

1. 직선 $x + y = 2$ 위에 있고, 두 점 $A(0, 6)$, $B(2, 2)$ 에서 같은 거리에 있는 점을 P 라 할 때, \overline{AP} 의 길이를 구하면?

① 2

② $\sqrt{5}$

③ $2\sqrt{2}$

④ $\sqrt{10}$

⑤ 5

해설

$x + y = 2$ 위에 있는 점 P 는
 $(\alpha, -\alpha + 2)$ 로 나타낼 수 있다.

$$\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2 \text{ 이므로}$$

$$\alpha^2 + (-\alpha - 4)^2 = (\alpha - 2)^2 + (-\alpha)^2$$

$$\alpha = -1$$

$$P(-1, 3)$$

$$\therefore \overline{AP} = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$$

2. 두 점 $A(1, 9)$, $B(2, 3)$ 과 직선 $x + y + 1 = 0$ 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은?

① 5

② $8\sqrt{2}$

③ 12

④ $9\sqrt{2}$

⑤ 13

해설

점 B 의 직선 $x + y + 1 = 0$ 에 대한 대칭점을 $B'(a, b)$ 라고 하면 $\overline{BB'}$ 의 중점은 직선 $x + y + 1 = 0$ 위의 점이므로

$$\frac{a+2}{2} + \frac{b+3}{2} + 1 = 0$$

$$\therefore a + b + 7 = 0 \cdots \text{㉠}$$

또, $\overline{BB'} \perp$ (직선 $x + y + 1 = 0$)이므로

$$\frac{b-3}{a-2} = 1 \text{에서 } b = a + 1 \cdots \text{㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡에서 } a = -4, b = -3$$

$$\therefore B'(-4, -3)$$

$$\therefore \overline{AB'} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$$

$$\overline{AP} + \overline{PB} = \overline{AP} + \overline{PB'} \geq \overline{AB'} = 13$$

3. 정점 $A(3,1)$ 과 직선 $y = x$ 위를 움직이는 동점 P , x 축 위를 움직이는 동점 Q 에 대하여 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QA}$ 의 최소거리를 구하면?

① $2\sqrt{3}$

② 4

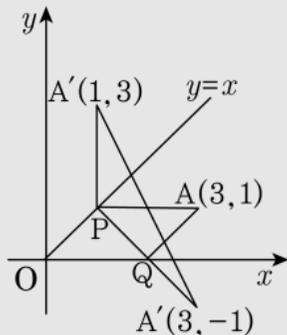
③ $2\sqrt{5}$

④ $3\sqrt{5}$

⑤ $4\sqrt{3}$

해설

점 A 의 $y = x$ 에 대한 대칭점을 A' ,



점 A

의 x 축에 대한 A'' 라 하면,

$$\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QA} = \overline{A'P} + \overline{PQ} + \overline{QA''} \text{ ge } \overline{A'A''}$$

$$\overline{A'A''} = \sqrt{(3-1)^2 + (-1-3)^2} = 2\sqrt{5}$$

따라서 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QA}$ 의 최솟값은 $2\sqrt{5}$ 이다.

4. 정점 A(4, 2)과 직선 $y = x$ 위를 움직이는 동점 P, x 축 위를 움직이는 동점 Q에 대하여 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QA}$ 가 최소가 되는 거리는?

① $3\sqrt{2}$

② $2\sqrt{5}$

③ $4\sqrt{3}$

④ $3\sqrt{7}$

⑤ $2\sqrt{10}$

해설

최솟값은 점 A를 $y = x$ 에 대해 대칭시킨 점과 A를 x 축에 대칭시킨 점 사이의 거리와 같다.

$y = x$ 에 대한 대칭점은 $A'(2, 4)$

x 축에 대한 대칭점은 $A''(4, -2)$ 이므로

$$\begin{aligned}\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QA} &\geq \overline{A'A''} \\ &= \sqrt{(2-4)^2 + (4+2)^2} = 2\sqrt{10}\end{aligned}$$

5. $(0,0)$, $(0,4)$, $(4,4)$ 와 $(4,0)$ 을 꼭짓점으로 하는 정사각형을 생각하자. $(0,1)$ 에서 출발하여 윗변과 밑변으로 반사시켜 $(4,2)$ 에 도달하는 꺾인 직선을 그리려면 윗변의 어느 점을 지나야 하는가? (단, 입사각과 반사각은 같다)

① $(1, 4)$

② $\left(\frac{10}{7}, 4\right)$

③ $\left(\frac{5}{3}, 4\right)$

④ $\left(\frac{4}{3}, 4\right)$

⑤ $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$

해설

대칭성을 이용하여 $(0,1)$ 과 $(4,10)$ 을 연결하는 직선과 $y=4$ 와의 교점을 계산하면 된다.

$$\begin{cases} y = \frac{9}{4}x + 1 \\ y = 4 \end{cases} \quad \therefore x = \frac{4}{3}$$

따라서, $\left(\frac{4}{3}, 4\right)$ 를 지난다.

6. 두 점 $A(-2, 6)$, $B(2, -4)$ 를 잇는 선분을 $t:1-t$ 로 내분하는 점이 제 4사분면에 있도록 t 의 값의 범위를 정하면?

- ① $t > \frac{1}{2}$ ② $t > \frac{3}{5}$ ③ $t > \frac{3}{4}$ ④ $t < \frac{2}{5}$ ⑤ $t < \frac{1}{6}$

해설

$$\text{내분점 } (2t + (1-t)(-2), -4t + (1-t)6) = (4t-2, -10t+6)$$

$$\therefore 4t-2 > 0 \text{ 이고 } -10t+6 < 0$$

$$\therefore t > \frac{1}{2} \text{ 이고 } t > \frac{3}{5}$$

$$\therefore t > \frac{3}{5}$$

7. 평행사변형 ABCD에서 꼭짓점 A(-1, -2), B(6, 4), D(0, 2)이고, \overline{AB} 와 \overline{BC} 가 이웃하는 두 변일 때 나머지 한 꼭짓점 C의 좌표는?

① C(5, 0)

② C(0, 5)

③ C(7, 8)

④ C(8, 7)

⑤ C(7, 6)

해설

C(a, b) 라고 하면, 평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 \overline{AC} 의 중점과 \overline{BD} 의 중점은 같다.

$$\left(\frac{-1+a}{2}, \frac{-2+b}{2}\right) = \left(\frac{6+0}{2}, \frac{4+2}{2}\right)$$

$$-1+a=6, \quad -2+b=6$$

$$\therefore a=7, \quad b=8$$

$$\therefore C(7, 8)$$

8. 삼각형 ABC에서 꼭지점 A의 좌표가 (5, 4), 변 AB의 중점 M의 좌표가 (-1, 3), 무게중심의 좌표가 (1, 2)일 때 변 BC를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표는 (a, b)라 한다. 이 때, a + b의 값은?

① $\frac{1}{3}$

② $\frac{2}{3}$

③ 1

④ $\frac{4}{3}$

⑤ $\frac{5}{3}$

해설

B의 좌표를 (b_1, b_2) , C의 좌표를

(c_1, c_2) 라고 하면

\overline{AB} 의 중점의 좌표가

$$\left(\frac{b_1 + 5}{2}, \frac{b_2 + 4}{2}\right) \text{ 이므로}$$

$$\frac{b_1 + 5}{2} = -1, \frac{b_2 + 4}{2} = 3 \text{ 이다.}$$

따라서 $b_1 = -7, b_2 = 2$

즉 $B(-7, 2)$

\overline{CM} 을 2 : 1로 내분하는 점이

$\triangle ABC$ 의 무게중심이므로

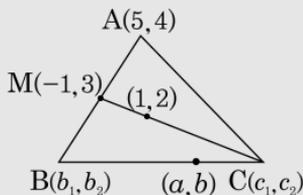
$$\left(\frac{2 \times (-1) + 1 \times c_1}{2 + 1}, \frac{2 \times 3 + 1 \times c_2}{2 + 1}\right) = (1, 2)$$

$$\left(\frac{c_1 - 2}{3}, \frac{6 + c_2}{3}\right) = (1, 2) \text{ 에서 } c_1 = 5, c_2 = 0$$

\overline{BC} 의 2 : 1로 내분점을 계산하면,

$$\left(\frac{2 \times 5 + 1 \times (-7)}{2 + 1}, \frac{2 \times 0 + 1 \times 2}{2 + 1}\right) = \left(1, \frac{2}{3}\right)$$

따라서 $a + b = \frac{5}{3}$ 가 된다.



9. 세 점 $O(0,0)$, $A(2,4)$, $B(6,2)$ 와 선분 AB 위의 점 $P(a,b)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 넓이가 삼각형 OAP 의 넓이의 2배일 때, $a+b$ 의 값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

다음 그림에서 $\triangle OAB$ 와 $\triangle OAP$ 의
높이가 같으므로

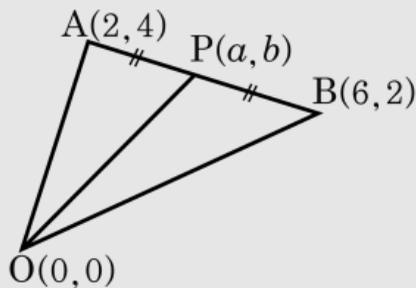
$\triangle OAB = 2\triangle OAP$ 이려면

P 는 선분 AB 의 중점이어야 한다.

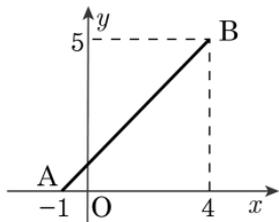
이 때, $P\left(\frac{2+6}{2}, \frac{4+2}{2}\right)$

즉 $P(4,3)$ 이므로 $a=4, b=3$

$\therefore a+b=7$



10. 두 점 $A(-1, 0)$, $B(4, 5)$ 에 대하여 두 점 A , B 로부터의 거리의 비가 $3 : 2$ 점 P 의 자취의 방정식은?



- ① $(x-5)^2 + (y-6)^2 = 50$ ② $(x-6)^2 + (y-7)^2 = 60$
 ③ $(x-7)^2 + (y-6)^2 = 70$ ④ $(x-7)^2 + (y-8)^2 = 80$
 ⑤ $(x-8)^2 + (y-9)^2 = 72$

해설

점 P 를 (x, y) 라 두
면

$$\overline{AP} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$$

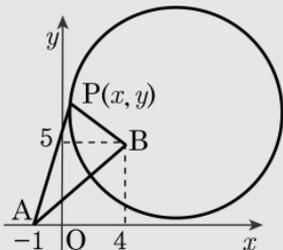
$$\overline{BP} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-5)^2}$$

$$\overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 2 \text{ 이 므}$$

로

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} : \sqrt{(x-4)^2 + (y-5)^2} = 3 : 2$$

$$\text{정리하면 } (x-8)^2 + (y-9)^2 = 72$$



11. 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC에서 변 BC 위에 한 점 P가 있다.
 $\overline{AP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 최솟값은?

① $\frac{6}{5}$

② $\frac{5}{4}$

③ $\frac{4}{3}$

④ $\frac{7}{2}$

⑤ $\frac{7}{4}$

해설

\overline{BC} 를 x 축, \overline{BC} 의 수직이등분선을 y 축으로 잡고
 $A(0, \sqrt{3})$, $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$ 이라고 하자.

점 P는 \overline{BC} 위의 점이므로
좌표를 $P(x, 0)$ 이라고 하면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2 + \overline{CP}^2 &= (x^2 + 3) + (x - 1)^2 \\ &= 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{2}\end{aligned}$$

따라서 $x = \frac{1}{2}$ 일 때, $\overline{AP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 최솟값은 $\frac{7}{2}$ 이다.

12. 두 점 $A(-2, -3)$, $B(2, 1)$ 을 지나는 직선에 평행하고, 점 $(2, 1)$ 을 지나는 직선의 방정식은?

① $y = x + 1$

② $y = x - 1$

③ $y = -x + 1$

④ $y = -x - 1$

⑤ $y = x$

해설

기울기가 m 이고, 점 (x_1, y_1) 을 지나는 직선의 방정식은 $y - y_1 = m(x - x_1)$

두 점 $A(-2, -3)$, $B(2, 1)$ 을 지나는 직선의 기울기가

$$\frac{1 - (-3)}{2 - (-2)} = 1 \text{ 이므로,}$$

구하는 직선의 방정식은

$$y - 1 = 1 \cdot (x - 2)$$

$$\therefore y = x - 1$$

13. 두 이차함수 $y = -x^2 + 3$ 과 $y = x^2 - 4x + 3$ 의 그래프의 꼭지점을 각각 A, B라 할 때, 직선 AB의 x 절편은?

① $\frac{3}{2}$

② $\frac{4}{3}$

③ $\frac{2}{3}$

④ $\frac{1}{2}$

⑤ $\frac{1}{3}$

해설

$y = -x^2 + 3$ 의 꼭지점은 A(0, 3)이고,

$y = x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1$ 이므로 꼭지점은 B(2, -1)이다.

이 때, 두 점 A(0, 3), B(2, -1)을 지나는

직선의 방정식은 $y = -2x + 3$

따라서, x 절편은 $0 = -2x + 3$ 에서

$x = \frac{3}{2}$ 이므로 $\frac{3}{2}$ 이다.

14. x, y 에 관한 이차방정식 $2x^2 - 3xy + ay^2 - 2x + 9y + b = 0$ 이 직교하는 두 직선의 곱을 나타낼 때, ab 를 구하면?

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

준식이 나타내는 두 직선을

$$px + qy + r = 0 \cdots \textcircled{㉠},$$

$$p'x + q'y + r' = 0 \cdots \textcircled{㉡} \text{이라 하자.}$$

㉠과 ㉡은 서로 직교하므로

$$pp' + qq' = 0 \text{이다.}$$

$$(\text{준식}) = (px + qy + r)(p'x + q'y + r') = 0 \text{의}$$

전개식에서 x^2 의 계수와 y^2 의 계수의 합은

$$pp' + qq' \text{이므로 } a + 2 = pp' + qq' = 0$$

$$\therefore a = -2$$

$a = -2$ 를 준식에 대입하여 정리하면

(준식)

$$= 2x^2 - (3y + 2)x + (-2y^2 + 9y + b) = 0 \cdots \textcircled{㉢}$$

㉢이 두 직선의 곱을 나타내므로

$$\textcircled{㉢} \text{의 판별식 } D_1 = (3y + 2)^2 - 8(-2y^2 + 9y + b)$$

$$= 25y^2 - 60y + (4 - 8b) \cdots \textcircled{㉣} \text{이 완전제곱식이다.}$$

따라서 ㉣의 판별식 $\frac{D_2}{4}$ 는 0이다.

$$\frac{D_2}{4} = 30^2 - 25(4 - 8b) = 0$$

$$\therefore b = -4$$

$$\therefore ab = (-2) \cdot (-4) = 8$$

15. 직선 $y = mx + n (m \neq 0)$ 은 직선 $ax + by + c = 0$ 에 평행하고, 직선 $px + qy + r = 0$ 에 수직이다. 다음 중 옳은 것을 모두 구하면?

㉠ $a + bm = 0$

㉡ $p + qm = 0$

㉢ $ap + bq = 0$

① ㉠

② ㉡

③ ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$$y = mx + n \cdots \textcircled{1}$$

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \cdots \textcircled{2}$$

$$y = -\frac{p}{q}x - \frac{r}{q} \cdots \textcircled{3}$$

$$\text{I) } \textcircled{1} // \textcircled{2} : m = -\frac{a}{b}$$

$$\therefore a + bm = 0$$

$$\text{II) } \textcircled{1} \perp \textcircled{3} : m \left(-\frac{p}{q} \right) = -1$$

$$\therefore mp - q = 0$$

16. 다음 세 직선이 삼각형을 만들 수 있기 위한 k 의 조건은?

$$3x + y + 2 = 0, \quad x + 3y + k = 0, \quad 2x - y + 3 = 0$$

① $k \neq -2$

② $k \neq -3$

③ $k \neq -4$

④ $k \neq -7$

⑤ $k \neq -11$

해설

$$3x + y + 2 = 0 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$x + 3y + k = 0 \cdots \textcircled{㉡} \text{ 일 때,}$$

$$2x - y + 3 = 0 \cdots \textcircled{㉢}$$

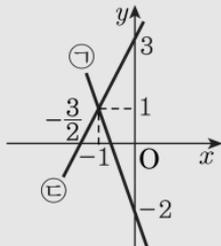
다음 그림과 같이

세 직선이 삼각형을 만들려면 평행한 직선이 없어야 하고 세 직선이 한 점에서 만나지 않아야 한다.

㉠, ㉡, ㉢ 중에 어느 두 직선도 평행하지 않으므로 세 직선이 한 점에서 만나지 않을 조건을 구한다.

㉠과 ㉢을 연립하여 교점의 좌표를 구하면 $(-1, 1)$ 이다.

이 점을 ㉡에 대입했을 때 등식이 성립하지 않아야 하므로 $-1 + 3 + k \neq 0, \quad \therefore k \neq -2$



17. 두 점 A(-1, 4), B(3, 2) 을 이은 선분 AB 의 수직이등분선 위에 있는 점을 고르면?

① (-2, 5)

② (1, 2)

③ (4, 9)

④ (5, -7)

⑤ (7, -15)

해설

\overline{AB} 의 방정식을 구해보면,

$$y = \frac{2-4}{3-(-1)}(x-3) + 2 \quad \therefore y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

\therefore 수직이등분선의 기울기는 2 이고 \overline{AB} 의 중점 을 지난다.

$$\Rightarrow y = 2\left(x - \frac{-1+3}{2}\right) + \frac{4+2}{2} = 2x + 1$$

\Rightarrow 점 (4, 9) 를 지난다.

18. 직선 $y = \frac{4}{3}x$ 와 x 축이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식을 구할 때 기울기는? (단, 기울기는 양수이다.)

① $\frac{1}{4}$

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{2}{3}$

⑤ $\frac{3}{4}$

해설

각의 이등분선은 각의 두 변에서 같은 거리에 있는 점들이다. 각의 이등분선 위의 임의의 점 $P(x, y)$ 에서 각의 두 변인 x 축과 직선

$y = \frac{4}{3}x$ 에 이르는 거리는 같다. $|y| = \frac{|4x - 3y|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}, y = \pm \frac{4x - 3y}{5}$

기울기가 양수이므로 $y = \frac{1}{2}x$, 기울기는 $\frac{1}{2}$

19. 점 A(6, 2)와 직선 $x + 2y - 2 = 0$ 위를 움직이는 점 P가 있다. \overline{AP} 를 1 : 3으로 내분하는 점의 자취는?

- ① $x - 2y - 8 = 0$ ② $x + 2y - 8 = 0$ ③ $x - 2y + 8 = 0$
④ $x + 2y + 8 = 0$ ⑤ $x - 2y = 0$

해설

P (a, b)라 하면 $a + 2b - 2 = 0 \dots \textcircled{7}$

\overline{AP} 의 1 : 3 내분점을 Q (x, y)라 하면

$$Q(x, y) = \left(\frac{a + 18}{1 + 3}, \frac{b + 6}{1 + 3} \right)$$

$$x = \frac{a + 18}{1 + 3}, y = \frac{b + 6}{1 + 3}$$

$$a = 4x - 18, b = 4y - 6$$

⑦에 대입하면,

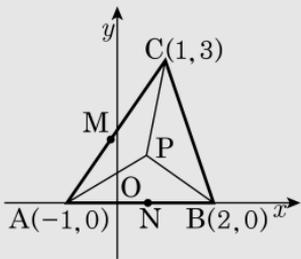
$$4x - 18 + 2(4y - 6) - 2 = 0 \Rightarrow x + 2y - 8 = 0$$

20. 좌표평면 위에 세 점 $A(-1,0)$, $B(2,0)$, $C(1,3)$ 이 있다. $\triangle ABC$ 의 내부의 점 P 가 $\triangle BPC = \triangle APC + \triangle APB$ 인 관계를 만족시키면서 움직인다. 점 P 가 그리는 도형의 길이는?

- ① $\frac{\sqrt{10}}{2}$ ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $\sqrt{10}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

해설

점 P 가 $\triangle ABC$ 의 내부의 점이고
 $\triangle BPC = \triangle APC + \triangle APB$ 이므로



$$\therefore \triangle BPC = \frac{1}{2}\triangle ABC$$

점 P 는 \overline{AC} , \overline{AB} 의 중점 M , N 을 잇는 선분 위에 있다.

그런데 $M\left(0, \frac{3}{2}\right)$, $N\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

점 P 의 자취 $\overline{MN} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

21. 두 정점 $A(-3, 0)$, $B(3, 0)$ 과 원 $x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0$ 이 있다. 이 원 위에 있는 한 점 $P(a, b)$ 를 잡아 $\triangle PAB$ 를 만들 때, $\triangle PAB$ 의 무게중심의 자취는 원이다. 이 자취의 길이를 구하면?

① $\frac{5}{3}\pi$

② $\frac{5}{2}\pi$

③ $\frac{4}{3}\pi$

④ $\frac{10}{3}\pi$

⑤ $\frac{9}{4}\pi$

해설

점 $P(a, b)$ 는 원 $x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0$ 위에 있으므로
 $a^2 + b^2 - 8b - 9 = 0 \cdots \textcircled{1}$

$\triangle PAB$ 의 무게중심의 좌표를 (x, y) 라고 하면,

$$x = \frac{a}{3}, y = \frac{b}{3}$$

$$\therefore a = 3x, b = 3y$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면,

$$(3x)^2 + (3y)^2 - 8(3y) - 9 = 0$$

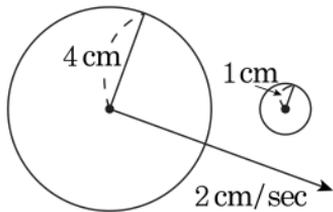
$$\therefore x^2 + y^2 - \frac{8}{3}y = 1$$

$$x^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2$$

$$\therefore r = \frac{5}{3}$$

$$\therefore l = 2\pi r = 2 \times \frac{5}{3}\pi = \frac{10}{3}\pi$$

22. 반지름의 길이가 1cm 인 원에 반지름의 길이가 4cm 인 원이 초속 2cm 의 속도로 그림과 같이 직선 방향으로 진행한다고 한다. 두 원의 중심거리의 최단거리는 2cm 라 할 때, 반지름의 길이가 1cm 인 원 전체가 몇 초동안 반지름의 길이가 4cm 인 원 안에 완전히 품기게 되는가?



- ① 1 초 ② $\sqrt{2}$ 초 ③ $\sqrt{3}$ 초
 ④ 2 초 ⑤ $\sqrt{5}$ 초

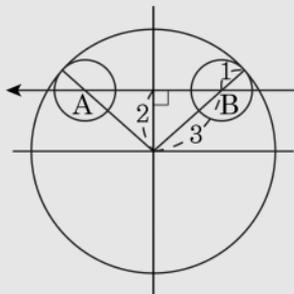
해설

작은 원이 큰 원 안에 포함되기 위해서는
 내접해야 하므로,

$$\overline{AB} = 2 \times \sqrt{9 - 4} = 2\sqrt{5} \text{ 이고,}$$

2 cm/s로 움직이므로,

$$\frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}(\text{초}) \text{ 가 된다.}$$



23. 두 원 $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$ 의 두 교점 사이의 거리를 구하면?

① $\sqrt{2}$

② $\sqrt{5}$

③ $\sqrt{10}$

④ $\sqrt{11}$

⑤ $\sqrt{13}$

해설

두 원의 교점을 이은 선분이 공통현이다.

두 원의 공통현의 방정식은

$$(x^2 + y^2 - 9)$$

$$(x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16) = 0$$

$$\therefore 8x + 6y - 25 = 0$$

이때, 다음 그림과 같이 이 두 원의 교점을 A, B라 하고 공통현 AB의 중점을 M이라고 하면

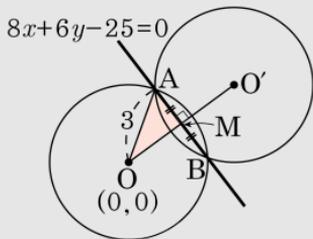
$$\overline{OO'} \text{ 은 } \overline{AB} \text{ 를 수직이등분하므로 } \overline{AB} = 2\overline{AM} = 2\sqrt{3^2 - \overline{OM}^2} \dots \textcircled{7}$$

그런데 \overline{OM} 은 원점 O에서 직선 $8x + 6y - 25 = 0$ 까지의 거리이므로

$$\overline{OM} = \frac{|-25|}{\sqrt{8^2 + 6^2}} = \frac{5}{2} \dots \textcircled{8}$$

⑧을 ⑦에 대입하면 구하는 두 교점 사이의 거리는

$$\overline{AB} = 2\overline{AM} = 2\sqrt{3^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{11}}{2} = \sqrt{11}$$



24. 두 원 $(x+1)^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 = 0$ 의 공통접선의 개수는?

① 0개

② 1개

③ 2개

④ 3개

⑤ 4개

해설

$(x+1)^2 + y^2 = 1$ 에서 이 원의 중심을 C_1 이라 하면 점 C_1 의 좌표는 $(-1, 0)$ 이고 반지름의 길이는 1 이다.

$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 = 0$ 에서 $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 16$ 이므로 이 원의 중심을 C_2 이라 하면 점 C_2 의 좌표는 $(3, 3)$ 이고 반지름의 길이는 4 이다.

$\overline{C_1C_2} = 5$ 이고

두 원의 반지름의 길이는 1, 4 이므로

두 원은 서로 외접하게 된다.

따라서 공통접선은 3 개이다.

25. 점 P(3,0)에서 원 $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 10$ 에 그은 접선의 길이는?

① $\sqrt{5}$

② $\sqrt{10}$

③ 4

④ $2\sqrt{5}$

⑤ 5

해설

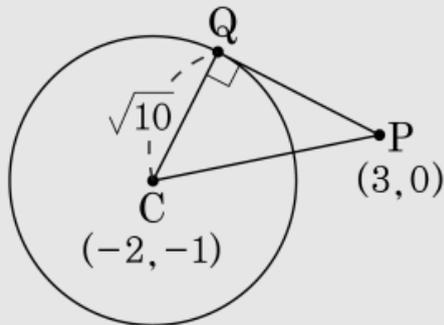
원의 중심을 C라 하면 C(-2, -1)이므로

$$\overline{CP} = \sqrt{(3+2)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{26}$$

$$\overline{CQ} = \sqrt{10}$$

따라서, $\triangle CPQ$ 는 \overline{CP} 가 빗변인 직각삼각형이므로

$$\overline{PQ} = \sqrt{\overline{CP}^2 - \overline{CQ}^2} = \sqrt{26 - 10} = 4$$



26. 두 원 $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + (y-3)^2 = 4$ 의 공통접선의 방정식이 $y = mx + n$ 일 때, $m^2 + n^2$ 의 값은?(단, $m \neq 0$)

① 15

② 16

③ 17

④ 18

⑤ 19

해설

원 $x^2 + y^2 = 1$ 의 중심 $(0, 0)$ 에서

직선 $y = mx + n$,

즉 $mx - y + n = 0$ 에 이르는 거리가 1 이므로

$$\frac{|n|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 1$$

$$\therefore m^2 = n^2 - 1 \dots \textcircled{㉠}$$

원 $x^2 + (y-3)^2 = 4$ 의 중심 $(0, 3)$ 에서

직선 $mx - y + n = 0$ 에 이르는 거리가 2 이므로

$$\frac{|-3 + n|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 2$$

$$\therefore n^2 - 6n + 9 = 4m^2 + 4 \dots \textcircled{㉡}$$

㉠ 을 ㉡ 에 대입하면,

$$n^2 - 6n + 9 = 4(n^2 - 1) + 4, 3n^2 + 6n - 9 = 0$$

$$n^2 + 2n - 3 = 0, (n + 3)(n - 1) = 0$$

$$\therefore n = -3 \text{ 또는 } n = 1$$

이 때, $n = 1$ 이면 $m = 0$ 이 되므로 $n = -3$

$$n = -3 \text{ 을 } \textcircled{㉠} \text{ 에 대입하면 } m^2 = 8$$

$$\therefore m^2 + n^2 = 8 + 9 = 17$$

27. 원 $x^2 + (y - 5)^2 = 4$ 가 원 $(x - 5)^2 + y^2 = 9$ 의 외부에 있을 때, 두 원 사이의 최단거리는?

① 2

② 3

③ 5

④ $5\sqrt{2} - 5$

⑤ $5\sqrt{2} - 13$

해설

두 원의 중심의 좌표가 각각 $(0, 5)$, $(5, 0)$ 이므로 중심거리는

$$\sqrt{5^2 + (-5)^2} = 5\sqrt{2}$$

두 원의 반지름은 각각 2, 3이므로 두 원의 최단거리는 $5\sqrt{2} -$

$$2 - 3 = 5\sqrt{2} - 5$$

28. 두 원 $C_1 : (x-1)^2 + y^2 = 1$, $C_2 : (x-3)^2 + y^2 = 1$ 에 동시에 외접하는 제1 사분면 위의 원 C_3 가 있다. 세 원의 중심을 이은 삼각형이 정삼각형이 될 때, 원점에서 원 C_3 의 중심까지의 거리를 d , 원 C_3 의 반지름의 길이를 r 라 하자. 이때, $d \times r$ 의 값은?

① $\sqrt{3}$

② $2\sqrt{3}$

③ $\sqrt{6}$

④ $\sqrt{7}$

⑤ $2\sqrt{2}$

해설

세 원의 중심을 각각 A, B, C 라 하면,
두 원의 중심의 좌표가 A(1, 0), B(3, 0)
이다.

$\overline{AC} = 2$ 이고 삼각형 ABC 가
정삼각형이므로 C(a, b) 라 하면

$$a = 1 + \overline{AC} \cos 60^\circ, b = \overline{AC} \sin 60^\circ$$

$$\therefore C(2, \sqrt{3})$$

따라서 원 C_3 는 중심이 $(2, \sqrt{3})$ 이고
반지름의 길이가 1 인 원이므로, 원점에서
원의 중심 C(2, $\sqrt{3}$) 까지의 거리는

$$d = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{7}$$

$$\therefore d \times r = \sqrt{7}$$

