

1. 이차함수 $y = x^2 + ax + 2$ 의 최솟값이 2 일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$\begin{aligned}y &= x^2 + ax + 2 \\&= \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + 2 \\-\frac{a^2}{4} + 2 &= 2 \\ \therefore a &= 0\end{aligned}$$

2. 이차함수 $y = x^2 + 2bx + c$ 가 $x = 1$ 에서 최솟값 3 을 가질 때, $b + c$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$x = 1$ 일 때, 최솟값 3 을 가지므로 꼭짓점의 좌표는 $(1, 3)$ 이다.

$$y = x^2 + 2bx + c$$

$$= (x - 1)^2 + 3$$

$$= x^2 - 2x + 4 \quad \therefore b = -1, c = 4$$

$$\therefore b + c = 3$$

3. 이차함수 $y = ax^2 + 4x + 2$ 에서 $|a| = 1$ 일 때, 각각의 최솟값과 최댓값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + 4x + 2 \\ &= a \left(x + \frac{2}{a} \right)^2 - \frac{4}{a} + 2 \end{aligned}$$

$a = 1$ 일 때, $-\frac{4}{1} + 2$ 를 최솟값, $a = -1$ 일 때 $\frac{4}{1} + 2$ 를 최댓값으로 갖는다.

$$\therefore (-2) + 6 = 4$$

4. 길이가 30m 인 철사를 구부려서 부채꼴 모양을 만들려고 한다. 부채꼴의 넓이가 최대가 되도록 하는 부채꼴의 반지름의 길이를 구하면?

- ① $\frac{15}{2}$ m ② 8m ③ $\frac{17}{2}$ m ④ 3m ⑤ 5m

해설

부채꼴의 넓이를 $y\text{m}^2$, 반지름의 길이를 $x\text{m}$ 라 하면

$y = \frac{1}{2} \times x \times (30 - 2x)$ 이다.

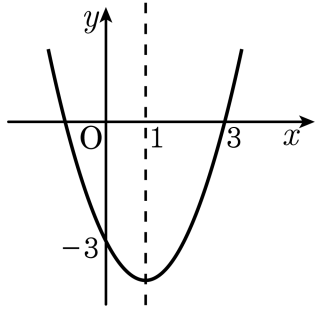
$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \times x \times (30 - 2x) \\ &= x(15 - x) \\ &= -x^2 + 15x \\ &= -\left(x^2 - 15x + \frac{225}{4} - \frac{225}{4}\right) \\ &= -\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 + \frac{225}{4} \end{aligned}$$

이차함수는 위로 볼록이므로 꼭짓점이 최댓값을 나타낸다.

따라서 꼭짓점이 $\left(\frac{15}{2}, \frac{225}{4}\right)$ 이므로 반지름의 길이가 $\frac{15}{2}\text{m}$ 일

때, 부채꼴의 넓이가 최댓값 $\frac{225}{4}\text{m}^2$ 을 가진다.

5. 다음 그림은 직선 $x = 1$ 을 축으로 하는 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프이다. 이 때, $a + b + c$ 의 값은?



- ① -4 ② -1 ③ 0 ④ 2 ⑤ 5

해설

$y = a(x - 1)^2 + q$
 $x = 0$ 일 때, $a + q = -3$ (1)
 $x = 3$ 일 때, $4a + q = 0$ (2)
(2)에서 (1)을 빼면, $3a = 3$
 $\therefore a = 1, q = -4$
 $y = (x - 1)^2 - 4 = x^2 - 2x - 3$
따라서 $x = 1$ 일 때, $y = a + b + c = -4$ 이다.

6. 이차함수 $y = 2x^2 - 8x + 3a - 4$ 의 최솟값은 -5 보다 크고, 그 그래프가 점 $(2a, 8a + 5)$ 를 지날 때, 상수 a 의 값은?

- ① -3 ② $-\frac{3}{8}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ 3 ⑤ 6

해설

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 - 8x + 3a - 4 \\ &= 2(x^2 - 4x + 4 - 4) + 3a - 4 \\ &= 2(x - 2)^2 - 12 + 3a \end{aligned}$$

$y = 2(x - 2)^2 - 12 + 3a$ 의 그래프가 점 $(2a, 8a + 5)$ 를 지나므로

$$8a + 5 = 2(2a - 2)^2 - 12 + 3a$$

$$8a^2 - 21a - 9 = 0, (8a + 3)(a - 3) = 0$$

$$\therefore a = -\frac{3}{8} \text{ 또는 } 3$$

그런데 최댓값 $-12 + 3a > -5$ 이므로

$$i) a = -\frac{3}{8} \text{ 대입 :}$$

$$-12 + 3 \times \left(-\frac{3}{8}\right) = -12 - \frac{9}{8} = -\frac{105}{8} < -5$$

$$ii) a = 3 \text{ 대입 : } -12 + 3 \times 3 = -12 + 9 = -3 > -5$$

따라서 $a = 3$ 이다.

7. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$ 의 그래프와 모양이 같고 $x = -2$ 일 때 최댓값 3 을 갖는다. 이 때 $a + b + c$ 의 값을 구하면?

- ① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 3 \\ &= -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$$

$$\therefore a = -\frac{1}{2}, b = -2, c = 1$$

$$\therefore a + b + c = \left(-\frac{1}{2}\right) + (-2) + 1 = -\frac{3}{2}$$

8. $x + y = 10$ 일 때, $x^2 + y^2$ 의 최솟값을 구하면?

① 10

② 24

③ 40

④ 45

⑤ 50

해설

$$y = 10 - x$$

$$x^2 + y^2 = x^2 + (10 - x)^2$$

$$= x^2 + x^2 - 20x + 100$$

$$= 2x^2 - 20x + 100$$

$$= 2(x^2 - 10x + 25 - 25) + 100$$

$$= 2(x - 5)^2 + 50$$

따라서 $x = 5$ 일 때 최솟값은 50 이다.

9. 지면으로부터 60m 높이에서 쏘아올린 물체의 x 초 후의 높이를 y m 라 하면 $y = -5x^2 + 20x + 60$ 인 관계가 있다. 최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간과 지면에 다시 떨어질 때까지 걸리는 시간을 각각 구하면?

- ① 1 초, 3 초 ② 2 초, 4 초 ③ 2 초, 6 초
④ 3 초, 6 초 ⑤ 3 초, 8 초

해설

최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간은
 $y = -5x^2 + 20x + 60 = -5(x - 2)^2 + 80$ 이므로
 $x = 2$ 일 때 y 의 최댓값은 80
따라서 2 초 후이다.
지면에 떨어질 때 $y = 0$ 이다.
 $0 = -5x^2 + 20x + 60$
 $-5(x^2 - 4x - 12) = 0$
 $-5(x - 6)(x + 2) = 0$
그런데, $x > 0$ 이므로 $x = 6$
즉, 6 초 후에 지면에 떨어진다.

10. 두 실수 x, y 에 대하여 $\frac{x^2}{3} + (y - 2)^2 = 1$ 이 성립할 때, $x^2 + y^2$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$\frac{x^2}{3} + (y - 2)^2 = 1$ 에서 $x^2 = -3y^2 + 12y - 9$ 를 주어진 식에

대입하면

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= x^2 + (-3y^2 + 12y - 9) + y^2 \\ &= -2y^2 + 12y - 9 \\ &= -2(y - 3)^2 + 9 \end{aligned}$$

그런데 x, y 는 실수이므로

$$x^2 = -3y^2 + 12y - 9 \geq 0$$

$-3y^2 + 12y - 9 \geq 0, y^2 - 4y + 3 \leq 0$ 이므로 $1 \leq y \leq 3$ 이다.

따라서 $x^2 + y^2$ 는 $y = 1$ 일 때 최솟값이 1, $y = 3$ 일 때 최댓값이 9 이므로 구하는 값은 $1 + 9 = 10$ 이다.

11. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 두 점 $(-4, 0)$, $(2, 0)$ 을 지나고
최솟값이 -3 일 때, 상수 a, b, c 의 값을 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = \frac{1}{3}$

▷ 정답 : $b = \frac{2}{3}$

▷ 정답 : $c = -\frac{8}{3}$

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 두 점 $(-4, 0)$, $(2, 0)$ 을 각각 지나므로

$$16a - 4b + c = 0$$

$$4a + 2b + c = 0$$

$$\therefore b = 2a, c = -8a$$

또 주어진 함수의 최솟값이 -3 이므로

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c \\ &= ax^2 + 2ax - 8a \\ &= a(x+1)^2 - 9a \end{aligned}$$

$$\therefore -9a = -3$$

따라서 $a = \frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}, c = -\frac{8}{3}$ 이다.

12. 이차함수 $y = x^2 + kx - 2k$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값과 그 때의 k 의 값을 각각 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $m = 4$

▷ 정답 : $k = -4$

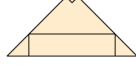
해설

$$y = \left(x + \frac{1}{2}k\right)^2 - 2k - \frac{1}{4}k^2$$

$$\therefore m = -2k - \frac{1}{4}k^2 = -\frac{1}{4}(k+4)^2 + 4$$

따라서 m 의 최댓값은 4 , $k = -4$ 이다.

13. 빗변의 길이가 40 인 직각이등변삼각형에 다음 그림과 같이 직사각형을 그릴 때, 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하여라.

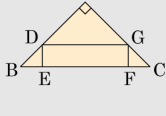


▶ 답 :

▷ 정답 : 200

해설

다음 그림에서 선분 DE 의 길이를 x 라 하면
 $\triangle ABC$ 는 이등변삼각형이고 $\angle B = 45^\circ$ 이므로
 $\overline{BE} = x$ 이다.



마찬가지로 $\overline{FC} = x$

$$\therefore \overline{EF} = 40 - x - x = 40 - 2x$$

직사각형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= x(40 - 2x) \\ &= -2x^2 + 40x \\ &= -2(x - 10)^2 + 200 \end{aligned}$$

따라서 $x = 10$ 일 때, 직사각형의 넓이의 최댓값은 200 이다.

14. 가을 전어철을 맞아 전어의 어획량은 매일 현재 어획량의 10% 씩 늘어나고, 마리당 판매 가격은 매일 현재 가격의 5% 씩 줄어들고 있다. 며칠 후에 전어를 한꺼번에 팔아야 최대의 수입을 얻을 수 있는지 구하여라.

▶ 답 : 일

▷ 정답 : 5 일

해설

현재의 전어의 양과 가격을 각각 m 마리, p 원 라고 할 때, x 일 후의 전어의 양과 가격은 각각

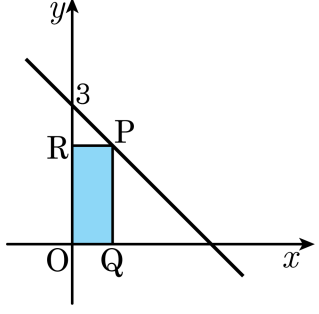
$m\left(1 + \frac{1}{10}x\right)$ 마리, $p\left(1 - \frac{1}{20}x\right)$ 원 이다.

이때, x 일 후의 수입을 y 원이라고 하면

$$\begin{aligned} y &= mp\left(1 + \frac{1}{10}x\right)\left(1 - \frac{1}{20}x\right) \\ &= mp\left(1 + \frac{1}{20}x - \frac{1}{200}x^2\right) \\ &= -\frac{mp}{200}(x^2 - 10x - 200) \\ &= -\frac{mp}{200}(x - 5)^2 + \frac{9}{8}mp \end{aligned}$$

따라서 $x = 5$ 일 때, y 는 최댓값을 가지므로 5 일 후에 팔면 최대의 수입을 얻을 수 있다.

15. 다음 그림과 같이 직선이 $y = -x + 3$ 의 위의 점 P 에서 x 축과 y 축에서 내릴 수선의 발이 각각 Q,R 이고 직사각형 PQOR 의 넓이를 y 라고 한다. y 가 최대가 될 때, 점 P 의 좌표는?



- ① $\left(-2, \frac{3}{2}\right)$ ② $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ ③ $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$
 ④ $\left(-\frac{3}{2}, -2\right)$ ⑤ $\left(-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right)$

해설

점 P 의 좌표는 $(a, -a + 3)$ 이고 넓이는 y 이므로

$$y = a(-a + 3) = -a^2 + 3a$$

$$= -\left(a^2 - 3a + \frac{9}{4}\right) + \frac{9}{4}$$

$$= -\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$

$$\therefore P\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} + 3\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$