-3)^2+(y-3)^2=16$ 이므로
이 원의 중심을 C_2 이라 하면
점 C_2 의 좌표는 $(3,\ 3)$ 이고
반지름의 길이는 4 이다.
$\overline{C_1C_2}=5$ 이고
두 원의 반지름의 길이는 1, 4 이므로
두 원은 서로 외접하게 된다.
따라서 공통접선은 3 개이다.

25. 점 P $(3, 0)$ 에서 원 $(x+2)^2+(y+1)^2=10$ 에 그은 접선의 길이는?

① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{10}$ ③ 4 ④ $2\sqrt{5}$ ⑤ 5

해설

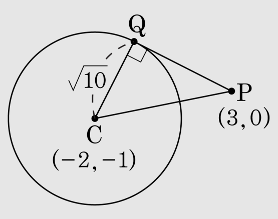
원의 중심을 C 라 하면 $C(-2, -1)$ 이므로

$\overline{CP} = \sqrt{(3+2)^2+(0+1)^2} = \sqrt{26}$

$\overline{CQ} = \sqrt{10}$

따라서, $\triangle CPQ$ 는 $\overline{CP}$ 가 빗변인 직각삼각형이므로

$\overline{PQ} = \sqrt{\overline{CP}^2 - \overline{CQ}^2} = \sqrt{26-10} = 4$



26. 두 원 $x^2+y^2=1$, $x^2+(y-3)^2=4$ 의 공통접선의 방정식이 $y=mx+n$ 일 때, m^2+n^2 의 값은?(단, $m \neq 0$)

① 15　　② 16　　③ 17　　④ 18　　⑤ 19

해설

원 $x^2+y^2=1$ 의 중심 $(0,\ 0)$ 에서
직선 $y=mx+n$,
즉 $mx-y+n=0$ 에 이르는 거리가 1 이므로

$$\frac{|n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$$

$\therefore\ m^2=n^2-1\ \cdots$ ㉠
원 $x^2+(y-3)^2=4$ 의 중심 $(0,\ 3)$ 에서
직선 $mx-y+n=0$ 에 이르는 거리가 2 이므로

$$\frac{|-3+n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$$

$\therefore\ n^2-6n+9=4m^2+4\ \cdots$ ㉡
㉠ 을 ㉡ 에 대입하면,
$n^2-6n+9=4(n^2-1)+4,\ 3n^2+6n-9=0$
$n^2+2n-3=0,\ (n+3)(n-1)=0$
$\therefore\ n=-3$ 또는 $n=1$
이 때, $n=1$ 이면 $m=0$ 이 되므로 $n=-3$
$n=-3$ 을 ㉠ 에 대입하면 $m^2=8$
$\therefore\ m^2+n^2=8+9=17$

27. 원 $x^2 + (y-5)^2 = 4$가 원 $(x-5)^2 + y^2 = 9$의 외부에 있을 때, 두 원 사이의 최단거리는?

① 2　　② 3　　③ 5

④ $5\sqrt{2} - 5$　　⑤ $5\sqrt{2} - 13$

해설

두 원의 중심의 좌표가 각각 $(0, 5)$, $(5, 0)$이므로 중심거리는 $\sqrt{5^2 + (-5)^2} = 5\sqrt{2}$

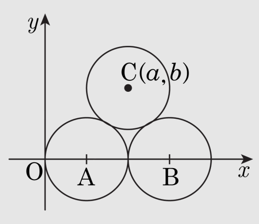
두 원의 반지름은 각각 2, 3이므로 두 원의 최단거리는 $5\sqrt{2} - 2 - 3 = 5\sqrt{2} - 5$

28. 두 원 $C_1 : (x-1)^2+y^2=1$, $C_2 : (x-3)^2+y^2=1$ 에 동시에 외접하는 제1 사분면 위의 원 C_3 가 있다. 세 원의 중심을 이은 삼각형이 정삼각형이 될 때, 원점에서 원 C_3 의 중심까지의 거리를 d , 원 C_3 의 반지름의 길이를 r 라 하자. 이때, $d \times r$ 의 값은?

① $\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{6}$ ④ $\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

해설

세 원의 중점을 각각 A, B, C 라 하면,
두 원의 중심의 좌표가 A(1, 0), B(3, 0)
이다.



$\overline{AC}=2$ 이고 삼각형 ABC 가
정삼각형이므로 C$(a,\ b)$ 라 하면
$a=1+\overline{AC}\cos 60°$, $b=\overline{AC}\sin 60°$
$\therefore$ C$(2,\ \sqrt{3})$
따라서 원 C_3 는 중심이 $(2,\ \sqrt{3})$ 이고
반지름의 길이가 1 인 원이므로, 원점에서
원의 중심 C$(2,\ \sqrt{3})$ 까지의 거리는

$d=\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{7}$

$\therefore d\times r=\sqrt{7}$