1. 연립부등식 $\begin{cases} 2x \le x+4 \\ x^2-4x-5<0 \end{cases}$ 을 만족시키는 정수 x의 개수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5 개

해설

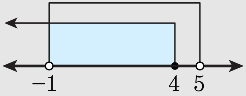
㉠ $2x \le x+4$,

$\therefore x \le 4$

㉡ $x^2-4x-5<0$

$\Rightarrow (x-5)(x+1)<0$

$\therefore -1<x<5$



㉠, ㉡의 범위의

공통범위는 $-1<x\le 4$

$\therefore x=0,1,2,3,4$ 총 5 개

2. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{P}(a,\ 3),\ \mathrm{Q}(1,\ a)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{2}$ 일 때, a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{(1-a)^2 + (a-3)^2} = \sqrt{2a^2 - 8a + 10}$

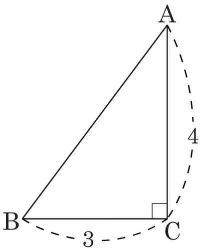
$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{2}$이므로 $\sqrt{2a^2 - 8a + 10} = \sqrt{2}$

양변을 제곱하면 $2a^2 - 8a + 10 = 2$

$2a^2 - 8a + 8 = 0,\ a^2 - 4a + 4 = 0\ ,\ (a-2)^2 = 0$

$\therefore\ a = 2$

3. 다음 그림과 같이 $\overline{BC}=3$, $\overline{AC}=4$ 인 직각삼각형이 있다. 선분 AB를 $2:3$으로 외분하는 점을 P, $3:2$로 외분하는 점을 Q라 할 때, $\overline{CP}^2+\overline{CQ}^2$의 값은?



① 125 ② 200 ③ 250
④ 325 ⑤ 450

해설

점 C를 원점으로 잡으면 점 A, B의 좌표는
각각 $A(0,4)$, $B(-3,0)$이다.
따라서 선분 AB를 $2:3$으로
외분하는 점 P의 좌표는

$$P\left(\frac{2\times(-3)-3\times0}{2-3}, \frac{2\times0-3\times4}{2-3}\right)$$

$=P(6,12)$
선분 AB를 $3:2$로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$Q\left(\frac{3\times(-3)-2\times0}{3-2}, \frac{3\times0-2\times4}{3-2}\right)$$

$=Q(-9,\ -8)$

$$\begin{aligned}\overline{CP}^2+\overline{CQ}^2 &= (6^2+12^2)+(9^2+8^2)\\ &=325\end{aligned}$$

4. 평행사변형 ABCD에서 꼭짓점 $A(-1,\ -2)$, $B(6,\ 4)$, $D(0,\ 2)$이고, $\overline{AB}$와 $\overline{BC}$가 이웃하는 두 변일 때 나머지 한 꼭짓점 C의 좌표는?

① $C(5,\ 0)$ ② $C(0,\ 5)$ ③ $C(7,\ 8)$

④ $C(8,\ 7)$ ⑤ $C(7,\ 6)$

해설

$C(a, b)$ 라고 하면, 평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 $\overline{AC}$의 중점과 $\overline{BD}$의 중점은 같다.

$$\left(\frac{-1+a}{2},\ \frac{-2+b}{2}\right) = \left(\frac{6+0}{2},\ \frac{4+2}{2}\right)$$

$-1+a=6,\ -2+b=6$

$\therefore\ a=7,\ b=8$

$\therefore\ C(7, 8)$

5. 점 $(2,\ -1)$ 을 지나고 직선 $y = 2x + 4$ 에 평행한 직선의 방정식은?

① $y = \dfrac{1}{2}x - 2$ ② $y = 2x - 5$ ③ $y = -2x - 5$

④ $y = 2x + 2$ ⑤ $y = -2x + 5$

해설

$y = 2x + 4$ 와 평행한 직선의 기울기는 2 이다.
따라서 구하는 직선의 방정식은

$y - (-1) = 2(x - 2)$

$\therefore\ y = 2x - 5$

6. 점 $(3,\ 2)$ 를 지나고 직선 $-2x+y+5=0$ 에 평행한 직선의 방정식은?

① $x-y-1=0$

② $2x-y-3=0$

③ $2x-y-4=0$

④ $2x-5y+4=0$

⑤ $-2x+y-4=0$

해설

직선 $-2x+y+5=0$

즉 $y=2x-5$ 와 평행한 직선의 기울기는 2 이다.

이 때, 점 $(3, 2)$ 를 지나므로

구하는 직선의 방정식은

$y-2=2(x-3), \quad \therefore\ y=2x-4$

$\therefore\ 2x-y-4=0$

7. 두 직선 $y = 3x + 2$, $y = 4x - 1$ 의 교점을 지나는 직선 중 x 절편과 y 절편이 같은 직선을 구하면?

① $x + y - 14 = 0$ ② $-x + y - 14 = 0$

③ $x - y - 14 = 0$ ④ $x + y + 14 = 0$

⑤ $-x + y + 14 = 0$

해설

두 직선 $y = 3x + 2, y = 4x - 1$ 의
교점을 지나는 직선은
$(3x - y + 2) \cdot m + (4x - y - 1) = 0$
(m 은 상수) 로 나타낼 수 있다.
$\therefore (3m + 4)x - (m + 1)y + (2m - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow y = \frac{3m + 4}{m + 1}x + \frac{2m - 1}{m + 1}$$

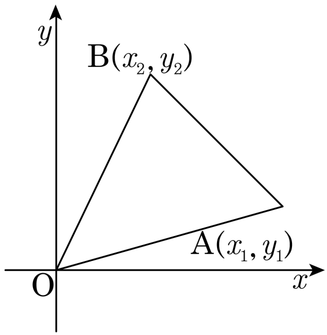
x 절편과 y 절편이 같으므로
이 직선의 기울기는 -1 이다.

따라서, $\dfrac{3m + 4}{m + 1} = -1$

$\therefore m = -\dfrac{5}{4}$

따라서, 구하는 직선의 방정식은 $x + y - 14 = 0$
(별해)
두 직선의 교점을 구하면 $3x + 2 = 4x - 1$ 에서
$x = 3,\ y = 11$
x 절편, y 절편이 같으면 기울기가 -1 이므로
$y - 11 = -1(x - 3)$
따라서, $y = -x + 14$

8. 원점 O(0, 0)와 두 점 A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)로 이루어진 삼각형 OAB의 넓이는?



① $\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$ ② $\frac{1}{2}|x_1y_1 - x_2y_2|$ ③ $\frac{1}{2}|x_1y_1 + x_2y_2|$
④ $\frac{1}{2}|x_1x_2 - y_1y_2|$ ⑤ $\frac{1}{2}|x_1x_2 + y_1y_2|$

해설

$\overline{\mathrm{OA}} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

직선 OA의 방정식은 $y = \frac{y_1}{x_1}x$

$\therefore\ y_1x - x_1y = 0$

점 B(x_2, y_2)에서

직선 $y_1x - x_1y = 0$까지의 거리 h는

$\frac{|y_1x_2 - x_1y_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$ 이다.

$\therefore\ \triangle\mathrm{OAB} = \frac{1}{2} \cdot \overline{\mathrm{OA}} \cdot h$

$= \frac{1}{2}\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \frac{|y_1x_2 - x_1y_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$

$= \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$

9. x, y 에 대한 이차방정식 $x^2 + y^2 - 2kx + 2ky + 3k^2 - 4k + 2 = 0$ 이 반지름의 길이가 1 인 원의 방정식일 때, 상수 k 값의 합을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

주어진 방정식을 변형하면

$(x-k)^2 + (y+k)^2 = -k^2 + 4k - 2 \quad \cdots ㉠$

반지름의 길이가 1 이므로

㉠에서 $-k^2 + 4k - 2 = 1 \leftarrow r^2 = 1$

$k^2 - 4k + 3 = 0, (k-1)(k-3) = 0$

$\therefore k = 1$ 또는 $k = 3$

따라서 합은 4이다.

10. 세 점 $\mathrm{P}(-1,4)$, $\mathrm{Q}(3,6)$, $\mathrm{R}(0,-3)$ 을 꼭짓점으로 하는 $\triangle\mathrm{PQR}$ 의 외접원의 방정식은?

① $x^2+y^2-x-2y-3=0$

② $x^2+y^2+2x-1y-10=0$

③ $x^2+y^2-4x-5y-8=0$

④ $x^2+y^2-6x-2y-15=0$

⑤ $x^2+y^2-6x-5y-20=0$

해설

구하는 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$
으로 놓으면 이 원이
세 점 $\mathrm{P}(-1,4)$, $\mathrm{Q}(3,6)$, $\mathrm{R}(0,-3)$을
지나므로 차례로 대입하면

$1+16-A+4B+C=0 \quad \cdots ㉠$

$9+36+3A+6B+C=0 \quad \cdots ㉡$

$9-3B+C=0 \quad \cdots ㉢$

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면
$A=-6, B=-2, C=-15$
따라서, 구하는 원의 방정식은
$x^2+y^2-6x-2y-15=0$

11. 방정식 $x^2+y^2-4x+2y+c=0$ 의 그래프가 원이 되도록 상수 c 의 값의 범위를 정하면?

① $c<1$ ② $c<2$ ③ $c<3$ ④ $c<4$ ⑤ $c<5$

해설

주어진 방정식을 변형하면

$\left(x^2-4x+4\right)+\left(y^2+2y+1\right)=5-c$

$\therefore (x-2)^2+(y+1)^2=5-c \quad \leftarrow \quad 5-c=r^2$

이 방정식의 그래프가 원이 되려면

$5-c>0 \quad \leftarrow \quad r^2>0$

$\therefore c<5$

12. 원 $x^2+y^2=r^2$ 을 x 축의 방향으로 2 , y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 원의 방정식을 구하여라.

① $(x+2)^2+(y+1)^2=r^2$

② $(x-1)^2+(y+2)^2=r^2$

③ $(x+2)^2+(y-1)^2=r^2$

④ $(x-2)^2+(y-3)^2=r^2$

⑤ $(x+2)^2+(y+3)^2=r^2$

해설

원 $x^2+y^2=r^2 \cdots$ ①

위의 임의의 점 $P(x,\ y)$를 x축의 방향으로 2, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 점을 $P(x',\ y')$이라 하면

$$\begin{cases} x'=x+2 \\ y'=y+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=x'-2 \\ y=y'-3 \end{cases} \cdots ②$$

②를 ①에 대입하면 $(x'-2)^2+(y'-3)^2=r^2$

점 $P(x',\ y')$는 평행이동한 원 위의 임의의 점이므로

구하는 방정식은 $(x-2)^2+(y-3)^2=r^2$ 이다.

13. 원 $(x-2)^2+(y+3)^2=4$ 를 원점에 대하여 대칭 이동한 도형의 방정식은?

① $(x-2)^2+(y+3)^2=4$

② $(x+2)^2+(y-3)^2=4$

③ $(x+2)^2+(y+3)^2=4$

④ $(x-2)^2+(y-3)^2=4$

⑤ $(x+3)^2+(y-2)^2=4$

해설

원점대칭은 x , y 부호를 각각 반대로 해주면 된다.
따라서 $x \to -x$, $y \to -y$를 대입한다.

14. 점 $(k, 2)$ 가 직선 $x+y-5=0$ 의 윗부분(경계선 제외)에 있을 때, k 값의 범위를 구하면?

① $k>2$ ② $k>3$ ③ $k>4$ ④ $k>6$ ⑤ $k>7$

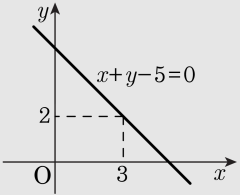
해설

$(k, 2)$ 가 $x+y-5=0$ 을 지날 때를 구해보면,

$\therefore\ k+2-5=0,\quad k=3$

위쪽에 있으려면

$\therefore\ k>3$

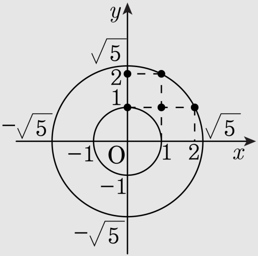


15. 부등식 $1 \le x^2 + y^2 \le 5$ 를 만족하는 정수의 쌍 $(x,\ y)$ 의 개수는?

① 11 개 ② 12 개 ③ 16 개 ④ 20 개 ⑤ 24 개

해설

경계를 포함하여 반지름 1 인 원의 외부와
반지름 $\sqrt{5}$ 인원의 내부 사이에 있는 격자점(x, y 좌표가 모두 정수인점) 의 개수를 헤아려야 한다. 양 축에 대하여 대칭이므로 x 축과 제 1 사분면에있는 부분의 개수만 헤아려서 4 배 하면 된다.



점의 개수는 5 개이므로 구하는 격자점의 개수는 20 개

16. $64 \le 16x - x^2$ 의 해를 구하면?

① $4 \le x \le 8$ ② $x = 8$ ③ 해는 없다.

④ 모든 실수 ⑤ $x \le 8$

해설

$64 \le 16x - x^2$

$x^2 - 16x + 64 \le 0$

$\Rightarrow \quad (x-8)^2 \le 0$

$\Rightarrow \quad x = 8$

17. 임의의 실수 x에 대하여 $x^2+2ax+2a+3\geq 0$이 성립하기 위한 상수 a의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2+2ax+2a+3\geq 0$이 항상 성립할 조건은

$D/4=a^2-2a-3=(a+1)(a-3)\leq 0$

$\therefore -1\leq a\leq 3$

a의 최솟값은 -1

18. 이차부등식 $ax^2 + bx + c > 0$의 해가 $\frac{1}{14} < x < \frac{1}{10}$일 때, 부등식 $4cx^2 - 2bx + a > 0$을 만족시키는 x의 값의 범위를 구하면?

① $-7 < x < -5$　② $-5 < x < -3$　③ $-3 < x < -1$

④ $5 < x < 7$　⑤ $7 < x < 9$

해설

$ax^2 + bx + c > 0$의 해가

$\frac{1}{14} < x < \frac{1}{10}$이므로 $a < 0$

$\left(x - \frac{1}{14}\right)\left(x - \frac{1}{10}\right) < 0$에서

$(14x - 1)(10x - 1) < 0$

$\therefore\ -140x^2 + 24x - 1 > 0$

$a = -140k,\ b = 24k,\ c = -k$라 놓고

(단, $k > 0 \leftarrow a < 0$)

$4cx^2 - 2bx + a > 0$에 대입하면

$-4kx^2 - 2 \cdot 24kx - 140k > 0$

$x^2 + 12x + 35 < 0$

$\therefore\ (x + 7)(x + 5) < 0\quad \therefore -7 < x < -5$

19. x에 대한 이차부등식 $x^2-10x-24 \geq 0$, $(x+1)(x-a^2+a) \leq 0$을 동시에 만족하는 x의 값의 존재하지 않도록 상수 a의 값의 범위는?

① $-3 < a < 12$ ② $-3 < a < 8$ ③ $-3 < a < 4$

④ $-2 < a < 12$ ⑤ $-2 < a < 3$

해설

$$\begin{cases} x^2-10x-24 \geq 0 \cdots \text{(가)} \\ (x+1)(x-a^2+a) \leq \cdots \text{(나)} \end{cases}$$

(가)에서

$$\begin{cases} (x-12)(x+2) \geq 0 \\ \therefore x \leq -2 \text{또는} x \geq 12 \end{cases}$$

(가)와 (나)의 공통 범위가
존재하지 않으려면 다음 그림에서

$$\underbrace{-2 < a^2-a}_{\text{(다)}} \underbrace{\ < 12}_{\text{(라)}}$$

(다)에서

$$a^2-a+2>0,\ \left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$$

$\therefore$ 모든 실수
(라)에서

$a^2-a-12<0, (a+3)(a-4)<0$

$\therefore -3 < a < 4$

따라서 (다)와 (라)의 공통 범위를 구하면

$-3 < a < 4$

20. $\mathrm{A}(-2,3), \mathrm{B}(4,3)$ 에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P의 좌표를 구하면?

① $(-2,0)$ ② $(-1,0)$ ③ $(0,0)$

④ $(1,0)$ ⑤ $(2,0)$

해설

점 P를 $(\alpha, 0)$이라 하자.

$\overline{\mathrm{AP}}^2 = \overline{\mathrm{BP}}^2$ 이므로

$(\alpha+2)^2 + (0-3)^2 = (\alpha-4)^2 + (0-3)^2$

$\therefore\ \alpha = 1$

$\therefore\ P = (1,0)$

21. 중심이 직선 $3x+y=12$의 제1사분면 위에 있고, x축과 y축에 동시에 접하는 원의 방정식을 구하면?

① $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ ② $(x-2)^2+(y-2)^2=4$

③ $(x-3)^2+(y-3)^2=9$ ④ $(x-4)^2+(y-4)^2=16$

⑤ $(x-5)^2+(y-5)^2=25$

해설

x축 및 y축에 동시에 접하므로 구하는 원의 방정식은
$(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$ 으로 나타낼 수 있다.
중심이 $a, -3a+12$를 지나므로 $a=-3a+12$이다.
따라서 $a=3$,
구하는 원의 방정식은 $(x-3)^2+(y-3)^2=9$이다.

22. 다음 원과 직선의 교점의 개수를 구하여라.

$$x^2 + y^2 = 4, \quad y = x + 3$$

▶ **답 :** 개

▷ **정답 :** 0 개

해설

원의 중심 $(0, 0)$ 에서 직선 $y = x + 3$ 까지의 거리를 d 라 하면,

$$d = \frac{|3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

이때, $d = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} > 2 = r$

이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

$\therefore$ 교점의 개수 : 0 개

23. 점 $(3,\ -1)$에서 원 $x^2+y^2=5$에 그은 접선의 방정식 중 기울기가 음수인 것의 y절편을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $(3,\ -1)$을 지나고 접선의 기울기를 m이라고 하면
접선은 $y+1=m(x-3)\cdots①$
따라서 원의 중심$(0,0)$에서 직선
$mx-y-3m-1=0$과의 거리가
원의 반지름 $\sqrt{5}$와 같다.
$\frac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$, $|-3m-1|=\sqrt{5}\sqrt{m^2+1}$
양변을 제곱하면
$9m^2+6m+1=5m^2+5$, $4m^2+6m-4=0$
따라서, 기울기 $m=\frac{1}{2},-2$
여기서 기울기가 음수인 -2를 ①에 대입하면
$y=-2x+5$
따라서 y절편은 5이다.

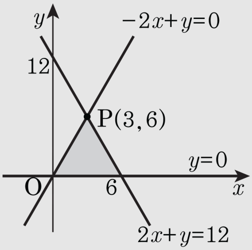
24. 세 부등식 $2x+y \le 12$, $-2x+y \le 0$, $y \ge 0$ 을 동시에 만족시키는 영역의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

구하는 영역 $2x+y \le 12$,
$-2x+y \le 0$, $y \ge 0$은
세 직선으로 둘러싸인 빗금친 부분이다.
교점 P를 구하면
연립방정식
$-2x+y=0$, $2x+y=12$ 의 근이므로
P(3, 6)



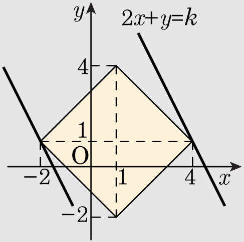
구하는 면적은 $\frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18$

25. 부등식 $|x-1|+|y-1| \leq 3$ 을 만족시키는 x, y 에 대하여 $2x+y$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 한다. $M+m$ 의 값을 구하면?

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 6

해설



부등식 $|x-1|+|y-1| \leq 3$ 을 만족시키는 x, y 는 다음 그림과 같이 마름모의 내부이다.

이 때, $2x+y=k$ 라 놓고 부등식의 영역 위를 움직여 보면,

점 $(-2,\ 1)$ 를 지날 때, k 의 값이 최소,

$\therefore\ \ m=-3$

점 $(4,\ 1)$ 를 지날 때, k 의 값이 최대, $\therefore\ \ M=9$

$\therefore\ \ M+m=6$