1. 연립부등식 $\begin{cases} 2x \leq x+4 \\ x^2-4x-5<0 \end{cases}$ 을 만족시키는 정수 x의 개수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5 개

해설

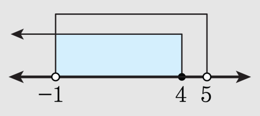
㉠ $2x \leq x+4$,

$\therefore x \leq 4$

㉡ $x^2-4x-5<0$

$\Rightarrow (x-5)(x+1)<0$

$\therefore -1<x<5$



㉠, ㉡의 범위의

공통범위는 $-1<x\leq 4$

$\therefore x=0,1,2,3,4$ 총 5 개

2. 좌표평면 위의 두 점 P(a, 3), Q(1, a)에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{2}$일 때, a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{(1-a)^2 + (a-3)^2} = \sqrt{2a^2 - 8a + 10}$

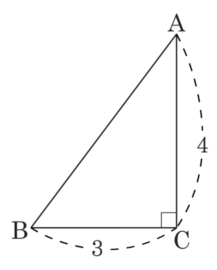
$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{2}$이므로 $\sqrt{2a^2 - 8a + 10} = \sqrt{2}$

양변을 제곱하면 $2a^2 - 8a + 10 = 2$

$2a^2 - 8a + 8 = 0$, $a^2 - 4a + 4 = 0$, $(a-2)^2 = 0$

$\therefore\ a = 2$

3. 다음 그림과 같이 $\overline{BC} = 3$, $\overline{AC} = 4$ 인 직각 삼각형이 있다. 선분 AB를 $2:3$으로 외분하는 점을 P, $3:2$로 외분하는 점을 Q라 할 때, $\overline{CP}^2 + \overline{CQ}^2$ 의 값은?



① 125　② 200　③ 250

④ 325　⑤ 450

해설

점 C를 원점으로 잡으면 점 A, B의 좌표는 각각 $A(0,4)$, $B(-3,0)$이다.

따라서 선분 AB를 $2:3$으로 외분하는 점 P의 좌표는

$$P\left(\frac{2\times(-3)-3\times0}{2-3}, \frac{2\times0-3\times4}{2-3}\right)$$

$= P(6,12)$

선분 AB를 $3:2$로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$Q\left(\frac{3\times(-3)-2\times0}{3-2}, \frac{3\times0-2\times4}{3-2}\right)$$

$= Q(-9,\ -8)$

$$\begin{aligned}\overline{CP}^2 + \overline{CQ}^2 &= (6^2+12^2)+(9^2+8^2)\\ &= 325\end{aligned}$$

4. 평행사변형 ABCD 에서 꼭짓점 $A(-1,\ -2)$, $B(6,\ 4)$, $D(0,\ 2)$ 이고, $\overline{AB}$ 와 $\overline{BC}$ 가 이웃하는 두 변일 때 나머지 한 꼭짓점 C 의 좌표는?

① $C(5,\ 0)$　② $C(0,\ 5)$　③ $C(7,\ 8)$
④ $C(8,\ 7)$　⑤ $C(7,\ 6)$

해설

$C(a, b)$ 라고 하면, 평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 $\overline{AC}$ 의 중점과 $\overline{BD}$ 의 중점은 같다.

$$\left(\frac{-1+a}{2},\ \frac{-2+b}{2}\right) = \left(\frac{6+0}{2},\ \frac{4+2}{2}\right)$$

$-1+a=6,\ -2+b=6$

$\therefore\ a=7,\ b=8$

$\therefore\ C(7, 8)$

5. 점 $(2,\ -1)$ 을 지나고 직선 $y = 2x + 4$ 에 평행한 직선의 방정식은?

① $y = \frac{1}{2}x - 2$ ② $y = 2x - 5$ ③ $y = -2x - 5$
④ $y = 2x + 2$ ⑤ $y = -2x + 5$

해설

$y = 2x + 4$ 와 평행한 직선의 기울기는 2 이다.
따라서 구하는 직선의 방정식은
$y - (-1) = 2(x - 2)$
$\therefore\ y = 2x - 5$

6. 점 $(3,\ 2)$ 를 지나고 직선 $-2x+y+5=0$ 에 평행한 직선의 방정식은?

① $x-y-1=0$
② $2x-y-3=0$
③ $2x-y-4=0$
④ $2x-5y+4=0$
⑤ $-2x+y-4=0$

해설

직선 $-2x+y+5=0$
즉 $y=2x-5$ 와 평행한 직선의 기울기는 2 이다.
이 때, 점 $(3,2)$ 를 지나므로
구하는 직선의 방정식은
$y-2=2(x-3)$, $\therefore\ y=2x-4$
$\therefore\ 2x-y-4=0$

7. 두 직선 $y=3x+2$, $y=4x-1$ 의 교점을 지나는 직선 중 x 절편과 y 절편이 같은 직선을 구하면?

① $x+y-14=0$　　② $-x+y-14=0$

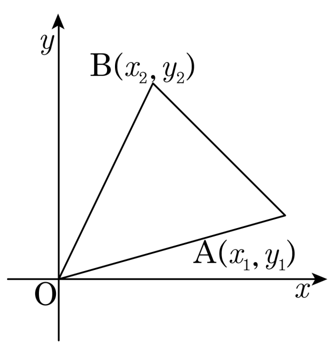
③ $x-y-14=0$　　④ $x+y+14=0$

⑤ $-x+y+14=0$

해설

두 직선 $y=3x+2, y=4x-1$ 의
교점을 지나는 직선은
$(3x-y+2)\cdot m+(4x-y-1)=0$
(m 은 상수) 로 나타낼 수 있다.
$\therefore (3m+4)x-(m+1)y+(2m-1)=0$
$\Leftrightarrow y=\frac{3m+4}{m+1}x+\frac{2m-1}{m+1}$
x 절편과 y 절편이 같으므로
이 직선의 기울기는 -1 이다.
따라서, $\frac{3m+4}{m+1}=-1$
$\therefore m=-\frac{5}{4}$
따라서, 구하는 직선의 방정식은 $x+y-14=0$
(별해)
두 직선의 교점을 구하면 $3x+2=4x-1$ 에서
$x=3,\ y=11$
x 절편, y 절편이 같으면 기울기가 -1 이므로
$y-11=-1(x-3)$
따라서, $y=-x+14$

8. 원점 O(0, 0)와 두 점 A$(x_1,\ y_1)$, B$(x_2,\ y_2)$로 이루어진 삼각형 OAB의 넓이는?



① $\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$ ② $\frac{1}{2}|x_1y_1 - x_2y_2|$ ③ $\frac{1}{2}|x_1y_1 + x_2y_2|$
④ $\frac{1}{2}|x_1x_2 - y_1y_2|$ ⑤ $\frac{1}{2}|x_1x_2 + y_1y_2|$

해설

$\overline{\mathrm{OA}} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

직선 OA의 방정식은 $y = \frac{y_1}{x_1}x$

$\therefore\ y_1x - x_1y = 0$

점 B$(x_2,\ y_2)$에서

직선 $y_1x - x_1y = 0$까지의 거리 h는

$\frac{|y_1x_2 - x_1y_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$ 이다.

$\therefore\ \triangle\mathrm{OAB} = \frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{OA}}\cdot h$

$= \frac{1}{2}\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\cdot\frac{|y_1x_2 - x_1y_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$

$= \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$

9. x, y 에 대한 이차방정식 $x^2 + y^2 - 2kx + 2ky + 3k^2 - 4k + 2 = 0$ 이 반지름의 길이가 1 인 원의 방정식일 때, 상수 k 값의 합을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

주어진 방정식을 변형하면
$(x-k)^2 + (y+k)^2 = -k^2 + 4k - 2 \quad \cdots ㉠$
반지름의 길이가 1 이므로
㉠에서 $-k^2 + 4k - 2 = 1 \leftarrow r^2 = 1$
$k^2 - 4k + 3 = 0, (k-1)(k-3) = 0$
$\therefore k = 1$ 또는 $k = 3$
따라서 합은 4 이다.

10. 세 점 $\mathrm{P}(-1, 4)$, $\mathrm{Q}(3, 6)$, $\mathrm{R}(0, -3)$ 을 꼭짓점으로 하는 $\triangle\mathrm{PQR}$ 의 외접원의 방정식은?

① $x^2 + y^2 - x - 2y - 3 = 0$

② $x^2 + y^2 + 2x - 1y - 10 = 0$

③ $x^2 + y^2 - 4x - 5y - 8 = 0$

④ $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$

⑤ $x^2 + y^2 - 6x - 5y - 20 = 0$

해설

구하는 원의 방정식을 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$
으로 놓으면 이 원이
세 점 $\mathrm{P}(-1, 4)$, $\mathrm{Q}(3, 6)$, $\mathrm{R}(0, -3)$ 을
지나므로 차례로 대입하면

$1 + 16 - A + 4B + C = 0 \quad \cdots ㉠$

$9 + 36 + 3A + 6B + C = 0 \quad \cdots ㉡$

$9 - 3B + C = 0 \quad \cdots ㉢$

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면
$A = -6, B = -2, C = -15$
따라서, 구하는 원의 방정식은
$x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$

11. 방정식 $x^2+y^2-4x+2y+c=0$ 의 그래프가 원이 되도록 상수 c 의 값의 범위를 정하면?

① $c<1$　② $c<2$　③ $c<3$　④ $c<4$　⑤ $c<5$

해설

주어진 방정식을 변형하면

$\left(x^2-4x+4\right)+\left(y^2+2y+1\right)=5-c$

$\therefore (x-2)^2+(y+1)^2=5-c \quad \leftarrow \quad 5-c=r^2$

이 방정식의 그래프가 원이 되려면

$5-c>0 \quad \leftarrow \quad r^2>0$

$\therefore c<5$

12. 원 $x^2+y^2=r^2$ 을 x 축의 방향으로 2 , y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 원의 방정식을 구하여라.

① $(x+2)^2+(y+1)^2=r^2$
② $(x-1)^2+(y+2)^2=r^2$
③ $(x+2)^2+(y-1)^2=r^2$
④ $(x-2)^2+(y-3)^2=r^2$
⑤ $(x+2)^2+(y+3)^2=r^2$

해설

원 $x^2+y^2=r^2 \cdots$ ①
위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 x축의 방향으로 2, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 점을 $\mathrm{P}(x',\ y')$이라 하면

$$\begin{cases} x'=x+2 \\ y'=y+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=x'-2 \\ y=y'-3 \end{cases} \cdots ②$$

②를 ①에 대입하면 $(x'-2)^2+(y'-3)^2=r^2$
점 $\mathrm{P}(x',\ y')$는 평행이동한 원 위의 임의의 점이므로
구하는 방정식은 $(x-2)^2+(y-3)^2=r^2$ 이다.

13. 원 $(x-2)^2+(y+3)^2=4$ 를 원점에 대하여 대칭 이동한 도형의 방정식은?

① $(x-2)^2+(y+3)^2=4$
② $(x+2)^2+(y-3)^2=4$
③ $(x+2)^2+(y+3)^2=4$
④ $(x-2)^2+(y-3)^2=4$
⑤ $(x+3)^2+(y-2)^2=4$

해설
원점대칭은 x , y 부호를 각각 반대로 해주면 된다.
따라서 $x \to -x$, $y \to -y$를 대입한다.

14. 점 $(k, 2)$ 가 직선 $x+y-5=0$ 의 윗부분(경계선 제외)에 있을 때, k 값의 범위를 구하면?

① $k>2$　② $k>3$　③ $k>4$　④ $k>6$　⑤ $k>7$

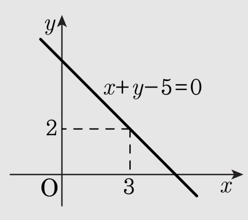
해설

$(k, 2)$ 가 $x+y-5=0$ 을 지날 때를 구해보면,

$\therefore\ k+2-5=0,\ \ k=3$

위쪽에 있으려면

$\therefore\ k>3$

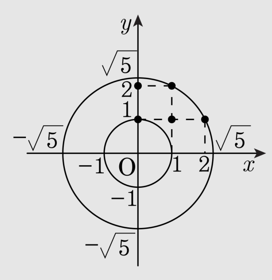


15. 부등식 $1 \leq x^2 + y^2 \leq 5$ 를 만족하는 정수의 쌍 $(x,\ y)$ 의 개수는?

① 11 개 ② 12 개 ③ 16 개 ④ 20 개 ⑤ 24 개

해설

경계를 포함하여 반지름 1 인 원의 외부와
반지름 $\sqrt{5}$ 인원의 내부 사이에 있는 격자점$(x,\ y$ 좌표가 모두 정수인점$)$의 개수를 헤아려야 한다. 양 축에 대하여 대칭이므로 x 축과 제 1 사분면에있는 부분의 개수만 헤아려서 4 배 하면 된다.



점의 개수는 5 개이므로 구하는 격자점의 개수는 20 개

16. $64 \le 16x - x^2$ 의 해를 구하면?

① $4 \le x \le 8$ ② $x = 8$ ③ 해는 없다.

④ 모든 실수 ⑤ $x \le 8$

해설

$64 \le 16x - x^2$

$x^2 - 16x + 64 \le 0$

$\Rightarrow \quad (x-8)^2 \le 0$

$\Rightarrow \quad x = 8$

17. 임의의 실수 x에 대하여 $x^2 + 2ax + 2a + 3 \geq 0$이 성립하기 위한 상수 a의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2 + 2ax + 2a + 3 \geq 0$이 항상 성립할 조건은

$D/4 = a^2 - 2a - 3 = (a+1)(a-3) \leq 0$

$\therefore -1 \leq a \leq 3$

a의 최솟값은 -1

18. 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $\frac{1}{14}<x<\frac{1}{10}$일 때, 부등식 $4cx^2-2bx+a>0$을 만족시키는 x의 값의 범위를 구하면?

① $-7<x<-5$　② $-5<x<-3$　③ $-3<x<-1$
④ $5<x<7$　⑤ $7<x<9$

해설

$ax^2+bx+c>0$의 해가
$\frac{1}{14}<x<\frac{1}{10}$이므로 $a<0$
$\left(x-\frac{1}{14}\right)\left(x-\frac{1}{10}\right)<0$에서
$(14x-1)(10x-1)<0$
$\therefore\ -140x^2+24x-1>0$
$a=-140k,\ b=24k,\ c=-k$라 놓고
(단, $k>0 \leftarrow a<0$)
$4cx^2-2bx+a>0$에 대입하면
$-4kx^2-2\cdot 24kx-140k>0$
$x^2+12x+35<0$
$\therefore\ (x+7)(x+5)<0\quad \therefore -7<x<-5$

19. x에 대한 이차부등식 $x^2-10x-24 \geq 0$, $(x+1)(x-a^2+a) \leq 0$을 동시에 만족하는 x의 값의 존재하지 않도록 상수 a의 값의 범위는?

① $-3<a<12$ ② $-3<a<8$ ③ $-3<a<4$
④ $-2<a<12$ ⑤ $-2<a<3$

해설

$$\begin{cases} x^2-10x-24 \geq 0 \cdots \text{(가)} \\ (x+1)(x-a^2+a) \leq \cdots \text{(나)} \end{cases}$$

(가)에서

$$\begin{cases} (x-12)(x+2) \geq 0 \\ \therefore x \leq -2 \text{또는} x \geq 12 \end{cases}$$

(가)와 (나)의 공통 범위가
존재하지 않으려면 다음 그림에서

$$\underbrace{-2 < a^2-a}_{\text{(다)}} \qquad \underbrace{a^2-a < 12}_{\text{(라)}}$$

(다)에서

$a^2-a+2>0, \left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$

∴모든 실수
(라)에서
$a^2-a-12<0, (a+3)(a-4)<0$
$\therefore -3<a<4$
따라서 (다)와 (라)의 공통 범위를 구하면
$-3<a<4$

20. A$(-2,3)$, B$(4,3)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P의 좌표를 구하면?

① $(-2,0)$　② $(-1,0)$　③ $(0,0)$
④ $(1,0)$　⑤ $(2,0)$

해설

점 P를 $(a,0)$이라 하자.

$\overline{\text{AP}}^2=\overline{\text{BP}}^2$이므로

$(a+2)^2+(0-3)^2=(a-4)^2+(0-3)^2$

$\therefore\ a=1$

$\therefore\ P=(1,0)$

21. 중심이 직선 $3x+y=12$의 제1사분면 위에 있고, x축과 y축에 동시에 접하는 원의 방정식을 구하면?

① $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ ② $(x-2)^2+(y-2)^2=4$

③ $(x-3)^2+(y-3)^2=9$ ④ $(x-4)^2+(y-4)^2=16$

⑤ $(x-5)^2+(y-5)^2=25$

해설

x축 및 y축에 동시에 접하므로 구하는 원의 방정식은
$(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$으로 나타낼 수 있다.
중심이 $a, -3a+12$를 지나므로 $a=-3a+12$이다.
따라서 $a=3$,
구하는 원의 방정식은 $(x-3)^2+(y-3)^2=9$이다.

22. 다음 원과 직선의 교점의 개수를 구하여라.

$x^2 + y^2 = 4, \quad y = x + 3$

▶ 답 : ________ 개

▷ 정답 : 0개

해설

원의 중심 $(0, 0)$ 에서 직선 $y = x + 3$ 까지의 거리를 d 라 하면,

$d = \dfrac{|3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

이때, $d = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} > 2 = r$

이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

$\therefore$ 교점의 개수 : 0 개

23. 점 $(3,\ -1)$에서 원 $x^2+y^2=5$에 그은 접선의 방정식 중 기울기가 음수인 것의 y절편을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

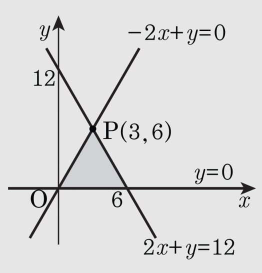
점 $(3,\ -1)$을 지나고 접선의 기울기를 m이라고 하면
접선은 $y+1=m(x-3)\cdots$①
따라서 원의 중심$(0,0)$에서 직선
$mx-y-3m-1=0$ 과의 거리가
원의 반지름 $\sqrt{5}$와 같다.
$\frac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$, $|-3m-1|=\sqrt{5}\sqrt{m^2+1}$
양변을 제곱하면
$9m^2+6m+1=5m^2+5,\ 4m^2+6m-4=0$
따라서, 기울기 $m=\frac{1}{2},-2$
여기서 기울기가 음수인 -2를 ①에 대입하면
$y=-2x+5$
따라서 y절편은 5이다.

24. 세 부등식 $2x+y \le 12$, $-2x+y \le 0$, $y \ge 0$ 을 동시에 만족시키는 영역의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설



구하는 영역 $2x+y \le 12$,
$-2x+y \le 0$, $y \ge 0$ 은
세 직선으로 둘러싸인 빗금친 부분이다.
교점 P 를 구하면
연립방정식
$-2x+y=0$, $2x+y=12$ 의 근이므로
$P(3,\ 6)$

구하는 면적은 $\frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18$

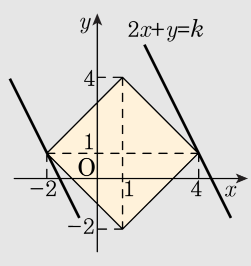
25. 부등식 $|x-1|+|y-1| \leq 3$ 을 만족시키는 x, y 에 대하여 $2x+y$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 한다. $M+m$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

부등식 $|x-1|+|y-1| \leq 3$ 을 만족시키는 x, y 는 다음 그림과 같이 마름모의 내부이다.



이 때, $2x+y=k$ 라 놓고 부등식의 영역 위를 움직여 보면,

점 $(-2,\ 1)$ 를 지날 때, k 의 값이 최소,

$\therefore\ m=-3$

점 $(4,\ 1)$ 를 지날 때, k 의 값이 최대, $\therefore\ M=9$

$\therefore\ M+m=6$