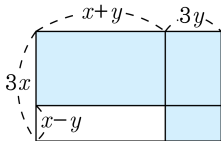


1. 다음 그림의 직사각형에서 색칠한 부분의 넓이를 나타내는 식을 세워 전개하였을 때, y^2 항의 계수는?



① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$\begin{aligned}(x+4y)(3x) - (x+y)(x-y) \\&= 3x^2 + 12xy - x^2 + y^2 \\&= 2x^2 + 12xy + y^2\end{aligned}$$

2. $\frac{x+1}{3} = y-2$ 를 만족하는 모든 실수 x, y 에 대하여, 항상 $ax+by=7$ 이 성립할 때, a, b 의 값을 구하여라. (a, b 는 상수)

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $a = -1$

▷ 정답: $b = 3$

해설

$$\frac{x+1}{3} = y-2, x+1 = 3(y-2)$$

$$x-3y = -7$$

$$-x+3y = 7 \Leftrightarrow ax+by = 7$$

$$\therefore a = -1, b = 3$$

3. $x^2 - 2ax + 2a + 3 < 3$ 을 만족하는 x 가 없도록 하는 정수 a 의 개수는?

① 1개

② 3개

③ 5개

④ 7개

⑤ 9개

해설

$x^2 - 2ax + 2a + 3 < 0$ 의 해가 존재하지 않으려면

모든 실수 x 에 대하여

$x^2 - 2ax + 2a + 3 \geq 0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = a^2 - (2a + 3) \leq 0, (a - 3)(a + 1) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq a \leq 3$$

따라서, 구하는 정수 a 의 개수는

-1, 0, 1, 2, 3의 5개이다.

4. 두 점 $A(4, -3), B(a, 3)$ 사이의 거리가 $6\sqrt{2}$ 일 때, 양수 a 의 값은?

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

두 점 $A(4, -3), B(a, 3)$ 에 대하여

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \sqrt{(a-4)^2 + (3+3)^2} \\ &= \sqrt{a^2 - 8a + 52} \\ &= 6\sqrt{2}\end{aligned}$$

위의 식의 양변을 제곱하면 $a^2 - 8a + 52 = 72$

$$a^2 - 8a - 20 = 0$$

$$(a-10)(a+2) = 0$$

$$\therefore a = 10 (\because a > 0)$$

5. 곡선 $y = x^3$ 위의 서로 다른 세 점 A, B, C의 x 좌표를 각각 a, b, c 라고 한다. 세 점 A, B, C가 일직선 위에 있을 때, 다음 중 항상 성립하는 것은?

- ① $a + b + c = 0$ ② $a + b + c = 1$ ③ $abc = 1$
④ $a + c = 2b$ ⑤ $ac = b^2$

해설

서로 다른 세 점 $A(a, a^3)$, $B(b, b^3)$, $C(c, c^3)$ 이
일직선 위에 있으므로 직선 AB의 기울기와
직선 AC의 기울기는 같다.

$$\therefore \frac{b^3 - a^3}{b - a} = \frac{c^3 - a^3}{c - a}$$

$$\text{즉, } b^2 + ab + a^2 = c^2 + ac + a^2$$

$$(b - c)(a + b + c) = 0 \text{ 에서 } b \neq c \text{ 이므로}$$

$$a + b + c = 0$$

6. 두 원 $(x+1)^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 = 0$ 의 공통접선의 개수는?

① 0개

② 1개

③ 2개

④ 3개

⑤ 4개

해설

$(x+1)^2 + y^2 = 1$ 에서 이 원의 중심을 C_1 이라
하면 점 C_1 의 좌표는 $(-1, 0)$ 이고
반지름의 길이는 1 이다.

$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 = 0$ 에서
 $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 16$ 이므로
이 원의 중심을 C_2 이라 하면
점 C_2 의 좌표는 $(3, 3)$ 이고
반지름의 길이는 4 이다.

$\overline{C_1 C_2} = 5$ 이고

두 원의 반지름의 길이는 1, 4 이므로
두 원은 서로 외접하게 된다.
따라서 공통접선은 3 개이다.

7. 두 복소수 $\alpha = a - 2i, \beta = 5 + bi$ 에 대하여 $\alpha - \bar{\beta} = \overline{3 + 2i}$ 를 만족하는 실수를 a, b 라고 할 때, $a + b$ 의 값은?

① 2

② 4

③ -4

④ 8

⑤ -8

해설

$$\alpha = a - 2i$$

$$\bar{\beta} = \overline{5 + bi} = 5 - bi$$

$$\alpha - \bar{\beta} = a - 2i - (5 - bi) = \overline{3 + 2i}$$

$$(a - 5) + (b - 2)i = 3 - 2i$$

$$\begin{cases} a - 5 = 3 & \therefore a = 8 \\ b - 2 = -2, & \therefore b = 0 \end{cases}$$

8. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $1 + i$ 일 때, 실수 a, b 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -2$

▷ 정답 : $b = 2$

해설

$x^2 + ax + b = 0$ 에 $x = 1 + i$ 를 대입하여 정리하면

$$1 + 2i - 1 + a(1 + i) + b = 0 \text{ 과}$$

$$a + b + (a + 2)i = 0 \text{ 이다.}$$

위 식을 정리하면 $a + b = 0$ 과 $a + 2 = 0$ 에서

$$a = -2, b = 2 \text{ 이다.}$$

해설

계수가 실수이므로 한 근이 복소수 근이면 켤레복소수 근을 갖는다.

따라서 두 근은 $1 + i, 1 - i$

근과 계수의 관계에서

$$-a = (1 + i) + (1 - i) = 2 \quad \therefore a = -2$$

$$b = (1 + i)(1 - i) = 2 \quad \therefore b = 2$$

9. a, b 가 유리수일 때, $x = 1 + \sqrt{2}$ 가 $x^3 - 3x^2 + ax + b = 0$ 의 근이 된다. 이 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

유리계수 방정식이므로 $1 + \sqrt{2}$ 가 근이면 $1 - \sqrt{2}$ 도 근이다.

주어진 방정식의 세 근을 $1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}, \alpha$ 라 하면

$$(1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) + \alpha = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) + \alpha(1 + \sqrt{2}) + \alpha(1 - \sqrt{2}) = a \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\alpha(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = -b \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a = 1, b = 1$

10. x, y, z 에 대한 연립방정식
$$\begin{cases} ax - y - z = 1 \\ -x + ay - z = 1 \\ -x - y + az = 1 \end{cases}$$
의 해가 단 한 쌍 존재할 때, 다음 중 실수 a 의 값이 될 수 없는 것은?

① -3

② -2

③ -1

④ 0

⑤ 1

해설

$$\begin{cases} ax - y - z = 1 & \cdots \textcircled{㉠} \\ -x + ay - z = 1 & \cdots \textcircled{㉡} \\ -x - y + az = 1 & \cdots \textcircled{㉢} \end{cases}$$

$\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡} + \textcircled{㉢}$ 을 하면 $(a-2)(x+y+z) = 3$

(i) $a = 2$ 일 때, $0 \cdot (x+y+z) = 3$ 이므로 해가 존재하지 않는다.

(ii) $a = -1$ 일 때, $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}, \textcircled{㉢}$ 은 같은 식이 되어 해가 무수히 많다.

따라서, 해가 단 한 쌍 존재하도록 하려면 $a \neq 2, a \neq -1$

11. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=2a \\ xy=a \end{cases}$ 를 만족하는 순서쌍 (x,y) 가 한 개 뿐일 때, 양의 실수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\begin{cases} x+y=2a \cdots \textcircled{1} \\ xy=a \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①에서 $y = -x + 2a$ 를 ②에 대입하면

$$x(-x + 2a) = a$$

$\therefore -x^2 + 2ax = a$ 즉 $x^2 - 2ax + a = 0$ 이 한 개의

실근을 가져야 하므로 $D/4 = a^2 - a = 0$

$\therefore a = 0$ 또는 1 그런데

a 는 양의실수 이므로

$$a = 1$$

12. 원점 O와 점 A(3, 6)을 이은 선분 OA를 2 : 1로 내분하는 점을 P, 선분 OP를 2 : 1로 외분하는 점을 Q라고 할 때, 두 점 P, Q 사이의 거리를 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : $2\sqrt{17}$

해설

$$P\left(\frac{2 \times 3 + 1 \times 0}{2 + 1}, \frac{2 \times 6 + 1 \times 0}{2 + 1}\right) = (2, 4)$$

$$Q\left(\frac{2 \times 2 - 1 \times 0}{2 - 1}, \frac{2 \times 6 - 1 \times 0}{2 - 1}\right) = (4, 12) \text{ 이므로}$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{(4 - 2)^2 + (12 - 4)^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17} \text{ 이다.}$$

13. 점 A(5, 3), B(1, 1)을 지름의 양 끝점으로 하는 원과 직선 $y = 2x + k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 k 의 값의 범위는?

① $-12 < k < -2$

② $-11 < k < -1$

③ $-10 < k < 0$

④ $-9 < k < 1$

⑤ $-8 < k < 3$

해설

두 점 A(5, 3), B(1, 1)의 중점이 (3, 2) 이므로 원의 중심의 좌표는 (3, 2) 점 B와 중심 사이의 거리는 $\sqrt{(3-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{5}$

따라서 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$

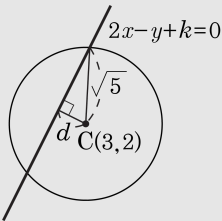
원의 방정식은 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = (\sqrt{5})^2$

원의 중심 C(3, 2)에서 직선 $2x - y + k = 0$ 에 이르는 거리는

$$d = \frac{|2 \cdot 3 - 2 + k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|k + 4|}{\sqrt{5}} < \sqrt{5}$$

$$|k + 4| < 5, -5 < k + 4 < 5$$

$$\therefore -9 < k < 1$$



14. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 이 부등식 $x - y < a$ 의 영역에 포함되도록하는 상수 a 의 값의 범위는?

① $a < 1$

② $a > 1$

③ $a \geq 2\sqrt{2}$

④ $a < 2\sqrt{2}$

⑤ $a \geq 3$

해설

원이 부등식의 영역에 포함되어야 하므로 직선 $y = x - a$ 가 원 $x^2 + y^2 = 4$ 와 접하거나 아래에 있어야 한다. $x^2 + y^2 = 4$, $y = x - a$ 에서 방정식 $x^2 + (x - a)^2 = 4$

즉, $2x^2 - 2ax + a^2 - 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 2(a^2 - 4) = 0$$

$$a^2 = 8 \quad \therefore a = \pm 2\sqrt{2}$$

따라서 a 의 값의 범위는 $a \geq 2\sqrt{2}$

15. x, y 에 대한 이차식 $2x^2 + xy - y^2 - x + 2y + k$ 가 x, y 에 대한 일차식의 곱으로 인수분해 될 때, 상수 k 의 값은 ?

① -1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

$2x^2 + xy - y^2 - x + 2y + k$ 를 x 에 대해 정리하면

$$2x^2 + (y-1)x - y^2 + 2y + k$$

이 식이 일차식의 곱으로 인수분해 되려면

판별식이 완전제곱식이 되어야 한다.

$$D = (y-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-y^2 + 2y + k)$$

$$= 9y^2 - 18y - 8k + 1$$

이 식이 완전제곱식이므로

$$\frac{D'}{4} = 9^2 + 9(-8k + 1)$$

$$\therefore k = -1$$

해설

일차식의 곱으로 이루어져있으므로, 이차항을 이용하여

$(2x - y + a)(x + y + b)$ 로 나타낼 수 있다.

전개하면, $2x^2 + xy - y^2 + (a + 2b)x + (a - b)y + ab$ 이고

문제에 주어진 식과 같아야 되므로,

$$\begin{array}{r} a+2b=-1 \\ -) a-b=2 \\ \hline 3b=-3 \end{array}$$

$$\therefore a = 1, b = -1$$

$$\therefore k = ab = -1$$

16. 점 (a, b) 가 직선 $y = 2x - 3$ 위를 움직일 때, 직선 $y = ax + 2b$ 는 항상 일정한 점 P를 지난다. 이 때, 점 P의 좌표는?

① $P(-4, 6)$

② $P(-4, -6)$

③ $P(2, 3)$

④ $P(3, 2)$

⑤ $P(-2, -4)$

해설

점 (a, b) 가 직선 $y = 2x - 3$

위에 있으므로 $b = 2a - 3$

따라서 $y = ax + 2b$ 에서

$y = ax + 2(2a - 3)$ 이므로

a 에 대하여 정리하면

$$a(x + 4) - (6 + y) = 0$$

이 식이 a 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로 a 에 대한
항등식이다.

$$\therefore x + 4 = 0, 6 + y = 0$$

$$\therefore P(-4, -6)$$

17. 두 점 $A(-\sqrt{2}, 0)$, $B(\sqrt{2}, 0)$ 가 있다. 조건 $2\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 9$ 를 만족시키는 점 $P(x, y)$ 의 자취는 원이다. 이 원의 반지름은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

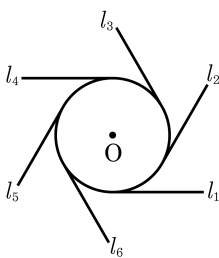
$$2\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 9$$

$$2\{(x + \sqrt{2})^2 + y^2\} - \{(x - \sqrt{2})^2 + y^2\} = 9$$

$$\text{이것을 정리하면, } (x + 3\sqrt{2})^2 + y^2 = 25$$

점 P 의 자취는 점 $(-3\sqrt{2}, 0)$ 을 중심으로 하고,
반지름이 5 인 원이다.

18. 형중이는 수차 제작을 위해 그림과 같은 설계를 하고 있다. $l_1, l_2, \dots, l_6$ 는 원주를 6 등분하는 점에서 원의 접선 방향으로 붙인 날개의 단면이다. 두 접선 l_1 과 l_2 의 연장선의 교점으로부터 원의 중심까지의 거리는 반지름의 몇 배인가?



- ① 2 배 ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 배 ③ $3\sqrt{5}$ 배
 ④ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 배 ⑤ 5 배

해설

그림에서 $l_1 : y = -r$ 라 놓으면

$$l_2 : y = \sqrt{3}x + k = \sqrt{3}x - 2r$$

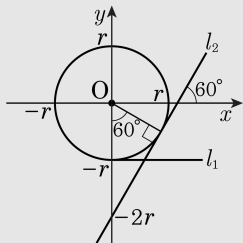
l_2 의 x 절편은 $\frac{2r}{\sqrt{3}}$ 이고

원의 반지름이 $\cos 30^\circ = \frac{r}{x}$ 이므로

$$x = r \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

따라서, 구하는 l_1 과 l_2 의 연장선의 교점으로부터

원의 중심까지의 거리는 반지름의 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 배이다.



19. 두 다항식 $f(x) = (x-1)(x+1)(x+2)$, $g(x) = 2x^3 - (a+2)x^2 - ax + 2a$ 의 최대공약수가 이차식이다. 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

해설

$g(1) = 0$ 이므로 $g(x)$ 는 $x-1$ 를 인수로 갖는다. 조립제법을 이용하면

1	2	$-(a+2)$	$-a$	$2a$
		2	$-a$	$-2a$
	2	$-a$	$-2a$	0

$$g(x) = (x-1)(2x^2 - ax - 2a)$$

$$f(x) = (x-1)(x+1)(x+2) \text{ 이므로}$$

최대공약수는 $(x-1)(x+1)$ 또는 $(x-1)(x+2)$

i) $(x-1)(x+1)$ 일 때

$$2(-1)^2 - a(-1) - 2a = 0 \text{ 에서 } a = 2$$

$$\therefore g(x) = 2(x-1)(x+1)(x-2)$$

ii) $(x-1)(x+2)$ 일 때

$$2(-1)^2 - a(-2) - 2a = 0 - 8 \neq 0$$

i), ii) 에서

$$g(x) = 2(x-1)(x+1)(x-2) \text{ 이고 } a = 2$$

20. $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점 $P(x, y)$ 와 두 점 $A(0, -4)$, $B(3, 0)$ 으로 이루어지는 $\triangle PAB$ 의 넓이의 최대값은?

① 10

② 11

③ 12

④ 13

⑤ 14

해설

$$\overline{AB} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$\triangle ABP$ 에서 $\overline{AB}$ 를 밑변으로 보면

높이는 원 위의 점 P 에서 직선 AB 에 이르는

거리이므로, 높이가 최대가 되는 경우는 다음 그림과 같이 직선 PH 가 원의 중심을 지날 때이다.

직선 AB 의 방정식이 $4x - 3y - 12 = 0$ 이므로

원의 중심에서 직선에 이르는 거리는

$$\frac{|-12|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{12}{5}$$

따라서 삼각형의 높이는

$$\frac{12}{5} + 2 = \frac{22}{5} \text{ 이므로}$$

$\triangle PAB$ 의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times 5 \times \frac{22}{5} = 11$$

