1. 양의 실수 a에 대하여 $-x^2+7x-10 \geq 0$의 모든 해가 $x^2-4ax+3a^2 \leq 0$을 만족할 때, a의 값의 범위는?

① $\frac{1}{3} \leq a \leq 2$　② $\frac{2}{3} \leq a \leq 2$　③ $\frac{5}{3} \leq a \leq 2$
④ $\frac{5}{3} \leq a \leq 5$　⑤ $2 \leq a \leq 5$

해설

$-x^2+7x-10 \geq 0$

$x^2-7x+10 \leq 0$

$(x-2)(x-5) \leq 0$

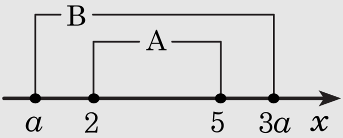
$2 \leq x \leq 5$

$x^2-4ax+3a^2 \leq 0$

$(x-a)(x-3a) \leq 0$

$a \leq x \leq 3a(\because a > 0)$

㉠의 모든 해가 ㉡에 포함되므로



따라서 $a \leq 2,\ 3a \geq 5$이므로 $\frac{5}{3} \leq a \leq 2$

2. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 + 3x - 4 < 0 \\ x^2 - 2x - 3 > 0 \end{cases}$ 의 값은?

① $x > -1$　　② $-4 < x < -1$　　③ $0 < x < 4$

④ $1 < x < 4$　　⑤ $-4 < x < 3$

해설

$x^2 + 3x - 4 < 0 \Rightarrow (x-1)(x+4) < 0$

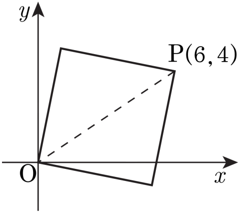
$\Rightarrow -4 < x < 1$

$x^2 - 2x - 3 > 0 \Rightarrow (x+1)(x-3) > 0$

$\Rightarrow x < -1$ 또는 $x > 3$

$\therefore$ 공통부분을 구하면 $-4 < x < -1$

3. 다음 그림과 같은 정사각형의 넓이는?



① 16 ② 20 ③ 26

④ 32 ⑤ 52

해설

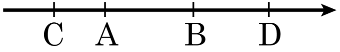
$\overline{\mathrm{OP}} = \sqrt{6^2+4^2} = \sqrt{52}$ 이므로

주어진 정사각형의 한 변의 길이를 a라고 하면

$\sqrt{a^2+a^2} = \sqrt{52}$ 에서 $a^2 = 26$ 이다.

따라서 정사각형의 넓이는 26이다

4. 다음 빈칸에 알맞은 부등호를 써 넣어라.



m , n 이 양수라고 할 때, 선분 AB 를 $m\ :\ n$ 으로 외분하는 점은

i) m (　　) n 일 때 반직선 $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ 위에 있고,

ii) m (　　) n 일 때 반직선 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ 위에 있다.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $>$

▷ 정답 : $<$

해설

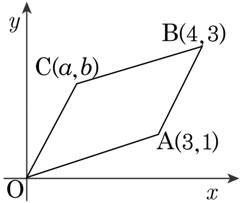
외분점을 P 라고 하면

$\overline{\mathrm{AP}}\ :\ \overline{\mathrm{PB}}\ =\ m\ :\ n$ 이므로

$m > n$ 일 때 반직선 $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ 위에 있고,

$m < n$ 일 때 반직선 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ 위에 있다.

5. 다음 그림과 같이 네 점 $\mathrm{A}(3,\ 1)$, $\mathrm{B}(4,\ 3)$, $\mathrm{C}(a,\ b)$, $\mathrm{O}(0,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 평행사변형 OABC에서 $a+b$의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

평행사변형 OABC에서 두 대각선의 중점은 일치하므로

$$\left(2,\ \frac{3}{2}\right)=\left(\frac{a+3}{2},\ \frac{b+1}{2}\right)$$

$\frac{a+3}{2}=2$에서 $a=1$

$\frac{b+1}{2}=\frac{3}{2}$ 에서 $b=2$

$\therefore a+b=3$

6. 두 직선 $ax-2y+2=0$, $2x+by+c=0$이 점 $(2,\ 4)$에서 직교할 때, 다음 중 상수 a, b, c의 값으로 옳은 것은?

① $a=-3,\ b=3,\ c=-11$

② $a=-3,\ b=3,\ c=-12$

③ $a=3,\ b=-3,\ c=-13$

④ $a=3,\ b=3,\ c=-15$

⑤ $a=3,\ b=3,\ c=-16$

해설

(i) 두 직선이 직교하므로 기울기의 곱이 -1이다.

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{2} \times \left(-\frac{2}{b}\right) = -1$$

$$\Rightarrow \quad a = b$$

(ii) 두 직선이 모두 점 $(2, 4)$를 지난다.

$$\Rightarrow \quad 2a-8+2=0, \quad 4+4b+c=0$$

(i), (ii) 를 연립하면, $a=3,\ b=3,\ c=-16$

7. 두 직선 $y=|x|+2$ 와 $y=ax+1-2a$ 의 그래프가 교점을 갖지 않을 정수 a 의 개수는?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$$\begin{cases} y=|x|+2 & \cdots ㉠ \\ y=ax+1-2a & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡에서 $a(x-2)+1-y=0$

즉, a 의 값에 관계없이 정점 $(2,\ 1)$ 을 지난다.

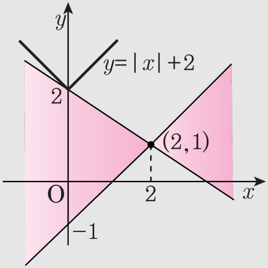
그림에서 교점을 갖지 않으려면

$(0,2),(2,1)$ 을 지나는 직선의 기울기

$\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ 보다 크고

$(0,-1),(2,1)$ 을 지나는 직선의 기울기

1 보다 작거나 같아야 한다.



$\therefore\ -\dfrac{1}{2}<a\le 1$

$\therefore a=0,\quad a=1$

8. 원점에서 직선 $ax+by+4=0$ 까지의 거리가 $\sqrt{2}$ 일 때 a^2+b^2 의 값을 구하면?

① 4 ② 8 ③ $3\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $2\sqrt{3}$

해설

원점 (0, 0) 에서 직선 $ax+by+4=0$ 까지의 거리가 $\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{|a\times 0+b\times 0+4|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{4}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{2}$$

$4=\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}\rightarrow 2(a^2+b^2)=16$

$\therefore\ a^2+b^2=8$

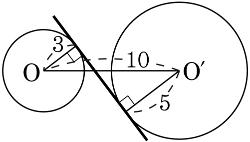
9. x 축에 접하는 원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ 의 중심의 좌표가 $(3, -2)$ 일 때, $a+b+c$ 의 값은?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

중심의 좌표가 $(3,\ -2)$ 인 원이 x 축에 접하므로
반지름의 길이는 2 이다.
따라서, 구하는 원의 방정식은
$(x-3)^2+(y+2)^2=2^2$
$\therefore\ x^2+y^2-6x+4y+9=0$
$\therefore\ a+b+c=-6+4+9=7$

10. 다음 그림의 두 원 O와 O′에서 공통내접선의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

공통내접선의 길이는 $\sqrt{10^2 - (3+5)^2} = 6$

11. 원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 접하고 기울기가 4 인 접선의 방정식은 $y = 4x \pm k$ 이다. k 를 구하면? (단, $k > 0$)

① $2\sqrt{7}$　② $2\sqrt{17}$　③ $5\sqrt{13}$　④ $3\sqrt{17}$　⑤ $3\sqrt{7}$

해설

기울기가 주어진 접선의 방정식
$y = mx \pm r\sqrt{m^2+1}$ 에서
원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 접하고 기울기가 4 인 접선의 방정식은
$y = 4x \pm 3\sqrt{17}$ 이다.

12. 평행이동 $f:(x,y) \to (x-2, y+1)$ 에 의하여 직선 $2x+y+5=0$ 이 이동한 직선의 방정식을 구하면?

① $2x+y+1=0$ ② $2x+y+2=0$ ③ $2x+y+6=0$
④ $2x+y+8=0$ ⑤ $2x+y+9=0$

해설

$x' = x-2, \quad y' = y+1$ 이라 하자.
x, y 를 원래 식에 대입하면,
$2(x'+2)+(y'-1)+5=0$
$\Rightarrow \quad 2x'+y'+8=0$
$\Rightarrow \quad 2x+y+8=0$

13. 점$(1,3)$을 점$(-1,2)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하면?

① $(3,\ -1)$　　② $(-3,\ 1)$　　③ $(1,\ -3)$

④ $(-1,\ 3)$　　⑤ $(-1,\ -3)$

해설

대칭이동한 점을 (a,b)라고 하면
점 (a,b)와 점 $(1,3)$의 중점이
점 $(-1,2)$이므로

$\dfrac{a+1}{2}=-1,\ \dfrac{b+3}{2}=2$에서

$a=-3, b=1$

$\therefore (-3,\ 1)$

14. 점 $(-1,4)$ 가 직선 $y=k(x-1)+2$ 의 아랫부분에 있도록 상수 k 의 값의 범위를 정하면?

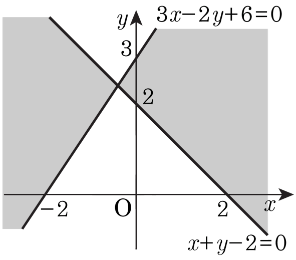
① $k<-2$ ② $k<-1$ ③ $k>3$

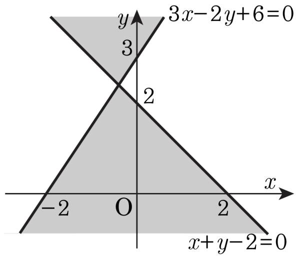
④ $k>2$ ⑤ $k>1$

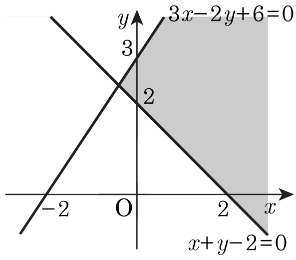
해설

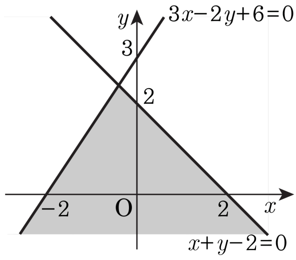
점 $(-1,4)$ 가 직선 $y=k(x-1)+2$ 의 아랫 부분에 있으므로
$4<k(-1-1)+2$, $4<-2k+2$ $\therefore$ $k<-1$

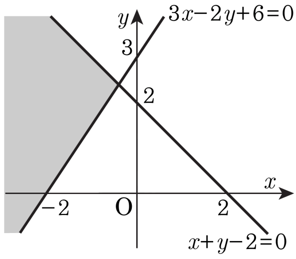
15. 부등식 $(3x-2y+6)(x+y-2) \geq 0$ 의 영역을 좌표평면에 바르게 나타낸 것은?

①


②


③


④


⑤


해설

부등식 $ab > 0$ 은 $a > 0, b > 0$ 또는 $a < 0, b < 0$ 과 동치이다. 따라서 $a = 3x-2y+6$, $b = x+y-2$ 로 놓으면 부등식을 만족하는 영역은

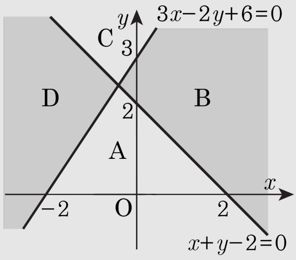
(ㄱ) $a > 0, b > 0$

즉 $a > 0$ 과 $b > 0$ 의 공통부분

(ㄴ) $a < 0, b < 0$

즉 $a < 0$ 과 $b < 0$ 의 공통부분의 양쪽 부분이며

이들을 간단히 구하는 데에는 두 직선 $3x-2y+6=0$, $x+y-2=0$ 으로 좌표평면을 다음 그림과 같이 네 부분으로 나누어 본다.



양의 영역, 음의 영역은 서로 교차해서 나타나므로, 원점 $(0, 0)$ 을 부등식에 대입해 보면

$(3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 6)(0+0-2) = -12 < 0$ 이 되어 점 $(0, 0)$ 은 부등식을 만족하지 않는다.

따라서 영역 A 는 부등식을 만족하지 않으므로 영역 B 는 부등식을 만족하고, 영역 C 는 부등식을 만족하지 않으며, 영역 D 는 부등식을 만족한다.

16. 부등식 $2|x+2|+|x-2|<6$을 만족하는 정수 x의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ＿＿＿＿ 개

▷ 정답 : 2 개

해설

i) $x<-2$일 때

$-2(x+2)-(x-2)<6,\ x>-\frac{8}{3}$

공통부분은 $-\frac{8}{3}<x<-2$

ii) $-2\le x<2$일 때

$2(x+2)-(x-2)<6,\ x<0$

공통부분은 $-2\le x<0$

iii) $x\ge 2$일 때

$2(x+2)+(x-2)<6,\ x<\frac{4}{3}$

공통부분은 없음

i), ii), iii)을 모두 합하면 $-\frac{8}{3}<x<0$

정수 x : $-2,\ -1$ (2개)

17. 이차부등식 $-4x^2+12x-9 \geq 0$의 해는?

① $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$

② $x \leq -\frac{3}{2},\ x \geq \frac{3}{2}$

③ $x \neq \frac{3}{2}$인 모든 실수

④ 해는 없다.

⑤ $x = \frac{3}{2}$

해설

$-4x^2+12x-9 \geq 0$

$\Rightarrow\ 4x^2-12x+9 \leq 0$

$\Rightarrow\ (2x-3)^2 \leq 0$

$\therefore\ x = \frac{3}{2}$

18. 모든 실수 x에 대하여 $x^2 + px + p$가 -3보다 항상 크기 위한 정수 p의 최댓값을 구하면?

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 5

해설

$x^2 + px + p > -3$

$x^2 + px + (p + 3) > 0$

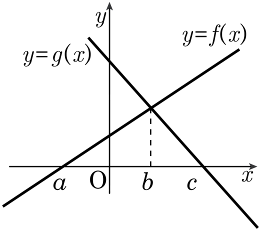
$D = p^2 - 4(p + 3) = p^2 - 4p - 12 < 0$

$(p - 6)(p + 2) < 0$

$-2 < p < 6$

$\therefore$ 최대정수 : 5

19. 두 개의 일차함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차부등식 $f(x)g(x) \ge 0$ 의 해는?



① $a \le x \le b$ ② $a \le x \le c$

③ $b \le x \le c$ ④ $x \le b,\ x \ge c$

⑤ $x \le a,\ x \ge c$

해설

$f(x)g(x) \ge 0$ 을 만족하는 경우는 다음과 같이 두 가지의 경우가 있다.

$f(x) \ge 0,\ g(x) \ge 0$ 또는 $f(x) \le 0$, $g(x) \le 0$

그런데 그래프에서 $f(x) \le 0,\ g(x) \le 0$ 의 경우는 없으므로 $f(x) \ge 0,\ g(x) \ge 0$ 을 만족하는 x 의 범위를 구하면 된다.

주어진 함수의 그래프를 살펴 보면

$x \le a$ 일 때, $f(x) \le 0$, $g(x) \ge 0$

$a \le x \le c$ 일 때, $f(x) \ge 0,\ g(x) \ge 0$

$x \ge c$ 일 때, $f(x) \ge 0,\ g(x) \le 0$

따라서 구하는 해는 $a \le x \le c$

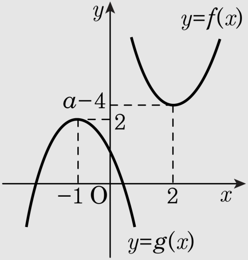
20. 이차함수 $f(x) = x^2 - 4x + a$ 와 $g(x) = -x^2 - 2x + 1$ 이 있다. 임의의 실수 x_1 , x_2 에 대하여 $f(x_1) > g(x_2)$ 일 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $a > 6$ ② $a > 5$ ③ $a > 4$ ④ $a > 3$ ⑤ $a > 2$

해설

$f(x) = x^2 - 4x + a = (x-2)^2 + a - 4$ 에서

$f(x)$ 의 최솟값은 $a - 4$,
$g(x) = -x^2 - 2x + 1$
$= -(x+1)^2 + 2$ 에서
$g(x)$ 의 최댓값은 2
한편, 모든 실수 x_1 , x_2 에 대하여
$f(x_1) > g(x_2)$ 이면 오른쪽 그림과 같이
$f(x)$ 의 최솟값이 $g(x)$ 의 최댓값보다
커야 하므로



$a - 4 > 2$ $\quad \therefore\ a > 6$

21. 좌표평면 위에 서로 다른 세 점 $A(-2k-1, 5)$ $B(k, -k-10)$, $C(2k+5, k-1)$가 일직선 위에 있을 때, k의 값의 곱을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

세 점 A, B, C가 일직선 위에 있으므로
직선 AB와 직선 BC의 기울기는 같다.

$$\frac{-k-10-5}{k-(-2k-1)} = \frac{(k-1)-(-k-10)}{2k+5-k}$$

이 식을 정리하면 $k^2+7k+12=0$
$\therefore$ k의 값의 곱은 12이다.

22. 중심 C 가 직선 $y = 2x + 1$ 위에 있고 두 점 $(2,\ 1),\ (6,\ 5)$ 를 지나는 원의 면적은?

① 10π ② 12π ③ 14π ④ 16π ⑤ 18π

해설

구하는 원을

$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0 \cdots\cdots$ ①라 두면

①은 $(2,\ 1),\ (6,\ 5)$ 를 지나므로

$4 + 1 + 4A + 2B + C = 0 \cdots\cdots\cdots$ ②

$36 + 25 + 12A + 10B + C = 0 \cdots\cdots\cdots$ ③

또한 ①의 중심은 $(-A,\ -B)$ 이므로

$-B = 2 \cdot (-A) + 1 \cdots\cdots\cdots$ ④

②, ③, ④에서 $A = -2,\ B = -5,\ C = 13$ 이고

①의 반지름의 길이는 $\sqrt{A^2 + B^2 - C} = \sqrt{16}$

구하는 원의 면적은 16π

해설

중심 $C(a, 2a + 1)$ 이라 하면

$(x - a)^2 + (y - 2a - 1)^2 = r^2$

$(2,\ 1),\ (6,\ 5)$ 를 지나므로 각각 대입하면

$(2 - a)^2 + (1 - 2a - 1)^2 = r^2 \cdots$ ①

$(6 - a)^2 + (5 - 2a - 1)^2 = r^2 \cdots$ ②

①, ②를 연립해서 풀면 $a = 2$, ①에 대입하면 $r = 4$

23. 두 점 A$(-3,\ 0)$, B$(3,\ 0)$ 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{PB}} = 2 : 1$ 을 만족시키는 점 P$(x,\ y)$ 의 자취의 방정식을 구하면 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 이다. 이때, $a+b+r$ 의 값은? (단, $r > 0$)

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

해설

$\overline{\mathrm{AP}} = 2\overline{\mathrm{PB}}$ 이므로 $\overline{\mathrm{AP}}^2 = 4\overline{\mathrm{PB}}^2$

$(x+3)^2 + y^2 = 4\left\{(x-3)^2 + y^2\right\}$

$3x^2 + 3y^2 - 30x + 27 = 0,\ (x-5)^2 + y^2 = 16$

$\therefore a = 5,\ b = 0,\ r = 4$

$\therefore a + b + r = 5 + 0 + 4 = 9$

24. 두 원 $x^2+y^2-2ay+8a-25=0$ 와 $x^2+y^2=1$ 이 외접할 때 a 의 값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

두 원이 외접하면 중심 사이의 거리와 반지름의 합이 일치한다.

$\Rightarrow \quad x^2+(y-a)^2=a^2-8a+25, \quad x^2+y^2=1$

중심사이의 거리 : a

반지름의 합 : $1+\sqrt{a^2-8a+25}$

$\Rightarrow \quad a-1=\sqrt{a^2-8a+25}$

$\Rightarrow \quad a=4$

25. 6보다 작은 두 양수 x, y에 대하여 세 수 $3,\ x,\ y$가 삼각형의 세 변의 길이가 될 때, 자연수 $x,\ y$의 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수를 구하여라.

▶ **답 :** ＿＿＿ 개

▷ **정답 :** 16 개

해설

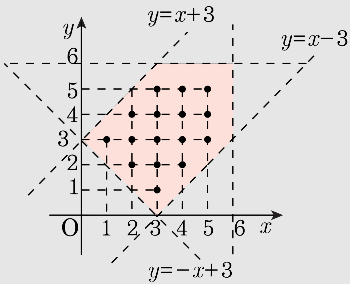
$x,\ y$는 6보다 작은 양수이므로

$0 < x < 6,\ 0 < y < 6 \cdots\cdots$ ㉠

세 수 $3,\ x,\ y$가 삼각형의 세 변의 길이가 되려면 다음 부등식을 모두 만족해야 한다.

$x + y > 3,\ x + 3 > y,\ y + 3 > x \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 영역은 다음 그림의 색칠된 부분과 같다.



이때, 경계선은 제외한다.

따라서, 영역 안에 있는 자연수 $x,\ y$의 값은

$x = 1$일 때, $y = 3$

$x = 2$일 때, $y = 2,\ 3,\ 4$

$x = 3$일 때, $y = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

$x = 4$일 때, $y = 2,\ 3,\ 4,\ 5$

$x = 5$일 때, $y = 3,\ 4,\ 5$이므로

순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는 $1 + 3 + 5 + 4 + 3 = 16$(개)