

1. A(-2, 3), B(4, 3)에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 P의 좌표를 구하면?

① (-2, 0)

② (-1, 0)

③ (0, 0)

④ (1, 0)

⑤ (2, 0)

해설

점 P를 $(\alpha, 0)$ 이라 하자.

$\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$$(\alpha + 2)^2 + (0 - 3)^2 = (\alpha - 4)^2 + (0 - 3)^2$$

$$\therefore \alpha = 1$$

$$\therefore P = (1, 0)$$

2. 두 점 A(1, 9), B(2, 3)과 직선 $x + y + 1 = 0$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $AP + BP$ 의 최솟값은?

① 5 ② $8\sqrt{2}$ ③ 12 ④ $9\sqrt{2}$ ⑤ 13

해설

점 B의 직선 $x + y + 1 = 0$ 에 대한 대칭점을

$B'(a, b)$ 라고 하면 $\overline{BB'}$ 의 중점은

직선 $x + y + 1 = 0$ 위의 점이므로

$$\frac{a+2}{2} + \frac{b+3}{2} + 1 = 0$$

$$\therefore a + b + 7 = 0 \cdots \textcircled{A}$$

또, $\overline{BB'} \perp$ (직선 $x + y + 1 = 0$) 이므로

$$\frac{b-3}{a-2} = 1 \text{ 에서 } b = a + 1 \cdots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{B} \text{ 에서 } a = -4, b = -3$$

$$\therefore B'(-4, -3)$$

$$\therefore \overline{AB'} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$$

$$\overline{AP} + \overline{PB} = \overline{AP} + \overline{PB'} \geq \overline{AB'} = 13$$

3. 정점 A(4, 2)과 직선 $y = x$ 위를 움직이는 동점 P, x 축 위를 움직이는 동점 Q에 대하여 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QA}$ 가 최소가 되는 거리는?

- ① $3\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $4\sqrt{3}$ ④ $3\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{10}$

해설

최솟값은 점 A를 $y = x$ 에 대해 대칭시킨 점과 A를 x 축에 대칭시킨 점 사이의 거리와 같다.

$y = x$ 에 대한 대칭점은 A'(2, 4)

x 축에 대한 대칭점은 A''(4, -2)이므로

$$\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QA} \geq \overline{A'A''}$$

$$= \sqrt{(2-4)^2 + (4+2)^2} = 2\sqrt{10}$$

4. (0, 0), (0, 4), (4, 4)와 (4, 0)을 꼭짓점으로 하는 정사각형을 생각하자. (0, 1)에서 출발하여 윗변과 밑변으로 반사시켜 (4, 2)에 도달하는 꺾인 직선을 그리려면 윗변의 어느 점을 지나야 하는가? (단, 입사각과 반사각은 같다)
- ① (1, 4)

② $\left(\frac{10}{7}, 4\right)$

③ $\left(\frac{5}{3}, 4\right)$

④ $\left(\frac{4}{3}, 4\right)$

⑤ $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$

해설

대칭성을 이용하여 (0, 1)과 (4, 10)을 연결하는 직선과 $y = 4$ 와의 교점을 계산하면 된다.

$$\begin{cases} y = \frac{9}{4}x + 1 \\ y = 4 \end{cases} \quad \therefore x = \frac{4}{3}$$

따라서, $\left(\frac{4}{3}, 4\right)$ 를 지난다.

5. 두 점 A(-2, 6) , B(2, -4)를 잇는 선분을 $t : 1-t$ 로 내분하는 점이 제 4사분면에 있도록 t 의 값의 범위를 정하면?

- ① $t > \frac{1}{2}$ ② $t > \frac{3}{5}$ ③ $t > \frac{3}{4}$ ④ $t < \frac{2}{5}$ ⑤ $t < \frac{1}{6}$

해설

내분점 $(2t + (1-t)(-2), -4t + (1-t)6) = (4t-2, -10t+6)$

$\therefore 4t-2 > 0$ 이고 $-10t+6 < 0$

$\therefore t > \frac{1}{2}$ 이고 $t > \frac{3}{5}$

$\therefore t > \frac{3}{5}$

6. 세 점 A (1, 5), B (-4, -7), C (5, 2)가 좌표평면 위에 있다. $\triangle ABC$ 에서 $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라 할 때, 점 D의 좌표를 구하면?

- ① (0, 0) ② $\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ③ $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
 ④ $\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ⑤ $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$

해설

$$\overline{AB} = 13, \overline{AC} = 5$$

$$\text{따라서 } \overline{AB} : \overline{AC} = 13 : 5$$

D는 B, C를 13 : 5로 내분한 점

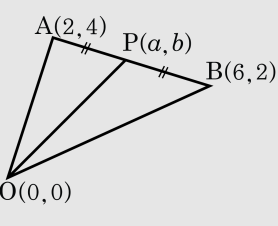
$$\therefore \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

7. 세 점 $O(0,0)$, $A(2,4)$, $B(6,2)$ 와 선분 AB 위의 점 $P(a,b)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 넓이가 삼각형 OAP 의 넓이의 2배일 때, $a+b$ 의 값은?

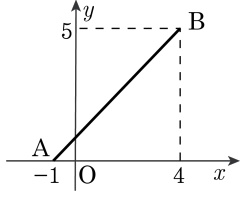
- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

다음 그림에서 $\triangle OAB$ 와 $\triangle OAP$ 의 높이가 같으므로
 $\triangle OAB = 2\triangle OAP$ 이려면
 P 는 선분 AB 의 중점이어야 한다.
 이 때, $P\left(\frac{2+6}{2}, \frac{4+2}{2}\right)$
 즉 $P(4,3)$ 이므로 $a=4, b=3$
 $\therefore a+b=7$



8. 두 점 A(-1, 0), B(4, 5)에 대하여 두 점 A, B로부터의 거리의 비가 3 : 2 점 P의 자취의 방정식은?



- ① $(x-5)^2 + (y-6)^2 = 50$ ② $(x-6)^2 + (y-7)^2 = 60$
 ③ $(x-7)^2 + (y-6)^2 = 70$ ④ $(x-7)^2 + (y-8)^2 = 80$
 ⑤ $(x-8)^2 + (y-9)^2 = 72$

해설

점 P를 (x, y) 라 두

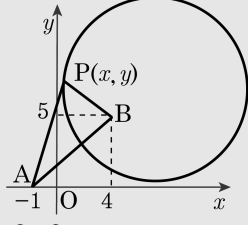
$$\overline{AP} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$$

$$\overline{BP} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-5)^2}$$

$\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} : \frac{\overline{BP}}{\overline{AP}} = 3 : 2$ 이므로

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} : \sqrt{(x-4)^2 + (y-5)^2} = 3 : 2$$

$$\text{정리하면 } (x-8)^2 + (y-9)^2 = 72$$

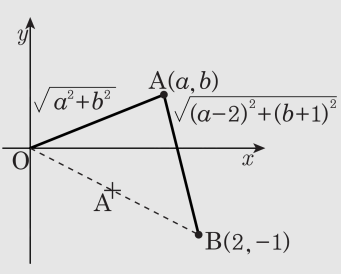


9. 좌표평면 위에 점 $O(0, 0)$, $A(a, b)$, $B(2, -1)$ 이 있다. 이때, $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{(a-2)^2 + (b+1)^2}$ 의 최솟값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ $\sqrt{5}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

해설

$\sqrt{a^2 + b^2}$ 은 $\overline{OA}$ 의 길이이고,
 $\sqrt{(a-2)^2 + (b+1)^2}$ 은 $\overline{AB}$ 의 길이이다.
 따라서, 준 식은 O, A, B 가 일
 직선상에 있을 때
 최소가 된다. (그림 참조)
 따라서, $\overline{OA} + \overline{AB}$ 의 최솟값은
 $\overline{OB} = \sqrt{5}$



10. 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC에서 변 BC 위에 한 점 P가 있다.
 $\overline{AP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 최솟값은?

- ① $\frac{6}{5}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

해설

$\overline{BC}$ 를 x 축, $\overline{BC}$ 의 수직이등분선을 y 축으로 잡고

$A(0, \sqrt{3})$, $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$ 이라고 하자.

점 P는 $\overline{BC}$ 위의 점이므로

좌표를 $P(x, 0)$ 이라고 하면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2 + \overline{CP}^2 &= (x^2 + 3) + (x - 1)^2 \\ &= 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{2}\end{aligned}$$

따라서 $x = \frac{1}{2}$ 일 때, $\overline{AP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 최솟값은 $\frac{7}{2}$ 이다.

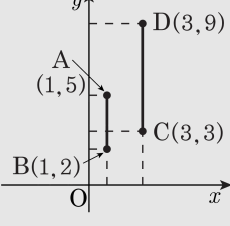
11. $f(x) = ax + b$ 이고 $2 \leq f(1) \leq 5$, $3 \leq f(3) \leq 9$ 라고 할 때, a 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

- ① 2
- ② $\frac{5}{2}$
- ③ 3
- ④ $\frac{7}{2}$
- ⑤ 4

해설

다음 그림과 같이 $f(x) = ax + b$ 가 선분 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ 를 동시에 지나야 하고

a 는 $y = f(x)$ 의 기울기이므로



a 의 최댓값은 $\overline{BD}$ 의 기울기이고

a 의 최솟값은 $\overline{AC}$ 의 기울기이다.

$$\overline{BD} \text{의 기울기} = \frac{9-2}{3-1} = \frac{7}{2}$$

$$\overline{AC} \text{의 기울기} = \frac{3-5}{3-1} = -1$$

$$\therefore \text{최댓값} + \text{최솟값} = \frac{7}{2} - 1 = \frac{5}{2}$$

(다른 풀이) $f(1) = a + b$, $f(3) = 3a + b$ 이므로

$$\therefore -1 \leq a \leq \frac{7}{2}$$

12. 「 m, n 을 서로소인 자연수라 할 때, 좌표평면위의 두 점 $P(m, 0)$, $Q(0, n)$ 을 잇는 선분 PQ 위에는 x 좌표, y 좌표가 모두 자연수인 점이 존재하지 않는다.」를 다음과 같이 증명하였다.

<증명>

두 점 P, Q 를 지나는 직선의 방정식은

(가)

 이다. 따라서 $nx + my = mn$ ($0 < x < m, 0 < y < n$) 을 만족하는 자연수 x, y 가 존재한다고 가정하면 $my = n(m - x)$ 좌변이 m 의 배수이므로 우변도 m 의 배수이고, m, n 이 서로소이므로

(나)

 는 m 의 배수가 된다.
이것은 $0 < m - x < \div(다)$

 에 모순이다.

위

의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

- ① $nx + my = 1, m - x, m$

② $nx + my = 1, m + x, 2m$

③ $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1, m - x, m$

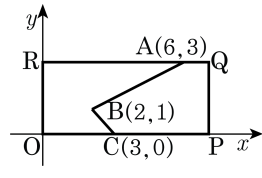
④ $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1, m + x, 2m$

⑤ $nx + my = 1, m + x, n$

해설

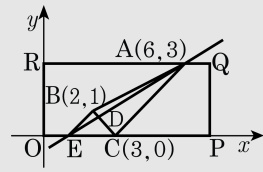
두 점 P, Q 를 지나는 직선의 x 절편, y 절편이 각각 m, n 이므로
 $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1 \Leftrightarrow nx + my = mn \cdots \cdots \textcircled{가}$
 $\textcircled{가}$ 을 만족하는 자연수 x, y 가 존재한다고 가정하면
 $my = n(m - x)$ 에서 m, n 이 서로소이므로 $m - x$ 는 m 의 배수가 된다.
이것은 $0 < m - x < m$ 에 모순이다.

13. $\overline{AB}$ 와 $\overline{BC}$ 는 직사각형 OPQR을 두 부분으로 나누는 경계선이다. 이 경계선을 두 부분의 넓이의 변화 없이 점 A를 지나는 직선으로 바꿀 때, 이 직선의 기울기는?



- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

해설



$\overline{AC}$ 와 평행한 보조선 $\overline{BE}$ 를 긋는다.

$\overline{AC} \parallel \overline{BE}$ 이므로 $\triangle ABC = \triangle AEC$,

$\triangle ABD = \triangle CDE$

따라서 $\overline{AE}$ 가 직선 경계임을 알 수 있다.

(직선 AC의 기울기) = (직선 BE의 기울기) = 1

점 B(2, 1)을 지나고 기울기 1인 직선의 방정식은

$y = x - 1$ 이고 E(1, 0)임을 알 수 있다.

$\therefore$ (직선 AE의 기울기) = $\frac{3}{5}$

14. 직선 $y = mx + n (m \neq 0)$ 은 직선 $ax + by + c = 0$ 에 평행하고, 직선 $px + qy + r = 0$ 에 수직이다. 다음 중 옳은 것을 모두 구하면?

- ☐ ㉠ $a + bm = 0$
- ☐ ㉡ $p + qm = 0$
- ☐ ㉢ $ap + bq = 0$

- ☒ ㉠ ☐ ㉡
- ☐ ㉡ ☐ ㉢
- ☐ ㉢ ☐ ㉡, ㉢
- ☐ ㉣ ☐ ㉠, ㉢
- ☐ ㉤ ☐ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$y = mx + n \cdots \textcircled{1}$

$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \cdots \textcircled{2}$

$y = -\frac{p}{q}x - \frac{r}{q} \cdots \textcircled{3}$

I) $\textcircled{1} // \textcircled{2} : m = -\frac{a}{b}$

$\therefore a + bm = 0$

II) $\textcircled{1} \perp \textcircled{3} : m \left(-\frac{p}{q} \right) = -1$

$\therefore mp - q = 0$

15. 세 직선 $l: y = -\frac{1}{2}x + 4$, $m: x + 2y - 2 = 0$, $n: 2x - y + 4 = 0$ 에 대한 다음 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ 두 직선 l 과 m 은 평행하다.
- ㉡ 두 직선 m 과 n 은 수직이다.
- ㉢ 두 직선 l 과 n 은 수직이다.

- ① ㉠
- ② ㉢
- ③ ㉠, ㉡
- ④ ㉡, ㉢
- ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$l: y = -\frac{1}{2}x + 4$
 $m: x + 2y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 1$
 $n: 2x - y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = 2x + 4$
㉠ 두 직선 l 과 m 은 기울기는 같고
y 절편은 다르므로 평행하다. (참)
㉡ 두 직선 m 과 n 의 기울기의 곱은
 $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 = -1$ 이므로 수직이다. (참)
㉢ 두 직선 l 과 n 의 기울기의 곱은
 $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 = -1$ 이므로 수직이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡, ㉢이다.

16. 두 점 $(2, 3)$, $(1, 2)$ 를 지나는 직선 위에 두 직선 $y - 3x - 4 = 0$, $y - ax - 2 = 0$ 의 교점이 있다고 할 때, a 의 값을 구하면?

① $\frac{2}{3}$

② $\frac{4}{3}$

③ $\frac{5}{3}$

④ $\frac{8}{3}$

⑤ $\frac{10}{3}$

해설

결국 세 직선의 교점이 일치하므로

두 점 $(2, 3)$, $(1, 2)$ 를 지나는

직선과 직선 $y - 3x - 4 = 0$ 의 교점이

직선 $y - ax - 2 = 0$ 위에 있다.

두 점 $(2, 3)$, $(1, 2)$ 를 지나는 직선은

$$y - 2 = \frac{3 - 2}{2 - 1}(x - 1)$$

$$\therefore y = x + 1$$

따라서 두 직선

$$y - 3x - 4 = 0 \text{과 } y = x + 1 \text{의 교점은 } \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

교점이 $y - ax - 2 = 0$ 위에 있으므로

$$-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}a - 2 = 0$$

$$\therefore a = \frac{5}{3}$$

17. 두 직선 $mx - y + m + 1 = 0$ 과 $y = -x + 2$ 가 제1사분면에서 만나도록 하는 상수 m 의 값의 범위는?

- ① $\frac{1}{3} < m < 1$ ② $-\frac{1}{3} < m < 1$
 ③ $-1 < m < 2$ ④ $m < -\frac{1}{3}, m > 1$
 ⑤ $-1 < m < -\frac{1}{3}$

해설

$$mx - y + m + 1 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$\Leftrightarrow m(x + 1) - (y - 1) = 0 \text{ 에서}$$

이 직선은 m 의 값에 관계없이

항상 점 $(-1, 1)$ 을 지난다.

다음 그림에서 $\textcircled{1}$ 이 직선 $y = -x + 2$

와

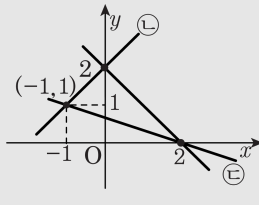
제1사분면에서 내려면 $\textcircled{1}$ 의 기울기 m

은

$$\textcircled{L} \text{의 기울기 } \frac{2-1}{0-(-1)} = 1 \text{ 보다 작고}$$

$$\textcircled{\ominus} \text{의 기울기 } \frac{0-1}{2-(-1)} = -\frac{1}{3} \text{ 보다 커야한다.}$$

$$\therefore -\frac{1}{3} < m < 1$$

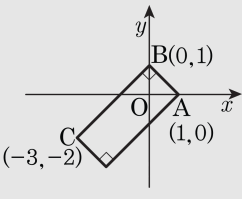


18. x, y 에 대한 방정식 $xy + x + y - 1 = 0$ 을 만족시키는 정수 x, y 를 좌표평면 위의 점 (x, y) 로 나타낼 때, 이 점들을 꼭지점으로 하는 사각형의 넓이는?

- ① 2
- ② 6
- ③ 8
- ④ $3\sqrt{2}$
- ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$xy + x + y - 1 = 0$ 에서 $(x + 1)(y + 1) = 2 \cdots \textcircled{1}$ 이고, x, y 는 정수이므로
 $\textcircled{1}$ 을 만족하는 정수 해를 순서쌍으로 나타내면 $(0, 1), (1, 0), (-2, -3), (-3, -2)$ 이다.
네 점을 꼭짓점으로 하는 사각형은 그림과 같다.



사각형 $ABCD$ 는 직사각형이고 넓이는
 $\overline{AB} \times \overline{BC} = \sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 6$

19. 직선 $y = \frac{4}{3}x$ 와 x 축이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식을 구할 때 기울기는? (단, 기울기는 양수이다.)

- ① $\frac{1}{4}$
- ② $\frac{1}{3}$
- ③ $\frac{1}{2}$
- ④ $\frac{2}{3}$
- ⑤ $\frac{3}{4}$

해설

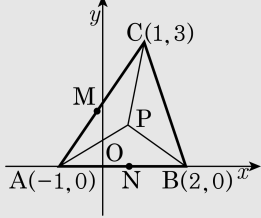
각의 이등분선은 각의 두 변에서 같은 거리에 있는 점들이다. 각의 이등분선 위의 임의의 점 $P(x, y)$ 에서 각의 두 변인 x 축과 직선 $y = \frac{4}{3}x$ 에 이르는 거리는 같다. $|y| = \frac{|4x - 3y|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}, y = \pm \frac{4x - 3y}{5}$
기울기가 양수이므로 $y = \frac{1}{2}x$, 기울기는 $\frac{1}{2}$

20. 좌표평면 위에 세 점 $A(-1, 0)$, $B(2, 0)$, $C(1, 3)$ 이 있다. $\triangle ABC$ 의 내부의 점 P 가 $\triangle BPC = \triangle APC + \triangle APB$ 인 관계를 만족시키면서 움직인다. 점 P 가 그리는 도형의 길이는?

- ① $\frac{\sqrt{10}}{2}$ ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $\sqrt{10}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

해설

점 P 가 $\triangle ABC$ 의 내부의 점이고
 $\triangle BPC = \triangle APC + \triangle APB$ 이므로



$$\therefore \triangle BPC = \frac{1}{2} \triangle ABC$$

점 P 는 $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ 의 중점 M , N 을 잇는 선분 위에 있다.

$$\text{그런데 } M\left(0, \frac{3}{2}\right), N\left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$\text{점 } P \text{의 자취 } \overline{MN} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$