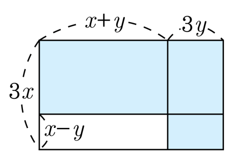
1. 다음 그림의 직사각형에서 색칠한 부분의 넓이를 나타내는 식을 세워 전개하였을 때, y^2 항의 계수는?



① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(x+4y)(3x)-(x+y)(x-y)$
$=3x^2+12xy-x^2+y^2$
$=2x^2+12xy+y^2$

2. $\frac{x+1}{3} = y-2$를 만족하는 모든 실수 $x,\ y$에 대하여, 항상 $ax+by=7$이 성립할 때, $a,\ b$의 값을 구하여라. ($a,\ b$는 상수)

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=-1$

▷ 정답 : $b=3$

해설

$\frac{x+1}{3} = y-2,\ x+1 = 3(y-2)$

$x-3y=-7$

$-x+3y=7 \Leftrightarrow ax+by=7$

$\therefore\ a=-1,\ b=3$

3. $x^2-2ax+2a+3<3$을 만족하는 x가 없도록 하는 정수 a의 개수는?

① 1개　② 3개　③ 5개　④ 7개　⑤ 9개

해설

$x^2-2ax+2a+3<0$의 해가 존재하지 않으려면
모든 실수 x에 대하여
$x^2-2ax+2a+3\geq 0$이어야 한다.
$\frac{D}{4}=a^2-(2a+3)\leq 0$, $(a-3)(a+1)\leq 0$
$\therefore -1\leq a\leq 3$
따라서, 구하는 정수 a의 개수는
-1, 0, 1, 2, 3의 5개이다.

4. 두 점 $\mathrm{A}(4,-3), \mathrm{B}(a,3)$ 사이의 거리가 $6\sqrt{2}$ 일 때, 양수 a 의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

두 점 $\mathrm{A}(4,-3), \mathrm{B}(a,3)$ 에 대하여

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(a-4)^2+(3+3)^2}$

$= \sqrt{a^2-8a+52}$

$= 6\sqrt{2}$

위의 식의 양변을 제곱하면 $a^2-8a+52=72$

$a^2-8a-20=0$

$(a-10)(a+2)=0$

$\therefore a=10 (\because a>0)$

5. 곡선 $y = x^3$ 위의 서로 다른 세 점 A, B, C 의 x좌표를 각각 a, b, c 라고 한다. 세 점 A, B, C 가 일직선 위에 있을 때, 다음 중 항상 성립하는 것은?

① $a+b+c=0$　② $a+b+c=1$　③ $abc=1$
④ $a+c=2b$　⑤ $ac=b^2$

해설

서로 다른 세 점 $\mathrm{A}(a, a^3)$, $\mathrm{B}(b, b^3)$, $\mathrm{C}(c, c^3)$ 이
일직선 위에 있으므로 직선 AB 의 기울기와
직선 AC 의 기울기는 같다.

$\therefore \dfrac{b^3-a^3}{b-a} = \dfrac{c^3-a^3}{c-a}$

즉, $b^2+ab+a^2 = c^2+ac+a^2$

$(b-c)(a+b+c)=0$ 에서 $b \neq c$ 이므로

$a+b+c=0$

6. 두 원 $(x+1)^2+y^2=1$, $x^2+y^2-6x-6y+2=0$ 의 공통접선의 개수는?

① 0 개　② 1 개　③ 2 개　④ 3 개　⑤ 4 개

해설

$(x+1)^2+y^2=1$ 에서 이 원의 중심을 C_1 이라
하면 점 C_1 의 좌표는 $(-1,\ 0)$ 이고
반지름의 길이는 1 이다.
$x^2+y^2-6x-6y+2=0$ 에서
$(x-3)^2+(y-3)^2=16$ 이므로
이 원의 중심을 C_2 이라 하면
점 C_2 의 좌표는 $(3,\ 3)$ 이고
반지름의 길이는 4 이다.
$\overline{C_1C_2}=5$ 이고
두 원의 반지름의 길이는 1, 4 이므로
두 원은 서로 외접하게 된다.
따라서 공통접선은 3 개이다.

7. 두 복소수 $\alpha = a - 2i, \beta = 5 + bi$에 대하여 $\alpha - \overline{\beta} = \overline{3 + 2i}$를 만족하는 실수를 a, b라고 할 때, $a + b$의 값은?

① 2 ② 4 ③ -4 ④ 8 ⑤ -8

해설

$\alpha = a - 2i$

$\overline{\beta} = \overline{5 + bi} = 5 - bi$

$\alpha - \overline{\beta} = a - 2i - (5 - bi) = \overline{3 + 2i}$

$(a - 5) + (b - 2)i = 3 - 2i$

$$\begin{cases} a - 5 = 3 & \therefore \quad a = 8 \\ b - 2 = -2, & \therefore \quad b = 0 \end{cases}$$

8. x에 대한 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1+i$일 때, 실수 a, b의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=-2$

▷ 정답 : $b=2$

해설

$x^2+ax+b=0$에 $x=1\pm i$를 대입하여 정리하면
$1+2i-1+a(1+i)+b=0$과
$a+b+(a+2)i=0$이다.
위 식을 정리하면 $a+b=0$과 $a+2=0$에서
$a=-2, b=2$이다.

해설

계수가 실수이므로 한 근이 복소수 근이면 켤레복소수 근을 갖는다.
따라서 두 근은 $1+i,\ 1-i$
근과 계수의 관계에서
$-a=(1+i)+(1-i)=2 \qquad \therefore a=-2$
$b=(1+i)(1-i)=2 \qquad \therefore b=2$

9. a, b가 유리수일 때, $x = 1 + \sqrt{2}$가 $x^3 - 3x^2 + ax + b = 0$의 근이 된다. 이 때, $a^2 + b^2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

유리계수 방정식이므로 $1 + \sqrt{2}$가 근이면 $1 - \sqrt{2}$도 근이다.
주어진 방정식의 세 근을 $1 + \sqrt{2}$, $1 - \sqrt{2}$, α라 하면
$(1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) + \alpha = 3$ ……㉠
$(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) + \alpha(1 + \sqrt{2}) + \alpha(1 - \sqrt{2}) = a$……㉡
$\alpha(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = -b$ ……㉢
㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a = 1$, $b = 1$

10. x, y, z에 대한 연립방정식 $\begin{cases} ax-y-z=1 \\ -x+ay-z=1 \\ -x-y+az=1 \end{cases}$ 의 해가 단 한 쌍 존재할 때, 다음 중 실수 a의 값이 될 수 없는 것은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$\begin{cases} ax-y-z=1 & \cdots㉠ \\ -x+ay-z=1 & \cdots㉡ \\ -x-y+az=1 & \cdots㉢ \end{cases}$

㉠ + ㉡ + ㉢을 하면 $(a-2)(x+y+z)=3$

(i) $a=2$일 때, $0\cdot(x+y+z)=3$이므로 해가 존재하지 않는다.

(ii) $a=-1$일 때, ㉠, ㉡, ㉢은 같은 식이 되어 해가 무수히 많다.

따라서, 해가 단 한 쌍 존재하도록 하려면 $a\neq 2$, $a\neq -1$

11. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=2a \\ xy=a \end{cases}$ 를 만족하는 순서쌍 (x,y) 가 한 개 뿐일 때, 양의 실수 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\begin{cases} x+y=2a\cdots① \\ xy=a\cdots② \end{cases}$

①에서 $y=-x+2a$ 를 ②에 대입하면

$x(-x+2a)=a$

$\therefore -x^2+2ax=a$ 즉 $x^2-2ax+a=0$ 이 한 개의 실근을 가져야 하므로 $D/4=a^2-a=0$

$\therefore\ a=0$ 또는 1 그런데

a 는 양의실수 이므로

$a=1$

12. 원점 O와 점 A(3, 6)을 이은 선분 OA를 2 : 1 로 내분하는 점을 P, 선분 OP를 2 : 1 로 외분하는 점을 Q라고 할 때, 두 점 P, Q 사이의 거리를 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : $2\sqrt{17}$

해설

$P\left(\frac{2\times3+1\times0}{2+1}, \frac{2\times6+1\times0}{2+1}\right)=(2,4)$

$Q\left(\frac{2\times2-1\times0}{2-1}, \frac{2\times6-1\times0}{2-1}\right)=(4,12)$ 이므로

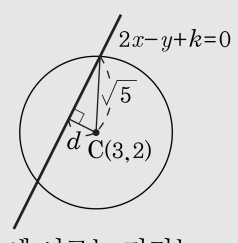
$\overline{PQ}=\sqrt{(4-2)^2+(12-4)^2}=\sqrt{68}=2\sqrt{17}$ 이다.

13. 점 A(5, 3), B(1, 1)을 지름의 양 끝점으로 하는 원과 직선 $y=2x+k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 k의 값의 범위는?

① $-12<k<-2$　② $-11<k<-1$　③ $-10<k<0$
④ $-9<k<1$　⑤ $-8<k<3$

해설

두 점 A(5, 3), $B(1,\ 1)$의 중점이 $(3,2)$이므로 원의 중심의 좌표는$(3,2)$ 점B와 중심 사이의 거리는 $\sqrt{(3-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{5}$



따라서 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$
원의 방정식은$(x-3)^2+(y-2)^2=(\sqrt{5})^2$
원의 중심 C$(3,2)$에서 직선 $2x-y+k=0$에 이르는 거리는

$$d=\frac{|2\cdot3-2+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|k+4|}{\sqrt{5}}<\sqrt{5}$$

$|k+4|<5$, $-5<k+4<5$
$\therefore\ -9<k<1$

14. 원 $x^2+y^2=4$이 부등식 $x-y<a$의 영역에 포함되도록하는 상수 a의 값의 범위는?

① $a<1$ ② $a>1$ ③ $a\ge 2\sqrt{2}$
④ $a<2\sqrt{2}$ ⑤ $a\ge 3$

해설

원이 부등식의 영역에 포함되어야 하므로 직선 $y=x-a$가 원 $x^2+y^2=4$와 접하거나 아래에 있어야 한다. $x^2+y^2=4$, $y=x-a$ 에서 방정식 $x^2+(x-a)^2=4$
즉, $2x^2-2ax+a^2-4=0$ 의 판별식을 D 라 하면
$\frac{D}{4}=a^2-2(a^2-4)=0$
$a^2=8 \quad \therefore a=\pm 2\sqrt{2}$
따라서 a 의 값의 범위는 $a\ge 2\sqrt{2}$

15. x, y 에 대한 이차식 $2x^2+xy-y^2-x+2y+k$ 가 x, y 에 대한 일차식의 곱으로 인수분해 될 때, 상수 k 의 값은 ?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$2x^2+xy-y^2-x+2y+k$를 x 에 대해 정리하면
$2x^2+(y-1)x-y^2+2y+k$
이 식이 일차식의 곱으로 인수분해 되려면
판별식이 완전제곱식이 되어야 한다.
$D=(y-1)^2-4x2(-y^2+2y+k)$
$\quad=9y^2-18y-8k+1$
이 식이 완전제곱식이므로
$\dfrac{D'}{4}=9^2+9(-8k+1)$
$\therefore k=-1$

해설

일차식의 곱으로 이루어져있으므로, 이차항을 이용하여
$(2x-y+a)(x+y+b)$ 로 나타낼 수 있다.
전개하면, $2x^2+xy-y^2+(a+2b)x+(a-b)y+ab$ 이고
문제에 주어진 식과 같아야 되므로,

$$\begin{array}{rl} & a+2b=-1 \\ -) & a-\ \ b=2 \\ \hline & 3b=-3 \end{array}$$

$\therefore a=1,\quad b=-1$
$\therefore k=ab=-1$

16. 점 (a, b)가 직선 $y = 2x - 3$ 위를 움직일 때, 직선 $y = ax + 2b$는 항상 일정한 점 P를 지난다. 이 때, 점 P의 좌표는?

① P(−4, 6)　② P(−4, −6)　③ P(2, 3)
④ P(3, 2)　⑤ P(−2, −4)

해설

점 (a, b)가 직선 $y = 2x - 3$
위에 있으므로 $b = 2a - 3$
따라서 $y = ax + 2b$에서
$y = ax + 2(2a - 3)$이므로
a에 대하여 정리하면
$a(x + 4) - (6 + y) = 0$
이 식이 a의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로 a에 대한 항등식이다.
$\therefore x + 4 = 0,\ 6 + y = 0$
$\therefore$ P$(-4, -6)$

17. 두 정점 $A(-\sqrt{2},\ 0)$, $B(\sqrt{2},\ 0)$ 가 있다. 조건 $2\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 9$ 를 만족시키는 점 $P(x,\ y)$ 의 자취는 원이다. 이 원의 반지름은?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

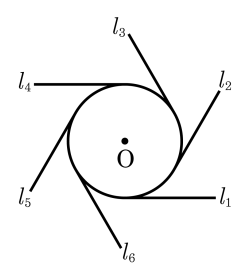
$2\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 9$

$2\left\{(x+\sqrt{2})^2 + y^2\right\} - \left\{(x-\sqrt{2})^2 + y^2\right\} = 9$

이것을 정리하면, $(x+3\sqrt{2})^2 + y^2 = 25$

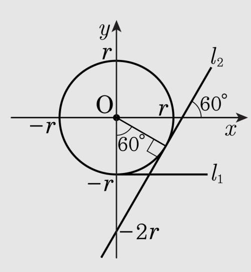
점 P 의 자취는 점 $(-3\sqrt{2},\ 0)$ 을 중심으로 하고,
반지름이 5 인 원이다.

18. 형중이는 수차 제작을 위해 그림과 같은 설계도를 그리고 있다. $l_1,\ l_2,\ \cdots,\ l_6$ 는 원주를 6 등분하는 점에서 원의 접선 방향으로 붙인 날개의 단면이다. 두 접선 l_1 과 l_2 의 연장선의 교점으로부터 원의 중심까지의 거리는 반지름의 몇 배인가?



① 2 배　② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 배　③ $3\sqrt{5}$ 배
④ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 배　⑤ 5 배

해설



그림에서 $l_1 : y = -r$라 놓으면
$l_2 :\ y = \sqrt{3}x + k = \sqrt{3}x - 2r$

l_2 의 x 절편은 $\frac{2r}{\sqrt{3}}$ 이고

원의 반지름이 $\cos 30° = \frac{r}{x}$ 이므로

$x = r \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

따라서, 구하는 l_1 과 l_2 의 연장선의 교점으로부터

원의 중심까지의 거리는 반지름의 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 배이다.

19. 두 다항식 $f(x)=(x-1)(x+1)(x+2)$, $g(x)=2x^3-(a+2)x^2-ax+2a$ 의 최대공약수가 이차식이다. 상수 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=2$

해설

$g(1)=0$이므로 $g(x)$는 $x-1$를 인수로 갖는다. 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 2 & -(a+2) & -a & 2a \\ & & 2 & -a & -2a \\ \hline & 2 & -a & -2a & \boxed{0} \end{array}$$

$g(x)=(x-1)(2x^2-ax-2a)$
$f(x)=(x-1)(x+1)(x+2)$이므로
최대공약수는 $(x-1)(x+1)$ 또는 $(x-1)(x+2)$
ⅰ) $(x-1)(x+1)$ 일 때
$2(-1)^2-a(-1)-2a=0$에서 $a=2$
$\therefore\ g(x)=2(x-1)(x+1)(x-2)$
ⅱ) $(x-1)(x+2)$ 일 때
$2(-1)^2-a(-2)-2a=0-8\neq 0$
ⅰ), ⅱ) 에서
$g(x)=2(x-1)(x+1)(x-2)$이고 $a=2$

20. $x^2+y^2=4$ 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$ 와 두 점 $\mathrm{A}(0,\ -4)$, $\mathrm{B}(3,\ 0)$ 으로 이루어지는 $\triangle\mathrm{PAB}$ 의 넓이의 최대값은?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

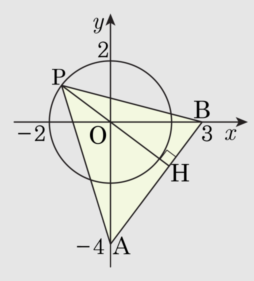
해설

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{3^2+4^2} = 5$

$\triangle\mathrm{ABP}$ 에서 $\overline{\mathrm{AB}}$ 를 밑변으로 보면

높이는 원 위의 점 P 에서 직선 AB 에 이르는

거리이므로, 높이가 최대가 되는 경우는 다음 그림과 같이 직선 PH 가 원의 중심을 지날 때이다.



직선 AB 의 방정식이 $4x-3y-12=0$ 이므로

원의 중심에서 직선에 이르는 거리는

$$\frac{|-12|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{12}{5}$$

따라서 삼각형의 높이는

$\frac{12}{5}+2=\frac{22}{5}$ 이므로

$\triangle\mathrm{PAB}$ 의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2}\times 5\times\frac{22}{5}=11$$