1. 부등식 $|x-1|+|x-2|<3$ 을 풀면?

① $-1<x<4$　② $-1<x<2$　③ $0<x<1$

④ $0<x<2$　⑤ $0<x<3$

해설

(i) $x<1$일 때

$-(x-1)-(x-2)<3,\ -2x<0\ \therefore x>0$

그런데 $x<1$이므로 $0<x<1$

(ii) $1\le x<2$일 때

$(x-1)-(x-2)<3,\ 0\cdot x<2$

$\therefore$ 모든 x에 대해 성립

그런데 $1\le x<2$이므로 $1\le x<2$

(iii) $x\ge 2$일 때

$(x-1)+(x-2)<3,\ 2x<6\ \therefore x<3$

그런데 $x\ge 2$이므로 $2\le x<3$

(i), (ii), (iii)에서 $0<x<3$

2. 두 점 A(−4), B(6) 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$\overline{AB} = |6 - (-4)| = 10$

3. 두 점 A(−2, 1), B(4, 7) 의 중점의 좌표는?

① $\mathrm{M}\left(\frac{1}{2}, 4\right)$ ② $\mathrm{M}(1, 2)$ ③ $\mathrm{M}(1, 4)$
④ $\mathrm{M}\left(1, \frac{3}{2}\right)$ ⑤ $\mathrm{M}(2, 2)$

해설

중점 M의 좌표 $\mathrm{M}(x, y)$ 라 하면

$x = \frac{-2+4}{2} = 1$, $y = \frac{1+7}{2} = 4$

따라서 $\mathrm{M}(1, 4)$

4. 다음 (　　)안에 알맞은 값을 차례로 나열한 것은?

> 두 직선 $2x-y+1=0,\ x+2y-2=0$ 의 기울기의 곱은 (　　)이고, 두 직선 $3x-y+1=0,\ 6x-2y+5=0$ 의 기울기의 차는 (　　)이다.

① 1, −1　② −1, 1　③ −1, −1
④ 1, 0　⑤ −1, 0

해설

(1) $2x-y+1=0 \Leftrightarrow y=2x+1$

$x+2y-2=0 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x+1$

따라서, 기울기의 곱은

$2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$

(2) $3x-y+1=0 \Leftrightarrow y=3x+1$

$6x-2y+5=0 \Leftrightarrow y=3x+\frac{5}{2}$

따라서, 기울기의 차는 $|3-3|=0$

5. 두 직선 $(a-2)x+3y-1=0$, $ax-y+3=0$ 이 서로 수직일 때, a 의 값을 모두 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: -1

▷ 정답: 3

해설

$(a-2)a+3(-1)=0$
$a^2-2a-3=0$, $(a-3)(a+1)=0$
$\therefore\ a=-1$ 또는 3

6. 점 $(2,\ 1)$와 직선 $y = 2x + 2$ 사이의 거리는?

① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$ ③ 2 ④ $\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{2}$

해설

$y = 2x + 2$ 에서 $2x - y + 2 = 0$

$\therefore$ 구하는 거리는

$$\frac{|2 \times 2 - 1 \times 1 + 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

7. 두 점 A(1, 2), B(3, 4)로부터 같은 거리에 있는 점 P가 나타내는 직선의 x절편과 y절편의 합은?

① -10　② -4　③ 0　④ 5　⑤ 10

해설

P$(x,\ y)$라 하면 $\overline{AP} = \overline{BP}$

즉, $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$이므로

$(x-1)^2 + (y-2)^2 = (x-3)^2 + (y-4)^2$

$y = -x + 5$

따라서 x절편은 5, y절편은 5이다.

$\therefore\ 5 + 5 = 10$

8. 원점을 중심으로 하고, 점 $(3, -4)$를 지나는 원의 방정식을 구하면?

① $x^2 + 2y^2 = 41$ ② $2x^2 + y^2 = 34$ ③ $x^2 + y^2 = 25$

④ $x^2 + y^2 = 16$ ⑤ $x^2 + y^2 = 9$

해설

구하는 원의 반지름을 r 이라 하면

$x^2 + y^2 = r^2$ ·····㉠

㉠ 이 점 $(3, -4)$ 를 지나므로

$3^2 + (-4)^2 = r^2 \quad \therefore r^2 = 25$

이 때, ㉠은 $x^2 + y^2 = 25$

9. 두 원 $x^2+y^2-x+2y-3=0$, $2x^2+2y^2-6x+ay-2=0$ 의 공통현이 직선 $y=-3x-1$ 과 직교할 때, 상수 a 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

해설

두 원의 공통현의 방정식은
$2(x^2+y^2-x+2y-3)-(2x^2+2y^2-6x+ay-2)=0$
즉, $4x+(4-a)y-4=0\cdots\cdots$㉠
직선 ㉠과 직선 $y=-3x-1$ 은 직교하므로
$\frac{-4}{4-a}\times(-3)=-1$ 에서 $a=16$

10. 이차부등식 $(k-1)x^2-2(k-1)x-2>0$이 해를 가지지 않도록 실수 k의 값의 범위는?

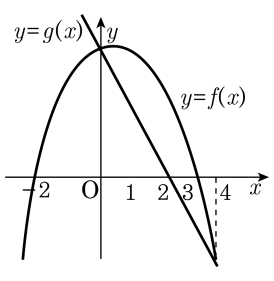
① $-1<k<1$　② $-1\le k\le 1$　③ $-1\le k<1$

④ $-2<k<1$　⑤ $-2\le k\le 1$

해설

해를 가지지 않으므로 모든 실수 x에 대하여
$k-1<0$이고
$(k-1)x^2-2(k-1)x-2\ge 0$이어야 한다.
ⅰ) $k-1<0$에서 $k<1$
ⅱ) $(k-1)x^2-2(k-1)x-2=0$의 판별식을
D라고 하면
$\frac{D}{4}=(k-1)^2+2(k-1)\le 0,\ k^2-1\le 0$
$(k+1)(k-1)\le 0 \quad \therefore -1\le k\le 1$
ⅰ), ⅱ)의 공통 범위를 구하면 $-1\le k<1$

11. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = g(x)$ 가 다음 그림과 같을 때, 부등식 $f(x) > g(x)$ 의 해를 구하면?



① $-2 < x < 4$ ② $-2 < x < 3$

③ $0 < x < 4$ ④ $2 < x < 3$

⑤ $3 < x < 4$

해설

부등식 $f(x) > g(x)$ 의 해는
함수 $f(x)$ 의 그래프가 직선 $y = g(x)$ 보다
위쪽에 있는 x 의 구간을 의미하므로
구하는 해는 $0 < x < 4$

12. 두 부등식 $2x-1>0$, $(x+1)(x-a)<0$을 동시에 만족하는 x의 값의 범위가 $\frac{1}{2}<x<3$ 이 되도록 하는 정수 a의 값은? (단,$a>1$)

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$2x-1>0$

$\therefore x>\frac{1}{2}\cdots\cdots$ ①

$(x+1)(x-a)<0$

$\therefore -1<x<a\cdots\cdots$ ②

즉 ①, ②의 공통 부분이 $\frac{1}{2}<x<3$ 이므로

$\therefore a=3$

13. 두 직선 $x+y=3$, $mx-y+2m-5=0$이 제 1사분면에서 만날 때, m의 값의 범위는?

① $-2<m<2$　② $-2<m<3$　③ $-1<m<2$

④ $1<m<4$　⑤ $0<m<3$

해설

$mx-y+2m-5=0 \cdots$①에서
$m(x+2)-(y+5)=0$이므로
위의 직선은 m의 값에 관계없이
점 $(-2,-5)$를 지나고, 기울기 m인 직선이다.
따라서 두 직선이 제 1사분면에서
만나기 위해서는 직선 ①이 $(3,0)$과 $(0,3)$을
잇는 선분의 사이를 지나면 된다.
직선 ①이 $(3,0)$을 지날 때 $m=1$이고
$(0,3)$을 지날 때 $m=4$이므로
따라서 $1<m<4$

14. 직선 $y = -2x + a$가 원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$에 의하여 잘려지는 선분의 길이를 최대로 하는 a의 값은 ?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ 에서
$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$
직선 $y = -2x + a$ 가 원의 중심 $(2,\ 1)$ 을 지날 때, 잘린 선분의 길이가 최대이므로
$a = 2 \times 2 + 1 = 5$

15. 원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 접하고 기울기가 4 인 접선의 방정식은 $y = 4x \pm k$ 이다. k 를 구하면? (단, $k > 0$)

① $2\sqrt{7}$ ② $2\sqrt{17}$ ③ $5\sqrt{13}$ ④ $3\sqrt{17}$ ⑤ $3\sqrt{7}$

해설

기울기가 주어진 접선의 방정식
$y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$ 에서
원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 접하고 기울기가 4 인 접선의 방정식은
$y = 4x \pm 3\sqrt{17}$ 이다.

16. $-2 \le x \le -1$ 일 때, $A = \dfrac{12}{2-x}$ 가 취하는 값의 범위를 구하면 $p \le A \le q$ 이다. 이 때, pq 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 12

해설

$-2 \le x \le -1$ 의 각 변에 -1 을 곱하면

$1 \le -x \le 2$

다시 각 변에 2를 더하면 $3 \le 2-x \le 4$

각 변의 역수를 취하면 $\dfrac{1}{4} \le \dfrac{1}{2-x} \le \dfrac{1}{3}$

각 변에 12 를 곱하면 $3 \le \dfrac{12}{2-x} \le 4$

$\therefore p = 3, q = 4$

$\therefore pq = 12$

17. x 에 대한 이차부등식 $x^2+ax+b>0$ 의 해가 $x<1$ 또는 $x>4$ 일 때 상수 $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$x^2+ax+b>0$ 의 해가 $x<1$ 또는 $x>4$ 이려면
$(x-1)(x-4)>0$ 에서 $x^2-5x+4>0$ 이므로
$a=-5$, $b=4$ 따라서 $a+b=-1$

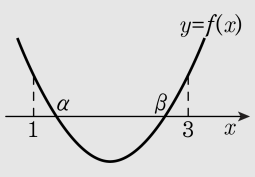
18. $1 < x < 3$ 에서 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - ax + 4 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위가 $\alpha < a < \beta$ 일 때, $3\alpha\beta$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

$f(x) = x^2 - ax + 4$ 라 하면
$1 < x < 3$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



(i) $x^2 - ax + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
$D = a^2 - 16 > 0$ 에서 $(a+4)(a-4) > 0$
$\therefore\ a < -4$ 또는 $a > 4$

(ii) $f(1) = 5 - a > 0$ 에서 $a < 5$

$f(3) = 13 - 3a > 0$ 에서 $a < \dfrac{13}{3}$

$\therefore\ a < \dfrac{13}{3}$

(iii) $y = f(x)$ 의 그래프의 대칭축이
$x = \dfrac{a}{2}$ 이므로 $1 < \dfrac{a}{2} < 3$
$\therefore\ 2 < a < 6$

(i), (ii), (iii) 에서 a 의 값의 범위는 $4 < a < \dfrac{13}{3}$

따라서, $\alpha = 4$, $\beta = \dfrac{13}{3}$ 이므로 $3\alpha\beta = 52$

19. 세 점 A(4, −5) , B(−5, 2) , C(−8, 3)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 △ABC 에 대하여 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 의 값이 최소가 될 때, 점 P의 좌표는?

① (-3, -3) ② (-3, 0) ③ (0, 0)
④ (3, 0) ⑤ (3, 3)

해설

P(x, y)라 하면

$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$
$= (x-4)^2 + (y+5)^2 + (x+5)^2 + (y-2)^2 + (x+8)^2 + (y-3)^2$
$= 3(x+3)^2 + 3y^2 + 116$

따라서 $x = -3$, $y = 0$일 때, $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$은 최소가 된다.

20. 직선 $2x+y+3=0$은 직선 $ax+by-5=0$과는 평행하고, 직선 $2x+ay+b=0$과는 수직이라 한다. 이 때, $a+b$의 값은?

① -6 ② -8 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$ax+by-5=0 \Rightarrow y=-\frac{a}{b}x+\frac{5}{b}$ $\cdots$㉠

$2x+ay+b=0 \Rightarrow y=-\frac{2}{a}x-\frac{b}{a}$ $\cdots$㉡

㉠은 $y=-2x-3$에 평행하므로, $\frac{a}{b}=2$

㉡는 $y=-2x-3$에 수직하므로,

$-2\times(-\frac{2}{a})=-1 \Rightarrow a=-4$

$\therefore\ a=-4\ \ b=-2\ \therefore\ a+b=-6$

21. 두 직선 $x+y=1$과 $3x+2y=1$의 교점을 지나고 직선 $-x+2y=4$에 수직인 직선의 방정식은?

① $2x+y-1=0$ ② $2x+y=0$ ③ $2x+y+1=0$

④ $2x-y+4=0$ ⑤ $2x-y-4=0$

해설

주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$3x+2y-1+k(x+y-1)=0$
$(3+k)x+(2+k)y-1-k=0$이
$-x+2y=4$가 수직이려면
$-(3+k)+2(2+k)=0$
$\therefore\ k=-1$
$\therefore\ 2x+y=0$

22. 이차함수 $y = kx^2 + k(k+1)x + 2k^2 - 2k + 1$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다. 이 점의 좌표를 $\mathrm{P}(a,\ b)$ 라 할 때 $a + b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

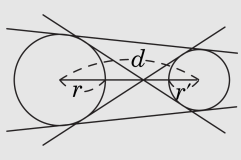
k에 관하여 정리하면
$(x+2)k^2 + (x^2 + x - 2)k + (1 - y) = 0$
k에 관한 항등식이므로
$x + 2 = 0,\ x^2 + x - 2 = 0,\ 1 - y = 0$
$\therefore x = -2,\ y = 1$
$\therefore$ 구하는 점의 좌표는 $(-2,\ 1)$
$\therefore\ a = -2,\ b = +1$
$\therefore\ a + b = -1$

23. 다음 두 원 $x^2+y^2=3^2, (x-9)^2+y^2=2^2$ 의 공통접선의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 4 개

해설



먼저 두 원의 반지름의 길이의 합 $r+r'$, 차 $r\sim r'$, 중심거리 d 를 구하여
두 원의 위치관계를 파악한다.
두 원의 반지름의 길이를 각각 $r=3, r'=2$ 로 놓으면
$r+r'=5, r\sim r'=1$ $d=9$ 이므로
$r+r'<d$ (한 원이 다른 원 밖에 있다.) $\therefore$ 공통접선은 모두 4 개

24. 원 $x^2+y^2-2x+4y-4=0$ 이 주어졌을 때, 점 A(4, 2) 에서 그은 접선의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

주어진 원의 방정식을 표준형으로 고치면
$(x-1)^2+(y+2)^2=9$ 이다.
다음 그림에서 접선의 길이는
$\overline{AP}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{CP}^2}$
한편, $\overline{AC}=\sqrt{3^2+4^2}=5$ 이고 $\overline{CP}=3$
$\therefore \overline{AP}=4$

25. 이차방정식 $x^2+y^2=2|x|$과 $x^2+y^2=2|x+y|$의 공통근의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 5 개

해설

$x^2+y^2=2|x|\cdots$㉠

$x^2+y^2=2|x+y|\cdots$㉡

㉠과 ㉡에서 $2|x|=2|x+y|$

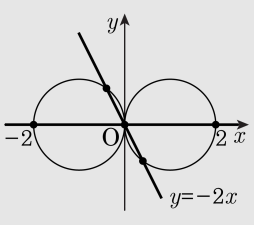
$\therefore x+y=\pm x$

$\therefore y=0$ 또는 $y=-2x\cdots$㉢

㉠과 ㉢의 교점의 개수는 다음 그림에서 5개이다.

실제로, 교점을 구하면

$(0,\ 0),\ (\pm 2,\ 0),$

$\left(\pm\frac{2}{5},\ \mp\frac{4}{5}\right)$

(복부호동순)