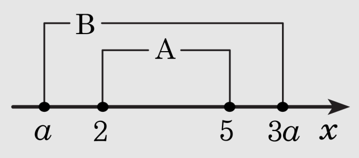
1. 양의 실수 a에 대하여 $-x^2+7x-10 \ge 0$의 모든 해가 $x^2-4ax+3a^2 \le 0$을 만족할 때, a의 값의 범위는?

① $\frac{1}{3} \le a \le 2$　② $\frac{2}{3} \le a \le 2$　③ $\frac{5}{3} \le a \le 2$
④ $\frac{5}{3} \le a \le 5$　⑤ $2 \le a \le 5$

해설

$-x^2+7x-10 \ge 0$
$x^2-7x+10 \le 0$
$(x-2)(x-5) \le 0$
$2 \le x \le 5$
$x^2-4ax+3a^2 \le 0$
$(x-a)(x-3a) \le 0$
$a \le x \le 3a (\because a > 0)$
㉠의 모든 해가 ㉡에 포함되므로



따라서 $a \le 2$, $3a \ge 5$이므로 $\frac{5}{3} \le a \le 2$

2. 연립부등식 $\begin{cases} x^2+3x-4<0 \\ x^2-2x-3>0 \end{cases}$ 의 값은?

① $x>-1$ ② $-4<x<-1$ ③ $0<x<4$
④ $1<x<4$ ⑤ $-4<x<3$

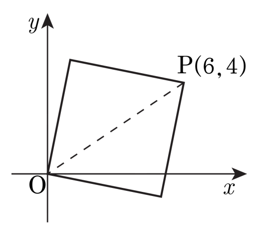
해설

$x^2+3x-4<0 \Rightarrow (x-1)(x+4)<0$
$\Rightarrow -4<x<1$

$x^2-2x-3>0 \Rightarrow (x+1)(x-3)>0$
$\Rightarrow x<-1$ 또는 $x>3$

$\therefore$ 공통부분을 구하면 $-4<x<-1$

3. 다음 그림과 같은 정사각형의 넓이는?



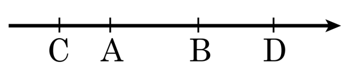
① 16 ② 20 ③ 26

④ 32 ⑤ 52

해설

$\overline{\mathrm{OP}} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}$ 이므로
주어진 정사각형의 한 변의 길이를 a라고 하면
$\sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{52}$ 에서 $a^2 = 26$ 이다.
따라서 정사각형의 넓이는 26이다

4. 다음 빈칸에 알맞은 부등호를 써 넣어라.



m , n 이 양수라고 할 때, 선분 AB 를 m : n 으로 외분하는 점은
i) m (　　) n 일 때 반직선 $\overrightarrow{BD}$ 위에 있고,
ii) m (　　) n 일 때 반직선 $\overrightarrow{AC}$ 위에 있다.

▶ 답 :

▶ 답 :

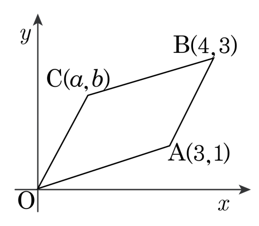
▷ 정답 : $>$

▷ 정답 : $<$

해설

외분점을 P 라고 하면
$\overline{AP}$: $\overline{PB}$ = m : n 이므로
$m > n$ 일 때 반직선 $\overrightarrow{BD}$ 위에 있고,
$m < n$ 일 때 반직선 $\overrightarrow{AC}$ 위에 있다.

5. 다음 그림과 같이 네 점 A(3, 1), B(4, 3), C(a, b), O(0, 0)을 꼭짓점으로 하는 평행사변형 OABC에서 $a+b$의 값을 구하여라.



▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

평행사변형 OABC에서 두 대각선의 중점은 일치하므로

$\left(2, \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{a+3}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$

$\frac{a+3}{2} = 2$에서 $a = 1$

$\frac{b+1}{2} = \frac{3}{2}$에서 $b = 2$

$\therefore a+b = 3$

6. 두 직선 $ax-2y+2=0$, $2x+by+c=0$이 점 $(2,\ 4)$에서 직교할 때, 다음 중 상수 a, b, c의 값으로 옳은 것은?

① $a=-3,\ b=3,\ c=-11$
② $a=-3,\ b=3,\ c=-12$
③ $a=3,\ b=-3,\ c=-13$
④ $a=3,\ b=3,\ c=-15$
⑤ $a=3,\ b=3,\ c=-16$

해설

(ⅰ) 두 직선이 직교하므로 기울기의 곱이 -1이다.

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{2} \times \left(-\frac{2}{b}\right) = -1$$

$$\Rightarrow \quad a=b$$

(ⅱ) 두 직선이 모두 점 $(2, 4)$를 지난다.

$$\Rightarrow \quad 2a-8+2=0, \quad 4+4b+c=0$$

(ⅰ), (ⅱ)를 연립하면, $a=3,\ b=3,\ c=-16$

7. 두 직선 $y=|x|+2$ 와 $y=ax+1-2a$ 의 그래프가 교점을 갖지 않을 정수 a 의 개수는?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

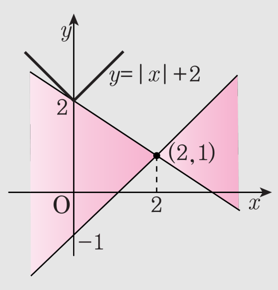
해설

$$\begin{cases} y=|x|+2 \ \cdots ㉠ \\ y=ax+1-2a \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡에서 $a(x-2)+1-y=0$

즉, a 의 값에 관계없이 정점 $(2,\ 1)$ 을 지난다.

그림에서 교점을 갖지 않으려면



$(0,2),(2,1)$ 을 지나는 직선의 기울기

$\left(-\frac{1}{2}\right)$ 보다 크고

$(0,-1),(2,1)$ 을 지나는 직선의 기울기

1 보다 작거나 같아야 한다.

$\therefore\ -\frac{1}{2}<a\le 1$

$\therefore a=0,\ \ a=1$

8. 원점에서 직선 $ax+by+4=0$ 까지의 거리가 $\sqrt{2}$ 일 때 a^2+b^2 의 값을 구하면?

① 4 ② 8 ③ $3\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $2\sqrt{3}$

해설

원점 (0, 0) 에서 직선 $ax+by+4=0$ 까지의 거리가 $\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{|a\times 0+b\times 0+4|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{4}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{2}$$

$4=\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}\rightarrow\ 2(a^2+b^2)=16$

$\therefore\ a^2+b^2=8$

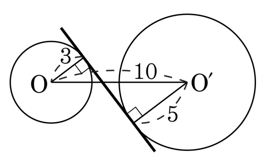
9. x 축에 접하는 원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ 의 중심의 좌표가 $(3, -2)$ 일 때, $a+b+c$ 의 값은?

① 7　　② 8　　③ 9　　④ 10　　⑤ 11

해설

중심의 좌표가 $(3,\ -2)$ 인 원이 x 축에 접하므로
반지름의 길이는 2 이다.
따라서, 구하는 원의 방정식은
$(x-3)^2+(y+2)^2=2^2$
$\therefore\ x^2+y^2-6x+4y+9=0$
$\therefore\ a+b+c=-6+4+9=7$

10. 다음 그림의 두 원 O와 O′에서 공통내접선의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

공통내접선의 길이는 $\sqrt{10^2 - (3+5)^2} = 6$

11. 원 $x^2+y^2=9$ 에 접하고 기울기가 4 인 접선의 방정식은 $y=4x\pm k$ 이다. k 를 구하면? (단, $k>0$)

① $2\sqrt{7}$ ② $2\sqrt{17}$ ③ $5\sqrt{13}$ ④ $3\sqrt{17}$ ⑤ $3\sqrt{7}$

해설

기울기가 주어진 접선의 방정식
$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$ 에서
원 $x^2+y^2=9$ 에 접하고 기울기가 4 인 접선의 방정식은
$y=4x\pm 3\sqrt{17}$ 이다.

12. 평행이동 $f:(x,y)\to(x-2,y+1)$ 에 의하여 직선 $2x+y+5=0$ 이 이동한 직선의 방정식을 구하면?

① $2x+y+1=0$ ② $2x+y+2=0$ ③ $2x+y+6=0$
④ $2x+y+8=0$ ⑤ $2x+y+9=0$

해설

$x'=x-2,\quad y'=y+1$ 이라 하자.
x,y 를 원래 식에 대입하면,
$2(x'+2)+(y'-1)+5=0$
$\Rightarrow\quad 2x'+y'+8=0$
$\Rightarrow\quad 2x+y+8=0$

13. 점$(1,3)$을 점$(-1,2)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하면?

① $(3,\ -1)$ ② $(-3,\ 1)$ ③ $(1,\ -3)$
④ $(-1,\ 3)$ ⑤ $(-1,\ -3)$

해설

대칭이동한 점을 (a,b)라고 하면
점 (a,b)와 점 $(1,3)$의 중점이
점 $(-1,2)$이므로
$\frac{a+1}{2}=-1, \frac{b+3}{2}=2$에서
$a=-3, b=1$
$\therefore (-3,\ 1)$

14. 점 $(-1, 4)$ 가 직선 $y = k(x-1) + 2$ 의 아랫부분에 있도록 상수 k 의 값의 범위를 정하면?

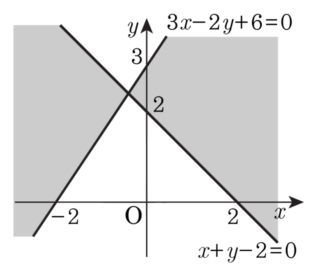
① $k < -2$　　② $k < -1$　　③ $k > 3$

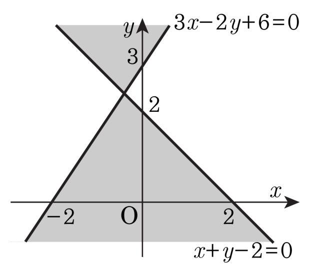
④ $k > 2$　　⑤ $k > 1$

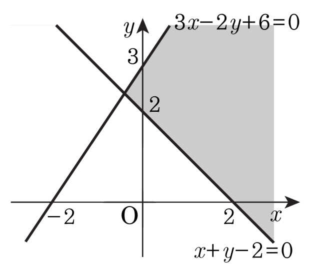
해설

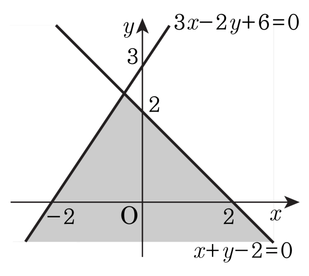
점 $(-1, 4)$ 가 직선 $y = k(x-1) + 2$ 의 아랫 부분에 있으므로
$4 < k(-1-1) + 2$, $4 < -2k + 2$ $\therefore$ $k < -1$

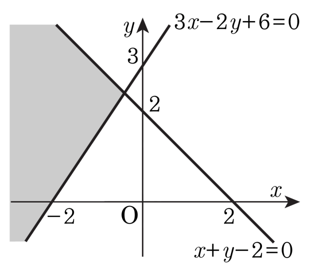
15. 부등식 $(3x-2y+6)(x+y-2) \geq 0$ 의 영역을 좌표평면에 바르게 나타낸 것은?

①


②


③


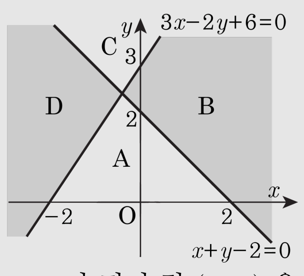
④


⑤


해설

부등식 $ab > 0$ 은 $a > 0, b > 0$ 또는 $a < 0, b < 0$ 과 동치이다.
따라서 $a = 3x - 2y + 6$, $b = x + y - 2$ 로 놓으면 부등식을 만족하는 영역은
(ㄱ) $a > 0, b > 0$
즉 $a > 0$ 과 $b > 0$ 의 공통부분
(ㄴ) $a < 0, b < 0$
즉 $a < 0$ 과 $b < 0$ 의 공통부분의 양쪽 부분이며

이들을 간단히 구하는 데에는 두 직선 $3x-2y+6=0$, $x+y-2=0$ 으로 좌표평면을 다음 그림과 같이 네 부분으로 나누어 본다.



양의 영역, 음의 영역은 서로 교차해서 나타나므로, 원점 (0, 0) 을 부등식에 대입해 보면
$(3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 6)(0 + 0 - 2) = -12 < 0$ 이 되어 점 (0, 0) 은 부등식을 만족하지 않는다.
따라서 영역 A 는 부등식을 만족하지 않으므로 영역 B 는 부등식을 만족하고, 영역 C 는 부등식을 만족하지 않으며, 영역 D 는 부등식을 만족한다.

16. 부등식 $2|x+2|+|x-2|<6$을 만족하는 정수 x의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ____ 개

▷ 정답 : 2개

해설

i) $x<-2$일 때

$-2(x+2)-(x-2)<6,\ x>-\frac{8}{3}$

공통부분은 $-\frac{8}{3}<x<-2$

ii) $-2\le x<2$일 때

$2(x+2)-(x-2)<6,\ x<0$

공통부분은 $-2\le x<0$

iii) $x\ge 2$일 때

$2(x+2)+(x-2)<6,\ x<\frac{4}{3}$

공통부분은 없음

i), ii), iii)을 모두 합하면 $-\frac{8}{3}<x<0$

정수 x : $-2,\ -1$ (2개)

17. 이차부등식 $-4x^2+12x-9 \geq 0$의 해는?

① $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$
② $x \leq -\frac{3}{2},\ x \geq \frac{3}{2}$
③ $x \neq \frac{3}{2}$인 모든 실수
④ 해는 없다.
⑤ $x = \frac{3}{2}$

해설

$-4x^2+12x-9 \geq 0$
$\Rightarrow\ 4x^2-12x+9 \leq 0$
$\Rightarrow\ (2x-3)^2 \leq 0$
$\therefore\ x = \frac{3}{2}$

18. 모든 실수 x에 대하여 x^2+px+p가 -3보다 항상 크기 위한 정수 p의 최댓값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x^2+px+p>-3$

$x^2+px+(p+3)>0$

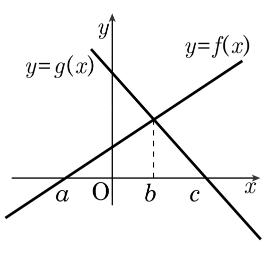
$D=p^2-4(p+3)=p^2-4p-12<0$

$(p-6)(p+2)<0$

$-2<p<6$

$\therefore$ 최대정수 : 5

19. 두 개의 일차함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차부등식 $f(x)g(x) \geq 0$ 의 해는?



① $a \leq x \leq b$　② $a \leq x \leq c$
③ $b \leq x \leq c$　④ $x \leq b,\ x \geq c$
⑤ $x \leq a,\ x \geq c$

해설

$f(x)g(x) \geq 0$ 을 만족하는 경우는 다음과 같이
두 가지의 경우가 있다.
$f(x) \geq 0,\ g(x) \geq 0$ 또는 $f(x) \leq 0$, $g(x) \leq 0$
그런데 그래프에서 $f(x) \leq 0,\ g(x) \leq 0$의 경우는
없으므로 $f(x) \geq 0,\ g(x) \geq 0$을 만족하는
x의 범위를 구하면 된다.
주어진 함수의 그래프를 살펴 보면
$x \leq a$일 때, $f(x) \leq 0$, $g(x) \geq 0$
$a \leq x \leq c$일 때, $f(x) \geq 0,\ g(x) \geq 0$
$x \geq c$일 때, $f(x) \geq 0,\ g(x) \leq 0$
따라서 구하는 해는 $a \leq x \leq c$

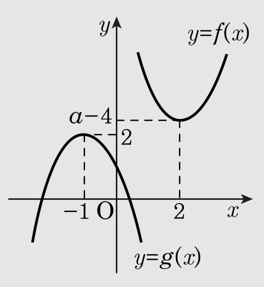
20. 이차함수 $f(x) = x^2 - 4x + a$ 와 $g(x) = -x^2 - 2x + 1$ 이 있다. 임의의 실수 x_1 , x_2 에 대하여 $f(x_1) > g(x_2)$ 일 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $a > 6$　　② $a > 5$　　③ $a > 4$　　④ $a > 3$　　⑤ $a > 2$

해설

$f(x) = x^2 - 4x + a = (x-2)^2 + a - 4$ 에서

$f(x)$ 의 최솟값은 $a - 4$,
$g(x) = -x^2 - 2x + 1$
$= -(x+1)^2 + 2$ 에서
$g(x)$ 의 최댓값은 2
한편, 모든 실수 x_1 , x_2 에 대하여
$f(x_1) > g(x_2)$ 이면 오른쪽 그림과 같이
$f(x)$ 의 최솟값이 $g(x)$ 의 최댓값보다
커야 하므로
$a - 4 > 2$　　$\therefore\ a > 6$



21. 좌표평면 위에 서로 다른 세 점 A$(-2k-1, 5)$ B$(k, -k-10)$, C$(2k+5, k-1)$가 일직선 위에 있을 때, k의 값의 곱을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

세 점 A, B, C가 일직선 위에 있으므로
직선 AB와 직선 BC의 기울기는 같다.
$$\frac{-k-10-5}{k-(-2k-1)} = \frac{(k-1)-(-k-10)}{2k+5-k}$$
이 식을 정리하면 $k^2+7k+12=0$
$\therefore$ k의 값의 곱은 12이다.

22. 중심 C 가 직선 $y = 2x + 1$ 위에 있고 두 점 $(2,\ 1)$, $(6,\ 5)$ 를 지나는 원의 면적은?

① 10π　② 12π　③ 14π　④ 16π　⑤ 18π

해설

구하는 원을
$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0 \cdots\cdots$ ①라 두면
①은 $(2,\ 1)$, $(6,\ 5)$ 를 지나므로
$4 + 1 + 4A + 2B + C = 0 \cdots\cdots\cdots$ ②
$36 + 25 + 12A + 10B + C = 0 \cdots\cdots\cdots$ ③
또한 ①의 중심은 $(-A,\ -B)$ 이므로
$-B = 2 \cdot (-A) + 1 \cdots\cdots\cdots$ ④
②, ③, ④에서 $A = -2,\ B = -5,\ C = 13$ 이고
①의 반지름의 길이는 $\sqrt{A^2 + B^2 - C} = \sqrt{16}$
구하는 원의 면적은 16π

해설

중심 $C(a, 2a + 1)$ 이라 하면
$(x - a)^2 + (y - 2a - 1)^2 = r^2$
$(2,\ 1)$, $(6,\ 5)$ 를 지나므로 각각 대입하면
$(2 - a)^2 + (1 - 2a - 1)^2 = r^2 \cdots$ ①
$(6 - a)^2 + (5 - 2a - 1)^2 = r^2 \cdots$ ②
①, ②를 연립해서 풀면 $a = 2$, ①에 대입하면 $r = 4$

23. 두 점 A$(-3,\ 0)$, B$(3,\ 0)$ 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{PB}} = 2 : 1$ 을 만족시키는 점 P$(x,\ y)$ 의 자취의 방정식을 구하면 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 이다. 이때, $a+b+r$ 의 값은? (단, $r > 0$)

① 7　② 9　③ 11　④ 13　⑤ 15

해설

$\overline{\mathrm{AP}} = 2\overline{\mathrm{PB}}$ 이므로 $\overline{\mathrm{AP}}^2 = 4\overline{\mathrm{PB}}^2$

$(x+3)^2 + y^2 = 4\left\{(x-3)^2 + y^2\right\}$

$3x^2 + 3y^2 - 30x + 27 = 0,\ (x-5)^2 + y^2 = 16$

$\therefore a = 5,\ b = 0,\ r = 4$

$\therefore a + b + r = 5 + 0 + 4 = 9$

24. 두 원 $x^2 + y^2 - 2ay + 8a - 25 = 0$ 와 $x^2 + y^2 = 1$ 이 외접할 때 a 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

두 원이 외접하면 중심 사이의 거리와 반지름의 합이 일치한다.

$\Rightarrow \quad x^2 + (y - a)^2 = a^2 - 8a + 25, \quad x^2 + y^2 = 1$

중심사이의 거리 : a

반지름의 합 : $1 + \sqrt{a^2 - 8a + 25}$

$\Rightarrow \quad a - 1 = \sqrt{a^2 - 8a + 25}$

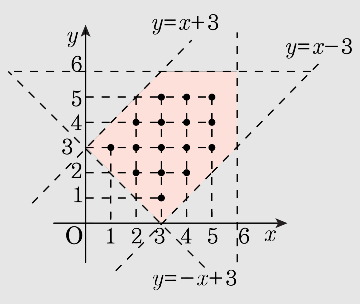
$\Rightarrow \quad a = 4$

25. 6보다 작은 두 양수 x, y에 대하여 세 수 $3,\ x,\ y$가 삼각형의 세 변의 길이가 될 때, 자연수 $x,\ y$의 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ＿＿＿ 개

▷ 정답 : 16 개

해설



$x,\ y$는 6보다 작은 양수이므로

$0 < x < 6,\ 0 < y < 6 \cdots\cdots$ ㉠

세 수 $3,\ x,\ y$가 삼각형의 세 변의 길이가 되려면 다음 부등식을 모두 만족해야 한다.

$x + y > 3,\ x + 3 > y,\ y + 3 > x \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 영역은 다음 그림의 색칠된 부분과 같다.

이때, 경계선은 제외한다.

따라서, 영역 안에 있는 자연수 $x,\ y$의 값은

$x = 1$일 때, $y = 3$

$x = 2$일 때, $y = 2,\ 3,\ 4$

$x = 3$일 때, $y = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

$x = 4$일 때, $y = 2,\ 3,\ 4,\ 5$

$x = 5$일 때, $y = 3,\ 4,\ 5$이므로

순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는 $1 + 3 + 5 + 4 + 3 = 16$(개)