1. 점 $(-1,\ k)$ 가 포물선 $y = x^2 - 2x - 2$ 의 위쪽에 있도록 하는 실수 k 의 값의 범위를 구하면?

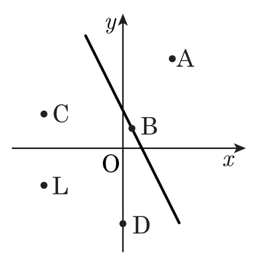
① $k < -2$ ② $k < -1$ ③ $k > 1$

④ $-2 < k < 1$ ⑤ $-1 < k < 1$

해설

주어진 함수가 $x = -1$ 일때 $y = 1$ 이므로
점 $(-1,\ k)$ 가 포물선 위쪽에 있기 위해서는
$k > 1$ 이어야 한다.

2. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 직선 $y=-2x+5$와 다섯 개의 점 A, B, C, D, L 가 있다. 이들 점 중에서 부등식 $y \geq -2x+5$를 만족하는 영역에 속하는 점의 개수는?



① 1 개　　② 2 개　　③ 3 개

④ 4 개　　⑤ 5 개

해설

부등식 $y \geq -2x+5$를 만족하는 영역에 속하는 점은 A, B 2 개이다.

3. 부등식 $x^2+y^2-2x+4y<0$이 속하지 않는 사분면을 구하면?

① 1사분면 ② 2사분면 ③ 3사분면
④ 4사분면 ⑤ 없다

해설

$x^2+y^2-2x+4y<0$ 은 중심이 $(1,-2)$이고 반지름이 $\sqrt{5}$ 인 원의 내부이므로 1, 3, 4 사분면을 지난다.
따라서 지나지 않는 사분면은 2사분면이다.

4. 점 $(-1, 4)$ 가 직선 $y = k(x-1)+2$ 의 아랫부분에 있도록 상수 k 의 값의 범위를 정하면?

① $k < -2$ ② $k < -1$ ③ $k > 3$
④ $k > 2$ ⑤ $k > 1$

해설
점 $(-1, 4)$ 가 직선 $y = k(x-1)+2$ 의 아랫 부분에 있으므로
$4 < k(-1-1)+2$, $4 < -2k+2$ $\therefore$ $k < -1$

5. 점 $(a,\ -4)$ 이 곡선 $y = x^2 + 5x$ 의 윗부분에 있도록 하는 정수 a 의 개수는?

① 1 개　② 2 개　③ 3 개　④ 4 개　⑤ 5 개

해설

점 $(a,\ -4)$가 곡선 $y = x^2 + 5x$의 윗부분에
있도록 하기 위해선 $y > x^2 + 5x$이어야 한다.
$(a,\ -4)$를 대입하면 $-4 > a^2 + 5a$
즉, $a^2 + 5a + 4 < 0$, $(a + 4)(a + 1) < 0$
$\therefore\ -4 < a < -1$
$a = -3,\ -2$ 총 2 개

6. 직선 $y = ax - 3a$ 가 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 4)$, $\mathrm{B}(-2,\ -6)$ 을 연결하는 선분과 A, B 가 아닌 한 점에서 만날 때, 상수 a 의 값의 범위를 구하면?

① $-3 < a < 2$　② $-2 < a < \frac{6}{5}$　③ $-\frac{4}{3} < a < \frac{1}{2}$
④ $1 < a < \frac{5}{2}$　⑤ $2 < a < 4$

해설

$ax - y - 3a = 0$ 에서 $f(x,\ y) = ax - y - 3a$ 로 놓으면
두 점 $\mathrm{A}(1,\ 4)$, $\mathrm{B}(-2,\ -6)$ 은 직선 $f(x,\ y) = 0$ 을 경계로
서로 반대쪽에 있어야 하므로
$f(1,\ 4) \cdot f(-2,\ -6) < 0$
$(a - 4 - 3a) \cdot (-2a + 6 - 3a) < 0$
$(-2a - 4)(-5a + 6) < 0$
$(a + 2)(5a - 6) < 0$
$\therefore -2 < a < \frac{6}{5}$

7. 직선 $y = mx + 5$ 가 두 점 $(2,\ 3)$, $(4,\ -1)$ 을 잇는 선분과 한 점에서 만날 때, 정수 m 의 개수는?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

선분과 직선이 만나려면 직선 $mx - y + 5 = 0$ 에 대하여 두 점 $(2,\ 3)$, $(4,\ -1)$ 중 한 점은 직선의 윗부분에, 다른 한 점은 직선의 아랫부분에 존재해야 한다.

즉, $(2m - 3 + 5)(4m - (-1) + 5) \le 0$

$(m + 1)(2m + 3) \le 0$

$\therefore\ -\frac{3}{2} \le m \le -1$

따라서 정수 m 은 -1 (1 개)

8. D가 부등식 $\max(|x|, |y|) \le 1$의 영역이라고 하자. 함수 $f : R^2 \to R^2$가 다음과 같다고 할 때, $f(0,\ 0)+f(2,\ 0)+f(1,\ 3)$의 값을 구하여라.

$$(x,\ y) \in R^2,\ f(x,\ y) = 1\{(x,\ y)\} \in D$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\max(|0|,\ |0|) \le 1,\ (0,\ 0) \in D,$

$\therefore\ f(0,\ 0) = 1$

$\max(|2|,\ |0|) = 2 > 1,\ (2,\ 0) \notin D,$

$\therefore\ f(2,\ 0) = 0$

$\max(|1|,\ |3|) = 3 > 1,\ (1,\ 3) \notin D,$

$\therefore\ f(1,\ 3) = 0$

그러므로 $f(0,\ 0) + f(2,\ 0) + f(1,\ 3) = 1$

9. $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$, $(x-a)^2 + (y-a)^2 \leq 4$ 에 대하여 세 식을 동시에 만족하는 (x, y)가 존재하지 않는다고 할 때, 상수 a 의 값의 범위를 구하면?

① $a > \sqrt{2}$, $a < -\sqrt{2}$

② $a > \sqrt{2}+1$, $a < -\sqrt{2}-1$

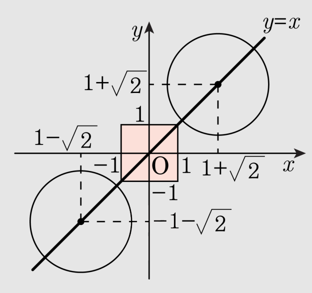
③ $a > \sqrt{2}-1$, $a < -\sqrt{2}+1$

④ $a > \sqrt{2}-1$, $a < -\sqrt{2}-1$

⑤ $a > \sqrt{2}+1$, $a < \sqrt{2}-1$

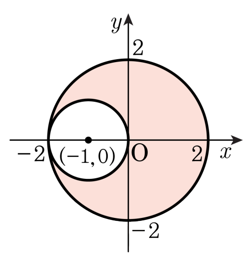
해설

영역을 그려보면,
원이 그림처럼 빗금 친 영역 밖에 있어야 한다.
그 경계는 원이 $(1,1), (-1,-1)$ 을 지날 때가 된다.



$\Rightarrow$ $(1-a)^2 + (1-a)^2 = 4$
$\Rightarrow$ $a = 1 + \sqrt{2}$
$\Rightarrow$ $(-1-a)^2 + (-1-a)^2 = 4$
$\Rightarrow$ $a = -1 - \sqrt{2}$
$\therefore$ $a > \sqrt{2}+1$, $a < -\sqrt{2}-1$

10. 다음 그림에서 색칠된 부분을 만족하는 부등식을 구하면? (단, 경계선 포함)



① $\begin{cases} (x+1)^2+y^2 \le 1 \\ x^2+y^2 \ge 4 \end{cases}$

② $\begin{cases} (x-1)^2+y^2 \ge 1 \\ x^2+y^2 \le 4 \end{cases}$

③ $\begin{cases} x^2+(y-1)^2 \le 1 \\ x^2+y^2 \ge 4 \end{cases}$

④ $\begin{cases} (x+1)^2+y^2 \ge 1 \\ x^2+y^2 \le 4 \end{cases}$

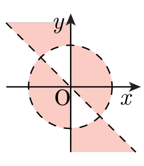
⑤ $\begin{cases} (x-1)^2+y^2 \ge 1 \\ x^2+y^2 \ge 4 \end{cases}$

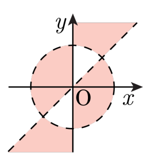
해설

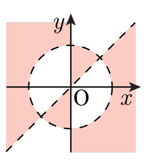
원 $(x+1)^2+y^2=1$ 의 외부와
원 $x^2+y^2=4$ 의 내부가 겹치는 부분이므로 어두운 부분을 만족하는 부등식은

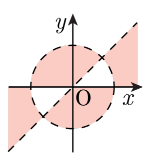
$\begin{cases} (x+1)^2+y^2 \ge 1 \\ x^2+y^2 \le 4 \end{cases}$ 이다.

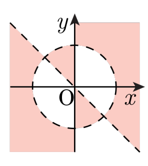
11. 부등식 $x(x+y)(x^2+y^2-4)>0$ 를 만족하는 영역을 좌표평면 위에 나타내면? (단, 경계선 제외)

①


②


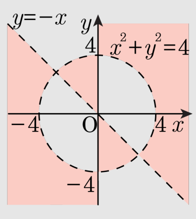
③


④


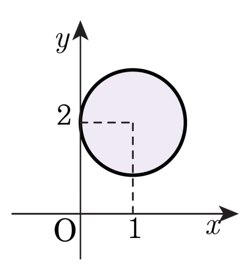
⑤


해설

$x=0,\ x+y=0,\ x^2+y^2=4$ 의 그래프를 모두 그리고 각각의 영역의 경계선 위에 있지 않은 한 점 $(5,\ 0)$ 을 부등식에 대입하면 $5\cdot(5+0)\cdot(5^2+0^2+4)>0$ 으로 부등식을 만족한다.
따라서 그림과 같이 점 $(5,\ 0)$ 을 포함하는 영역과 이 영역과 인접하지 않은 영역이 부등식을 만족한다.



12. 다음 그림의 색칠한 부분의 영역을 부등식으로 바르게 나타낸 것은?(단, 경계선은 포함한다.)



① $(x+1)^2+(y+2)^2 \le 1$　② $(x-2)^2+(y-1)^2 \ge 1$

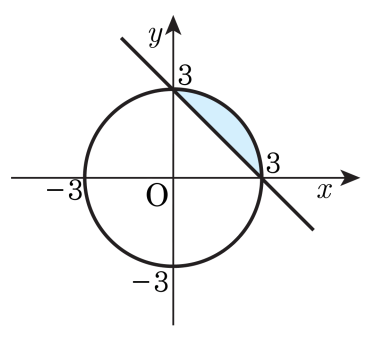
③ $(x-2)^2+(y-1)^2 \le 1$　④ $(x-1)^2+(y-2)^2 \ge 1$

⑤ $(x-1)^2+(y-2)^2 \le 1$

해설

$(x-1)^2+(y-2)^2=1$ (경계선) 의 내부이므로 $(x-1)^2+(y-2)^2 \le 1$

13. 다음 그림의 어두운 부분을 연립부등식으로 바르게 나타낸 것은? (경계선 포함)



① $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 9 \\ y \ge -x + 3 \end{cases}$

② $\begin{cases} x^2 + y^2 \ge 9 \\ y \le -x + 3 \end{cases}$

③ $\left(x^2 + y^2 - 9\right)(x + y - 3) \le 0$

④ $\left(x^2 + y^2 - 9\right)(x + y - 3) \ge 0$

⑤ $\left(x^2 + y^2 - 9\right)(x + y - 3) < 0$

해설

$x^2 + y^2 = 9$ 의 내부와 $y = -x + 3$ 의 윗부분이므로

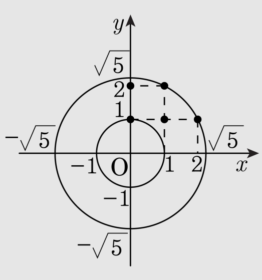
$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 9 \\ y \ge -x + 3 \end{cases}$

14. 부등식 $1 \le x^2 + y^2 \le 5$ 를 만족하는 정수의 쌍 $(x,\ y)$ 의 개수는?

① 11 개　② 12 개　③ 16 개　④ 20 개　⑤ 24 개

해설

경계를 포함하여 반지름 1 인 원의 외부와
반지름 $\sqrt{5}$ 인원의 내부 사이에 있는 격자점$(x,\ y$ 좌표가 모두 정수인점$)$의 개수를 헤아려야 한다. 양 축에 대하여 대칭이므로 x 축과 제 1 사분면에있는 부분의 개수만 헤아려서 4 배 하면 된다.



점의 개수는 5 개이므로 구하는 격자점의 개수는 20 개

15. 세 부등식 $y \geq x,\ y \geq -2x,\ y \leq -\frac{1}{2}x + 3$을 동시에 만족하는 영역의 넓이는?

① 4　　② 6　　③ 8　　④ 10　　⑤ 12

해설

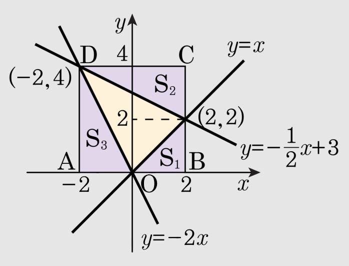
주어진 부등식을 만족하는 영역은 다음 그림의 색칠된 부분과 같다.

따라서, 구하는 넓이는

$\square ABCD - (S_1 + S_2 + S_3)$

$= 4 \cdot 4 - \frac{1}{2}(2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4)$

$= 6$



(단, 경계선 포함)

16. 연립부등식 $\begin{cases} y - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,|\,x\,| \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$ 이 나타내는 영역의 넓이를 구하면?

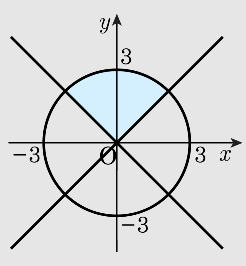
① $\frac{1}{2}\pi$　　② π　　③ 2π　　④ 3π　　⑤ 4π

해설

주어진 부등식의 영역을 나타내보면,

$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$, $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$

다음 그림에서 빗금 친 부분의 넓이를 구하면,



$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ 의 기울기 각도는 $30°$ 이므로

반지름이 3 이고, 중심각이 $120°$ 인 부채꼴의 넓이를 구하면 된다.

$\Rightarrow \quad 3^2 \times \pi \times \frac{120}{360} = 3\pi$

17. 다음 연립부등식이 나타내는 영역의 넓이를 구하면?

$$\begin{cases} y + x \geq 0 \\ y - x \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$$

① π　　② 2π　　③ 3π　　④ 4π　　⑤ 5π

해설

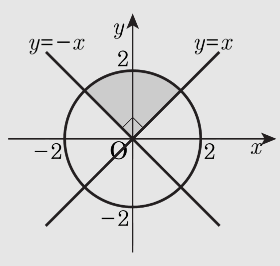
$y + x \geq 0$ 에서 $y \geq -x$ $\cdots$ ㉠

$y - x \geq 0$ 에서 $y \geq x$ $\cdots$ ㉡

$x^2 + y^2 \leq 4$ $\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통부분은 색칠된 부분이다.

따라서 구하는 영역의 넓이는 $\pi \times 2^2 \times \frac{1}{4} = \pi$

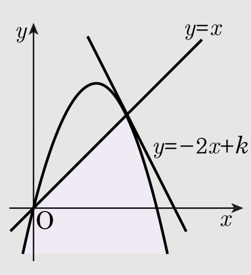


18. $y \le x,\ y \le x(4-x)$ 일 때 $2x+y$ 의 최댓값은?

① 6　　② 7　　③ 8　　④ 9　　⑤ 10

해설

부등식 $y \le x$ 와 $y \le x(4-x)$ 의 영역은 다음 그림과 같다.



$2x+y=k$ 라고 놓으면 $y=-2x+k \cdots$ ①

①이 이차함수 $y=-x^2+4x$ 와 접할 때 k는 최대가 되므로

$-x^2+4x=-2x+k \ \rightarrow\ x^2-6x+k=0$

에서

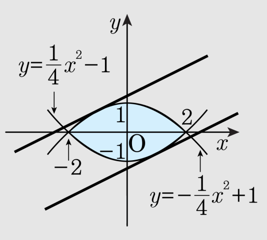
$D/4=3^2-k=0 \quad \therefore\ k=9$

19. 연립부등식 $\begin{cases} y \ge \frac{1}{4}x^2 - 1 \\ y \le -\frac{1}{4}x^2 + 1 \end{cases}$ 을 만족시키는 실수 x, y 에 대하여 $y - \frac{1}{2}x$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값은?

① $\frac{5}{2}$　　② 2　　③ $\frac{3}{2}$　　④ 1　　⑤ $\frac{1}{2}$

해설

주어진 연립부등식의 영역은 그림에서 색칠한 부분이다.



여기서 $y = -\frac{1}{2}x = k$ 라 하면,

k 가 최대, 최소로 되는 것은 그림과 같이 곡선에 접할 때이다.

따라서 $y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$ 과 $y = \frac{1}{2}x + k$ 가 접할 때,

$\frac{1}{2}x + k = -\frac{1}{4}x^2 + 1$

$x^2 + 2x + 4(k-1) = 0$

$D/4 = 1 - 4(k-1) = 0$

$\therefore\ k = \frac{5}{4}$

$\therefore$ 최댓값은 $M = \frac{5}{4}$

또한, $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$ 과 $y = \frac{1}{2}x + k$ 가 접할 때,

같은 방법으로 최솟값을 구하면 $m = -\frac{5}{4}$

$\therefore\ M - m = \frac{5}{4} - \left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{5}{2}$

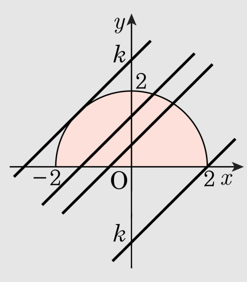
20. x, y 가 두 개의 부등식 $x^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq 0$ 을 만족시킬 때, $y - x$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$y - x = k$ 라 놓으면
$y = x + k$는 다음 그림과 같이 점 $(2, 0)$을 지날 때 $k = -2$ 가 최소



21. 네 부등식 $x \geq 0,\ y \geq 0,\ 2x+3y \leq 18,\ 2x+y \leq 10$ 을 동시에 만족시키는 점 $(x,\ y)$ 에 대하여 $x+y$ 의 최댓값은?

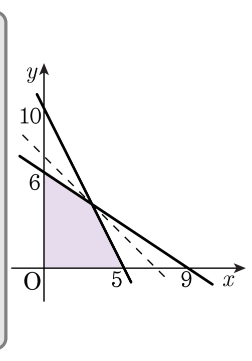
① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

네 부등식의 영역을 좌표평면에 나타내면

$x+y=k$ 라 하면, k 의 최댓값은 $y=-x+k$ 의 그래프가 $2x+3y=18,\ 2x+y=10$ 의 교점 $(3,\ 4)$ 를 지날 때이다.

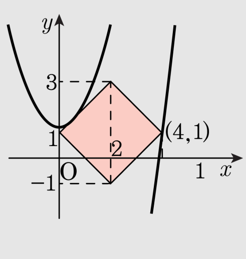
$\therefore x+y=7$



22. 실수 x, y 가 부등식 $|x-2|+|y-1| \le 2$ 를 만족할때, x^2-y 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 한다. $M+m$ 의 값은?

① $\frac{55}{2}$ ② $\frac{55}{3}$ ③ $\frac{55}{4}$ ④ 11 ⑤ $\frac{55}{6}$

해설



영역 $|x-2|+|y-1| \le 2$ 를 나타내면 다음 그림과 같고,

$x^2-y=k$ 라고 하면,

$y=x^2-k \cdots$ ①

① 의 포물선을 영역 내에서 움직여 보면 $(4,\ 1)$ 을 지날 때 최댓값 $4^2-1=15$ 을 가지며,

직선 $y=x+1$ 과 접할 때 최솟값을 갖는다.

$x^2-k=x+1,\ x^2-x-k-1=0$

$D=(-1)^2-4(-k-1)=4k+5$

$\therefore\ k=-\frac{5}{4}$ (최솟값)

$\therefore\ M+m=15+\left(-\frac{5}{4}\right)=\frac{55}{4}$

23. 연립부등식 $x > 0,\ y + x \geq 0,\ y - 2x \leq 0$이 나타내는 좌표평면 위의 영역을 D라 하자. D에 속하는 두 점 $\mathrm{P}(a,\ b),\ \mathrm{Q}(c,\ d)$에 대하여 $\dfrac{b+d}{a+c}$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① $\dfrac{2}{3}$　② $\dfrac{4}{3}$　③ 1　④ 3　⑤ $\dfrac{10}{3}$

해설

영역 D는 세 부등식 $x > 0,\ y \geq -x,\ y \leq 2x$를 만족시키는 점 $(x,\ y)$들의 모임이고,
두 점 $\mathrm{P}(a,\ b),\ \mathrm{Q}(c,\ d)$는 영역 D에 속하므로

$$a > 0,\ c > 0 \quad \therefore\ a + c > 0 \quad \cdots ㉠$$
$$b \geq -a,\ d \geq -c \quad \therefore\ b + d \geq -(a+c) \quad \cdots ㉡$$
$$b \leq 2a,\ d \leq 2c \quad \therefore\ b + d \leq 2(a+c) \quad \cdots ㉢$$

㉠, ㉡으로부터 $\dfrac{b+d}{a+c} \geq -1$ 이고

㉠, ㉢으로부터 $\dfrac{b+d}{a+c} \leq 2$

즉, $\dfrac{b+d}{a+c}$의 최댓값, 최솟값은 각각 $2,\ -1$이므로
구하는 최댓값과 최솟값의 합은 1이다.

24. 처음으로 애완동물을 키우기 시작한 병호는 수의사로부터 그 애완동물이 하루에 영양소 A 를 20 이상, 영양소 B 를 12 이상 섭취해야 한다는 조언을 받고 알약 P, Q 를 이용하여 영양소를 공급하기로 하였다. 시장 조사를 해보니 알약 P 에는 영양소 A, B 가 각각 4, 2 만큼 들어있고, 알약 Q 에는 영양소 A, B 가 각각 3, 3 만큼 들어있으며, 알약 P, Q 의 가격은 한 알 당 250 원, 200 원이었다. 수의사가 조언한 영양소의 최소치를 애완동물에게 공급하려고 할 때, 하루에 드는 비용의 최소금액을 구하여라.

▶ 답 : ____ 원

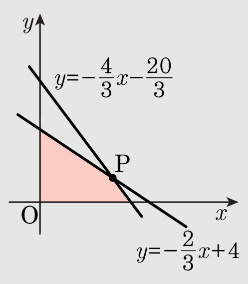
▷ 정답 : 1300 원

해설

알약 P 를 x 개, Q 를 y 개 샀다고 하면(단,x, y 는 정수)

연립부등식 $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ 4x+3y \ge 20 \\ 2x+3y \ge 12 \end{cases}$ 을 만족하는 (x, y) 에 대해

$250x+200y$ 의 최솟값을 구하는 것이므로,
$250x+200y=k$ 라 하자.
$250x+200y=k$는 $4x+3y \ge 20$ 과 $2x+3y \ge 12$ 의 교점 P 를 지날 때, k 는 최소가 된다.



그런데 점 P 의 좌표는 $\left(4, \frac{4}{3}\right)$ 이므로,

x, y 가 정수를 만족하는 점을 찾으면,
(4, 3), (3, 3), (2, 4), (1, 7) 등 이다.
이 중 가격의 최솟값은 (2, 4) 일 때, 1300 원

25. 어떤 공장에서 제품 Ⅰ, Ⅱ를 만들고 있다. 각 제품 1 개를 만드는 데에 필요한 원료 A, B 의 소모량과 제품 1 개에서 얻는 이익은 아래 표와 같다. 원료 A, B 를 각각 10 kg , 18 kg 까지 사용하여 최대의 이익을 얻으려면 제품 Ⅰ, Ⅱ는 각각 몇 개씩 생산하면 되는가? (제품1, 제품2 순서대로적으시오)

제품 \ 원료	A(kg)	B(kg)	이익(만 원)
Ⅰ	2	6	4
Ⅱ	5	3	3

① 0, 1　② 1, 2　③ 2, 0　④ 3, 0　⑤ 3, 1

해설

제품 Ⅰ을 x 개, 제품 Ⅱ를 y 개 만든다고 하면, 주어진 조건은
$2x+5y \le 10$,
$6x+3y \le 18$ 이다.
이익을 k라 하면
$k=4x+3y$
점 $\left(\frac{5}{2},\ 1\right)$ 에 가장 가까운 (2, 1) 또는 (3, 0) 일 때 k 가 최대이다.
대입해보면 (3, 0) 일 때 최댓값 12