

1. 원 $x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0$ 위의 점 P에서 직선 $3x - 4y - 24 = 0$ 까지의 거리의 최솟값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y - 4)^2 = 5^2$ 이므로
원의 중심의 좌표는 (0, 4)이고, 반지름의 길이는 5이다.
그런데 중심 (0, 4) 에서 직선 $3x - 4y - 24 = 0$
까지의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|3 \cdot 0 - 4 \cdot 4 - 24|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{40}{5} = 8$$

따라서 구하는 최소 거리는

$$d - (\text{원의 반지름의 길이}) = 8 - 5 = 3$$

2. 좌표평면 위의 두 점 $A(8,0)$, $B(0,6)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 외접원의 방정식이 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 일 때, 세 상수 a, b, c 의 곱 abc 의 값을 구하여라. (단, O 는 원점)

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$\angle AOB = 90^\circ$ 이므로 선분 AB 는 외접원의 지름이다.

$\overline{AB} = 10$ 이고 원의 중심은 $C(4,3)$ 이므로 원의 방정식은 $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$

이 식을 정리하면 $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$

$a = -8, b = -6, c = 0$

$\therefore abc = 0$

3. 좌표평면 위의 두 점 $(2, 2)$, $(9, 9)$ 를 지나고 x 축의 양의 부분과 접하는 원 O 의 접점의 x 좌표는 ?

① $\frac{9}{2}$

② 5

③ $\frac{11}{2}$

④ 6

⑤ $\frac{13}{2}$

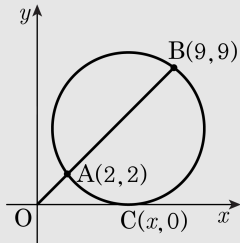
해설

다음 그림에서

$$\overline{OC}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$$

$$\therefore x^2 = \sqrt{2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{9^2 + 9^2} = 36$$

$$\therefore x = 6$$



4. 원 $(x-2)^2 + y^2 = 4$ 와 함수 $\sqrt{3}y = |x-2|$ 의 그래프가 만나는 두 점을 A, B 라 하자. 이때, 작은 활꼴 A, B 의 넓이는?

① $\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$

② $\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3}$

③ $2\pi - \sqrt{3}$

④ $\frac{4}{3}\pi + \sqrt{3}$

⑤ $2\pi + \sqrt{3}$

해설

$\sqrt{3}y = |x-2|$ 의 그래프는

$x < 2 : \sqrt{3}y = -x + 2$

$\therefore y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{2}{\sqrt{3}}$

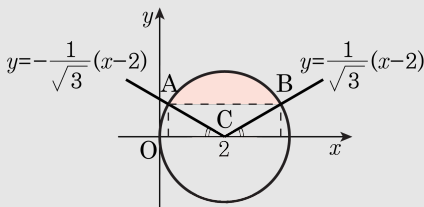
$x \geq 2 : \sqrt{3}y = x - 2$

$\therefore y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{2}{\sqrt{3}}$

이고 $\angle ACB = \frac{2}{3}\pi$ 이므로

색칠된 부분의 넓이 S 는

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times 2^2 \times \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2} \times 2^2 \times \sin \frac{2}{3}\pi \\ &= \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3} \end{aligned}$$



5. 두 점 A(-3, 0), B(1, 0)으로 부터의 거리의 비가 3 : 1인 점 P에 대하여 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은?

- ① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

해설

주어진 조건에서 $\overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 1$ 이므로

$$\overline{AP} = 3\overline{BP}$$

$$\therefore \overline{AP}^2 = 9\overline{BP}^2$$

점 P의 좌표를 (x, y)라 놓으면

$$(x+3)^2 + y^2 = 9(x-1)^2 + y^2$$

$$x^2 + y^2 - 3x = 0 \therefore \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$$

따라서 점 P는 중심이 좌표가 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ 이고

반지름의 길이가 $\frac{3}{2}$ 인 원 위를 움직인다.

그림과 같이 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을

H라 하면

$$\Delta PAB = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{PH}$$

이 때, $\overline{AB} = 4$ 이고 $\overline{PH}$

의 길이의 최댓값은 반지름의 길이

$\frac{3}{2}$ 이므로 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{3}{2} = 3$$

