

1. 두 실수 a, b 에 대하여 부등식 $ax > b$ 의 해가 $x < -2$ 일 때, 부등식 $bx > 2a + 4b$ 의 해는?

- ① $x > 0$ ② $x > 1$ ③ $x > 2$ ④ $x > 3$ ⑤ $x > 4$

해설

부등식 $ax > b$ 의 해가 $x < -2$ 로 부등호의 방향이 바뀌었으므로 $a < 0$

이때, $x < \frac{b}{a}$ 에서 $\frac{b}{a} = -2 \therefore b = -2a$

따라서 $bx > 2a + 4b$ 에서 $b = -2a$ 를 대입하면

$$-2ax > 2a + 4 \cdot (-2a)$$

$$-2ax > -6a$$

$a < 0$ 에서 $-2a > 0$ 이므로

$$x > \frac{-6a}{-2a} \therefore x > 3$$

2. 다음 연립부등식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} 2x - 5 > 3 - 2x \\ 2(x - 3) \leq x + 4 \end{cases}$$

① $2 \leq x < 10$

② $2 < x \leq 10$

③ $2 < x < 10$

④ $2 \leq x \leq 10$

⑤ $x \leq 10$

해설

첫 번째 부등식에서 $x > 2 \cdots \cdots \textcircled{1}$

두 번째 부등식에서 $2x - 6 \leq x + 4$

$\therefore x \leq 10 \cdots \cdots \textcircled{2}$

따라서, 구하는 해는 $\textcircled{1}$ 과 $\textcircled{2}$ 를

동시에 만족하는 x 의 값이므로

$\therefore 2 < x \leq 10$

3. 수직선 위의 두 점 A(-3), B(a)를 잇는 선분 AB에 대하여 $\overline{AB} = 5$ 를 만족시키는 a 의 값들의 합은?

① -6 ② -5 ③ 3 ④ 5 ⑤ 6

해설

수직선 위의 두 점 A(-3), B(a)에 대하여

$\overline{AB} = |a - (-3)|$ 이므로

$$|a + 3| = 5$$

$$a + 3 = 5 \text{ 또는 } a + 3 = -5$$

$$\therefore a = 2 \text{ 또는 } a = -8$$

따라서 a 의 값들의 합은 -6 이다.

4. $\triangle ABC$ 의 꼭짓점 A의 좌표가 (5, 4), 변 AB의 중점의 좌표가 (-1, 3), 무게중심의 좌표가 (1, 2)일 때, 꼭짓점 B, C의 좌표를 구하면?

- ① B(-5, 2), C(5, 1) ② B(-6, 2), C(4, 0)
③ B(-7, 2), C(5, 0) ④ B(-7, -1), C(4, 0)
⑤ B(-7, -2), C(5, -1)

해설

B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)으로 놓으면

$$\frac{5+x_2}{2} = -1, \frac{4+y_2}{2} = 3,$$

$$\frac{5+x_2+x_3}{3} = 1, \frac{4+y_2+y_3}{3} = 2$$

$$\therefore x_2 = -7, y_2 = 2, x_3 = 5, y_3 = 0$$

$$\therefore \text{즉, B}(-7, 2), \text{C}(5, 0)$$

5. 세 점 A(-1, 4), B(0, 1), C(a, -5)가 한 직선 위에 있도록 a의 값을 정하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

해설

한 직선위에 있으려면 기울기가 같아야 한다.

$$\therefore \frac{4-1}{-1-0} = \frac{1-(-5)}{0-a}$$

$$\Rightarrow a = 2$$

6. 두 점 A(1, -4), B(3, 2)를 지나는 직선과 수직인 직선의 기울기는?

- ① -3 ② $-\frac{1}{3}$ ③ -1 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ 3

해설

직선 AB의 기울기는 $\frac{2 - (-4)}{3 - 1} = 3$ 이므로
수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$ 이다.

7. 점 $(4, 1)$ 과 직선 $4x - 3y - 9 = 0$ 사이의 거리를 구하면?

- ① 1 ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{2}{5}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

해설

점과 직선 사이의 거리 구하는 공식을

이용하면, $\Rightarrow \frac{|4 \times 4 + 1 \times (-3) - 9|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{4}{5}$

8. 방정식 $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$ 이 나타내는 도형을 바르게 설명한 것을 고르면?

- ① 중심 (1, 2) 이고 반지름이 1 인 원
- ② 중심 (1, -2) 이고 반지름이 1 인 원
- ③ 중심 (-1, 2) 이고 반지름이 1 인 원
- ④ 중심 (1, -2) 이고 반지름이 2 인 원
- ⑤ 중심 (1, 2) 이고 반지름이 2 인 원

해설

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 &= 0 \\ \Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 &= 1 \\ \therefore \text{중심은 } (1, -2) \text{ 이고, 반지름이 } 1 \text{ 인 원} \end{aligned}$$

9. 원 $x^2 + y^2 = 25$ 위의 점 $(-5, 0)$ 에서 접하는 직선의 방정식을 구하면?

① $x = -1$

② $x = -2$

③ $x = -3$

④ $x = -4$

⑤ $x = -5$

해설

구하는 접선의 방정식은 $-5 \cdot x + 0 \cdot y = 25$

$$-5x = 25$$

$$\therefore x = -5$$

10. $x^2 - 2ax + 2a + 3 < 3$ 을 만족하는 x 가 없도록 하는 정수 a 의 개수는?

- ① 1개 ② 3개 ③ 5개 ④ 7개 ⑤ 9개

해설

$x^2 - 2ax + 2a + 3 < 0$ 의 해가 존재하지 않으려면

모든 실수 x 에 대하여

$x^2 - 2ax + 2a + 3 \geq 0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = a^2 - (2a + 3) \leq 0, (a - 3)(a + 1) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq a \leq 3$$

따라서, 구하는 정수 a 의 개수는

-1, 0, 1, 2, 3의 5개이다.

11. 이차부등식 $x^2 + ax + b < 0$ 의 해가 $2 < x < 3$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$2 < x < 3$ 가 해이므로

$$(x-2)(x-3) < 0$$

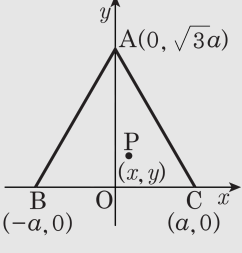
$$x^2 - 5x + 6 < 0, a = -5, b = 6$$

$$\therefore a + b = 1$$

12. 좌표평면 위의 정삼각형 ABC에 대하여 $2\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 을 만족시키는 점 P의 자취는 어떤 도형을 그리는가?
- ① 삼각형 ② 직선 ③ 선분
④ 원 ⑤ 원 아닌 곡선

해설

그림과 같이 변 BC의 중점을 원점으로 하는 좌표축을 설정하고 점 C의 좌표를 $C(a,0)$ 이라고 두면, $B(-a,0)$, $A(0, \sqrt{3}a)$ 이다.



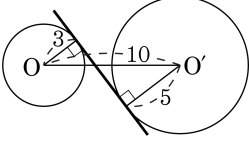
이 때, 점 P의 좌표를 $P(x,y)$ 라 하면

$$2\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 \text{ 이므로}$$
$$2\{x^2 + 2(y - \sqrt{3}a)^2\}$$
$$= (x+a)^2 + y^2 + (x-a)^2 + y^2$$

정리하여 간단히 하면, $y = \frac{\sqrt{3}}{3}a$

∴ 직선

13. 다음 그림의 두 원 O와 O'에서 공통내접선의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

공통내접선의 길이는 $\sqrt{10^2 - (3 + 5)^2} = 6$

14. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 과 직선 $y = 2x + k$ 가 서로 다른 두 점에서 만날 때, k 의 값의 범위는?

① $-2\sqrt{5} < k < 2\sqrt{5}$

② $-3\sqrt{5} < k < 3\sqrt{5}$

③ $-4\sqrt{5} < k < 4\sqrt{5}$

④ $k < -\sqrt{5}$ 또는 $k > \sqrt{5}$

⑤ $k < -2\sqrt{5}$ 또는 $k > 2\sqrt{5}$

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리 d 는

$$d = \frac{|0 + 0 + k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{5}}$$

이 때, 원의 반지름의 길이가 2 이므로

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|k|}{\sqrt{5}} < 2 \quad \therefore -2\sqrt{5} < k < 2\sqrt{5}$$

15. 부등식 $x^2 - 4|x| - 5 < 0$ 을 풀면?

- ① $-5 < x < 5$ ② $-5 < x < 0$ ③ $-5 < x < 1$
④ $-1 < x < 5$ ⑤ $-1 < x < 6$

해설

(i) $x \geq 0$ 일 때, $|x| = x$ 이므로
 $x^2 - 4x - 5 < 0$, $(x - 5)(x + 1) < 0$
 $-1 < x < 5$
이 때 $x \geq 0$ 과의 공통범위는 $0 \leq x < 5$
(ii) $x < 0$ 일 때
 $x^2 + 4x - 5 < 0$, $(x + 5)(x - 1) < 0$
 $-5 < x < 1$
이 때 $x < 0$ 과 공통 범위는 $-5 < x < 0$
(i), (ii)에서 $-5 < x < 5$

16. $-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x 에 대하여 이차부등식 $x^2 + 2(k-1)x + 3k < 0$ 이 항상 성립하도록 하는 실수 k 의 최댓값을 구하여라.

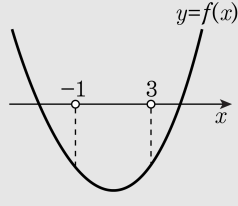
▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$f(x) = x^2 + 2(k-1)x + 3k$ 라 하자.

$-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) < 0$ 이 항상 성립하려면 다음 그림과 같이 $f(-1) \leq 0$, $f(3) \leq 0$ 이어야 한다.



(i) $f(-1) \leq 0$ 에서 $(-1)^2 + 2(k-1) \cdot (-1) + 3k \leq 0$, $k+3 \leq 0$
 $\therefore k \leq -3$

(ii) $f(3) \leq 0$ 에서 $3^2 + 2(k-1) \cdot 3 + 3k \leq 0$, $9k+3 \leq 0$
 $\therefore k \leq -\frac{1}{3}$

(i), (ii)에서 $k \leq -3$

따라서, 실수 k 의 최댓값은 -3 이다.

17. $\triangle ABC$ 에서 A(6, 1), B(-1, 2), C(2, 3)이라 한다. 이 삼각형의 외접원의 반지름을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

외심을 P(a , b)라 하면

$$(1) \overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 \Leftrightarrow (a-6)^2 + (b-1)^2 = (a+1)^2 + (b-2)^2 \dots\dots\textcircled{A}$$

$$\overline{PA}^2 = \overline{PC}^2 \Leftrightarrow (a-6)^2 + (b-1)^2 = (a-2)^2 + (b-3)^2 \dots\dots\textcircled{B}$$

①, ②를 각각 전개하여 정리하면

$$7a - b - 16 = 0, \quad 2a - b - 6 = 0$$

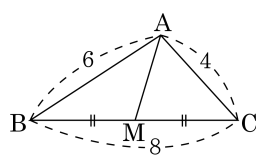
연립하여 풀면 $a = 2, b = -2$

따라서 외심은 (2, -2)이다.

$$(2) \overline{PA}^2 = (2-6)^2 + (-2-1)^2 = 25$$

$$\therefore \overline{PA} = 5$$

18. 다음 그림의 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB} = 6$, $\overline{BC} = 8$, $\overline{AC} = 4$ 이고, $\overline{BC}$ 의 중점이 M일 때, $\overline{AM}^2$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

중선정리에 의하여
 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$ 이므로

$$6^2 + 4^2 = 2(\overline{AM}^2 + 4^2)$$

$$36 + 16 = 2\overline{AM}^2 + 32$$

$$\therefore \overline{AM}^2 = 10$$

19. 좌표평면 위에 두 점 A(1, 5), B(6, 3)이 있다. 점 P가 직선 $y = 1$ 위를 움직일 때, $\overline{PA} + \overline{PB}$ 의 최솟값은?

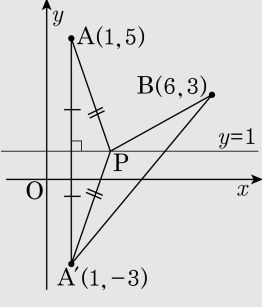
- ① $\sqrt{41}$ ② 7 ③ $\sqrt{50}$ ④ $\sqrt{61}$ ⑤ $\sqrt{89}$

해설

점 A의 직선 $y = 1$ 에 대한 대칭점을 A'이라 하면 A'(1, -3)이다.

아래 그림에서 $\overline{AP} + \overline{PB} = \overline{PA'} + \overline{PB} \geq \overline{A'B}$ 이므로 $\overline{AP} + \overline{PB}$ 의 최솟값은 $\overline{A'B}$ 이다.

$\therefore A'B = \sqrt{(6-1)^2 + (3+3)^2} = \sqrt{61}$



20. 다음은 11 세기 경 아라비아의 수학책에 나오는 내용을 변형한 것이다. 강을 사이에 두고 두 그루의 나무가 서 있었는데 두 나무의 높이는 각각 20m, 30m 이고 두 나무 사이의 거리는 50m 이다. 각각의 나무 꼭대기에 새가 앉아서 수면에 있는 한 마리의 물고기를 노리고 있었다. 이 두 마리의 새가 동시에 날아서 일직선 위로 그 물고기에게 덤벼들어 똑같이 그 물고기가 있는 수면에 당도하였다. 두 마리의 새의 속도가 같다고 하였을 때, 높이가 20m 인 나무 밑에서 물고기까지의 거리는 몇 m 인지 구하여라.

▶ 답: m

▶ 정답 : 30m

해설

20m, 30m 나무 위의 두 마리의 새의 위치를 각각 A, B 라 하고, 높이가 20m 인 나무 밑으로부터 물고기가 있는 P 까지의 거리를 a 라 하면 $\overline{PA} = \overline{PB}$ 이므로 $a^2 + 20^2 = (50 - a)^2 + 30^2$
 $\therefore a = 30(\text{m})$

21. 직선 위의 두 점 A,B에 대하여 $\overline{AB}$ 의 중점을 $A * B$, $\overline{AB}$ 를 1 : 3으로 내분하는 점을 $A \odot B$, $\overline{AB}$ 를 2 : 1로 내분하는 점을 $A \star B$ 로 나타내기로 한다. 다음 중 $B \star (A \odot B)$ 와 같은 것을 모두 고르면?

- ① $A * B$

② $A \star B$
- ③ $(A \star B) * (A \odot B)$

④ $(A \star B) \odot A$
- ⑤ $(B * A) \odot (B \star A)$

해설

두 점 A,B의 좌표를 각각 a,b 라 하면

$$B \star (A \odot B) = \frac{b + 2 \cdot \frac{3a + b}{4}}{3}$$

$$= \frac{a + b}{2} = A * B$$

$$(A \star B) * (A \odot B) = \frac{\frac{a + 2b}{3} + \frac{3a + b}{4}}{2}$$

$$= \frac{13a + 11b}{24}$$

$$(A \star B) \odot A = \frac{3 \cdot \frac{a + 2b}{3} + a}{4} = \frac{a + b}{2}$$

$$= A * B$$

$$(B * A) \odot (B \star A) = \frac{3 \cdot \frac{a + b}{2} + \frac{2a + b}{3}}{4}$$

$$= \frac{13a + 11b}{24}$$

22. 세 점 $A(-1, -4)$, $B(3, -3)$, $C(7, 1)$ 과 좌표평면 위의 점 P 에 대하여 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 최솟값은?

① 46 ② 45 ③ 44 ④ 43 ⑤ 42

해설

점 P 를 $P(x, y)$ 라고 하면
 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$
 $= \{(x+1)^2 + (y+4)^2\}$
 $+ \{(x-3)^2 + (y+3)^2\}$
 $+ \{(x-7)^2 + (y-1)^2\}$
 $= x^2 + 2x + 1 + y^2 + 8y + 16 + x^2 - 6x + 9$
 $+ y^2 + 6y + 9 + x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1$
 $= 3x^2 - 18x + 3y^2 + 12y + 85$
 $= 3(x^2 - 6x + 9) + 3(y^2 + 4y + 4) + 46$
 $= 3(x-3)^2 + 3(y+2)^2 + 46$
따라서 $x=3$, $y=-2$ 일 때,
 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 최솟값은 46 이다.

23. 상수 a, b, c 가 조건 $ab > 0, bc < 0$ 을 만족시킬 때 방정식 $ax+by-c = 0$ 이 나타내는 그래프가 지나는 사분면을 모두 고르면?
- ① 제 1, 2, 3 사분면

② 제 2, 3, 4 사분면

③ 제 1, 3, 4 사분면

④ 제 1, 2 사분면

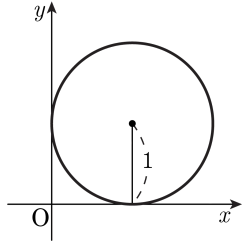
⑤ 제 2, 3 사분면

해설

$$ax+by-c=0 \Rightarrow y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$$

$ab > 0, bc < 0$ 이므로
기울기는 (-), y절편은 (-)이다.
 $\therefore$ 제 2,3,4사분면을 지난다.

24. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원이 x 축, y 축에 동시에 접하고 있다. 이 원 위의 점 (x, y) 에 대하여 $\frac{y+2}{x+1}$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\frac{y+2}{x+1} = k$ 라 하면 직선 $y+2 = k(x+1)$ 은

k 값에 관계없이 점 $(-1, -2)$ 를 지난다.

이 때, 기울기 k 는 직선이 원에 접할 때 최댓값과 최솟값을 갖는다.

$$\frac{|k-1+k-2|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$$

$$|2k-3| = \sqrt{k^2+1}$$

$$4k^2 - 12k + 9 = k^2 + 1$$

$$3k^2 - 12k + 8 = 0$$

최댓값과 최솟값은 이 방정식의 해이므로

근과 계수와의 관계에 의해 합은 4이다.

25. 두 원 $x^2 + y^2 = 9$, $(x - 4)^2 + y^2 = 1$ 에 동시에 외접하고 반지름의 길이가 2인 원의 중심의 좌표를 구하면?

① (3, 3)

② (3, -3)

③ (4, ± 4)

④ (± 4 , 4)

⑤ (4, ± 3)

해설

두 원이 외접하면 중심사이 거리는 반지름 길이 합과 같다.

중심의 좌표를 (a, b) 라 하면,

$\Rightarrow$ i) $a^2 + b^2 = 25$

ii) $(a - 4)^2 + b^2 = 9$ 연립하면,

$a = 4, b = \pm 3$

$\therefore$ 중심은 (4, ± 3)