1. $y = 5x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼, 평행이동한 식을 $y = ax^2 + bx + c$ 라 할 때, $a - b + c$를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 48

해설

$$\begin{aligned} y &= 5(x-2)^2 + 3 \\ &= 5(x^2 - 4x + 4) + 3 \\ &= 5x^2 - 20x + 23 \end{aligned}$$

$\therefore\ a = 5,\ b = -20,\ c = 23$

$\therefore\ a - b + c = 5 - (-20) + 23 = 48$

2. $y = x^2 + 4x - 7$ 을 $y = a(x-p)^2 + q$ 의 꼴로 고쳤을 때, $a + p + q$ 의 값을 구하여라.

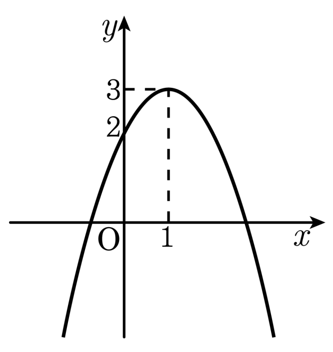
▶ 답 :

▷ 정답 : -12

해설

$y = x^2 + 4x - 7$
$= (x^2 + 4x + 4 - 4) - 7$
$= (x+2)^2 - 11$
$\therefore\ a = 1,\ p = -2,\ q = -11$
$\therefore\ a + p + q = 1 - 2 - 11 = -12$

3. 다음 그림은 이차함수의 그래프를 그린 것이다. 이 이차함수의 식을 구하면?



① $y = -2x^2 + 4x + 2$ ② $y = -x^2 + 2x + 2$

③ $y = -2x^2 - 4x + 2$ ④ $y = -x^2 - 2x + 2$

⑤ $y = -3x^2 - 6x + 2$

해설

$y = a(x-1)^2 + 3$ 이 점 $(0,\ 2)$ 를 지나므로

$2 = a(0-1)^2 + 3,\ a = -1$ 이다.

$$\therefore\ y = -(x-1)^2 + 3$$
$$= -x^2 + 2x + 2$$

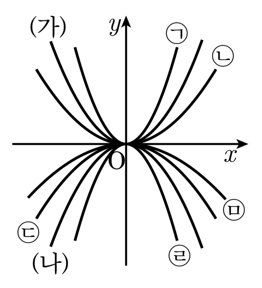
4. 이차함수 $y = 3x^2$ 의 그래프는 점 $(a,\ 12)$ 를 지나고, 이차함수 $y = bx^2$ 과 x 축에 대하여 대칭이다. 이 때, ab 의 값은?

① ± 2 ② ± 3 ③ ± 5 ④ ± 6 ⑤ ± 7

해설

$y = 3x^2$ 에 $(a,\ 12)$ 를 대입하면 $a = \pm 2$ 이다.
x 축과 대칭인 함수는 x^2 의 계수의 절댓값이 같고 부호가 서로 반대이므로 $b = -3$ 이다.
$\therefore ab = \pm 6$

5. 다음 그림은 모두 꼭짓점이 원점인 포물선이고, $y = x^2$ ⋯㈎, $y = -x^2$ ⋯㈏이다. $-1 < a < 0$ 일 때, $y = -ax^2$ 의 그래프로 알맞은 것은?

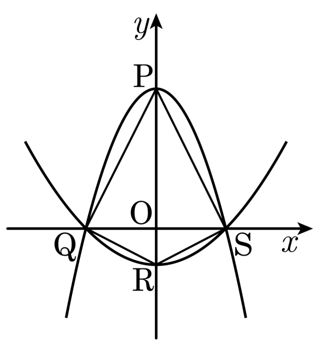


① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢
④ ㉣ ⑤ ㉤

해설

$0 < -a < 1$ 이므로 ㈎와 x 축 사이에 있는 그래프를 찾으면 ㉡이다.

6. 함수 $y=-x^2$ 의 그래프를 y 축 방향으로 4 만큼 평행이동하고, $y=\frac{1}{4}x^2$ 의 그래프를 y 축 방향으로 -1 만큼 평행이동한 그림을 나타낸 것이다. 이 때 다음 설명 중 옳은 것의 개수는?



㉠ 점 $\mathrm{P}(0,4)$ 이고, 점 $\mathrm{R}(0,-1)$ 이다.
㉡ 점 $\mathrm{Q}(2,0)$ 이고, 점 $\mathrm{S}(-2,0)$ 이다.
㉢ $\overline{\mathrm{QS}}=8$ 이다.
㉣ $\triangle\mathrm{PRS}=5,\ \triangle\mathrm{QPR}=8$ 이다.
㉤ $\square\mathrm{PQRS}=12$ 이다.

① 1 개　② 2 개　③ 3 개　④ 4 개　⑤ 5 개

해설

함수 $y=-x^2$ 의 그래프를 y 축 방향으로 4 만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=-x^2+4$

함수 $y=\frac{1}{4}x^2$ 의 그래프를 y 축 방향으로 -1 만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=\frac{1}{4}x^2-1$

$y=-x^2+4$ 에 $y=0$ 을 대입하면 점 $\mathrm{Q}(-2,0),\ \mathrm{S}(2,0)$ 이다.

$\overline{\mathrm{QS}}=4$

또, $\mathrm{P}(0,\ 4)$ 이고 $\mathrm{R}(0,\ -1)$

$\triangle\mathrm{PRS}=\triangle\mathrm{QPR}=5$

따라서 옳은 것은 ㉠이므로 1 개이다.

7. 이차함수 $y=\frac{2}{3}x^2$ 의 그래프를 꼭짓점의 좌표가 $(2,\ 0)$ 이 되도록 평행이동하면 점 $(k,\ 6)$ 을 지난다. 이 때, 상수 k 의 값을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

▷ 정답 : −1

해설

이차함수 $y=\frac{2}{3}x^2$ 의 그래프를 꼭짓점의 좌표가 $(2,\ 0)$ 이 되도록 평행이동하면 $y=\frac{2}{3}(x-2)^2$ 이다. 점 $(k,\ 6)$ 을 지나므로 대입하면 $6=\frac{2}{3}(k-2)^2$, $9=(k-2)^2$, $k-2=\pm3$ 따라서 $k=5,\ -1$ 이다.

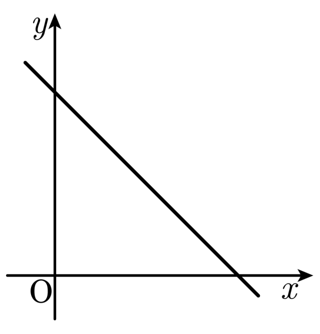
8. 이차함수 $y = -3x^2$ 의 그래프를 꼭짓점의 좌표가 $(5, -2)$ 가 되도록 평행이동하면 점 $(k, -3)$ 을 지난다. 이 때, 상수 k 의 값을 모두 곱하면?

① $\frac{1}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{74}{3}$ ④ $-\frac{80}{3}$ ⑤ -10

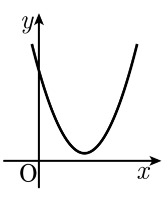
해설

$y = -3x^2$ 을 꼭짓점의 좌표가 $(5, -2)$ 가 되도록 평행이동하면
$y = -3(x-5)^2 - 2$ 이고
$y = -3(x-5)^2 - 2$ 가 점 $(k, -3)$ 을 지나므로 대입하면 $-3 = -3(k-5)^2 - 2$, $3k^2 - 30k + 74 = 0$ 이다.
상수 k 의 값의 곱은 $3k^2 - 30k + 74 = 0$ 의 두 근의 곱과 같으므로 $\frac{74}{3}$ 이다.

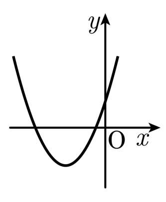
9. 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차함수 $y = a(x+b)^2 - a$ 의 그래프로 적당한 것은?



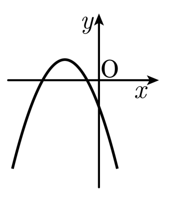
①



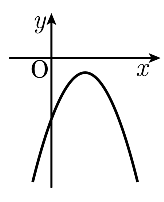
②



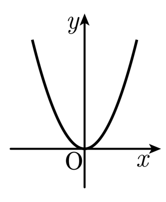
③



④



⑤



해설

그래프가 오른쪽 아래를 향하므로 $a < 0$ 이고 (y절편) > 0 이므로 $b > 0$ 이다. 따라서 $y = a(x+b)^2 - a$ 의 그래프는 위로 볼록하고, $-b < 0$, $-a > 0$ 이므로 꼭짓점이 제 2 사분면 위에 있는 그래프이다.

10. 다음 보기의 이차함수 그래프 중 $y = ax^2$ 의 그래프가 3 번째로 폭이 넓을 때, $|a|$ 의 범위는?

보기

㉠ $y = -\frac{3}{2}x^2$ ㉡ $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}$
㉢ $y = 2x^2 - x$ ㉣ $-3(x+2)^2$
㉤ $y = \frac{x(x-1)(x+1)}{x+1}$

① $1 < |a| < \frac{1}{2}$ ② $1 < |a| < \frac{3}{2}$ ③ $1 < |a| < \frac{5}{2}$
④ $\frac{1}{2} < |a| < \frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{1}{2} < |a| < \frac{5}{2}$

해설

a 의 절댓값이 작을수록 폭이 넓어진다.
a 의 절댓값을 각각 구하면
㉠ $\frac{3}{2}$ ㉡ $\frac{1}{2}$ ㉢2 ㉣3 ㉤1 이므로 폭이 넓은 순서는 ㉡, ㉤, ㉠, ㉢, ㉣ 이다. 따라서 두 번째인 1과 세 번째인 $\frac{3}{2}$ 사이에 있어야 하므로
④ $1 < |a| < \frac{3}{2}$ 이다.

11. 다음 이차함수의 그래프 중 4 번째로 폭이 좁은 것은?

① $y = -(x-2)^2$

② $y = \dfrac{2x(x-1)(x+1)}{x-1}$

③ $y = \dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{1}{3}$

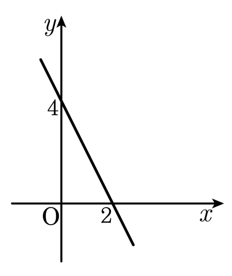
④ $y = -3x^2 + x$

⑤ $y = -\dfrac{5}{2}x^2$

해설

a 의 절댓값이 클수록 폭이 좁아진다.
a 의 절댓값을 각각 구하면
① 1
② 2
③ $\dfrac{1}{3}$
④ 3
⑤ $\dfrac{5}{2}$
이므로 폭이 좁은 순서는 ④, ⑤, ②, ①, ③이다. 따라서 네 번째로 폭이 좁은 것은 ①이다.

12. 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차함수 $y = \frac{1}{2}ax^2 + bx + 3$ 의 꼭짓점의 좌표를 구하면?



① $(-2,\ 7)$　② $(-2,\ -7)$　③ $(7,\ 2)$　④ $(-7,\ 2)$　⑤ $(2,\ 7)$

해설

$a = -2, b = 4$ 이므로

$$y = \frac{1}{2}ax^2 + bx + 3$$
$$= -x^2 + 4x + 3$$
$$= -(x-2)^2 + 7$$

따라서 꼭짓점의 좌표는 $(2, 7)$ 이다.

13. 이차함수 $y = 3x^2 + 2x + a$ 의 그래프가 점 $(a, a^2 + 2)$ 를 지나고 x 축과 두 점에서 만나도록 a 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -2$

해설

$a^2 + 2 = 3a^2 + 2a + a$, $2a^2 + 3a - 2 = 0$,
$(2a - 1)(a + 2) = 0$

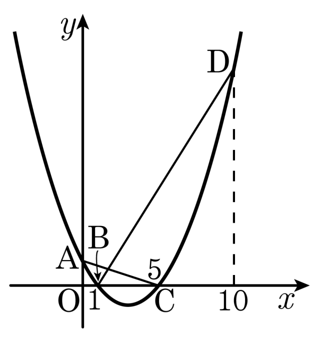
$\therefore a = \frac{1}{2},\ -2$

x 축과 두 점에서 만나므로

$D = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot a > 0$, $a < \frac{1}{3}$

$\therefore\ a = -2$

14. 다음 그림은 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프이다. 삼각형 ABC 의 넓이가 12 일 때, 삼각형 BCD 의 넓이를 구하면?



① 106　　② 107　　③ 108　　④ 109　　⑤ 110

해설

$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times (5-1) \times c = 12$ 이다.

$c = 6$, 즉 $A(0, 6)$ 이다.

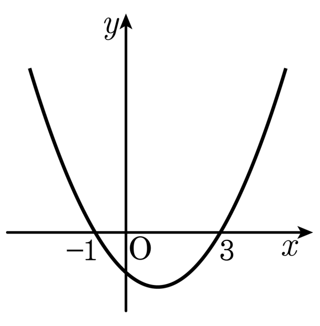
$y = ax^2 + bx + 6 = a(x-1)(x-5) = ax^2 - 6ax + 5a$ 이다.

$5a = 6,\ a = \frac{6}{5},\ b = -\frac{36}{5}$ 이다.

$y = \frac{6}{5}x^2 - \frac{36}{5}x + 6$ 이므로 $D(10, 54)$ 이다.

$\triangle BCD = \frac{1}{2} \times (5-1) \times 54 = 108$

15. 다음은 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프이다. <보기> 중 옳은 것은 모두 몇 개인가?



보기

㉠ $b^2 - 4ac > 0$

㉡ $abc < 0$

㉢ $a - b + c < 0$

㉣ $9a + 3b + c > 0$

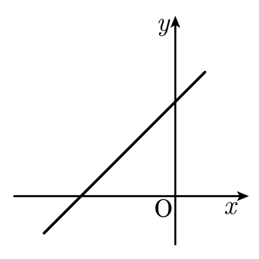
㉤ $a + b + c < 4a + 2b + c$

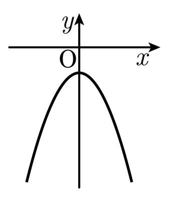
① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5개

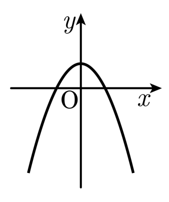
해설

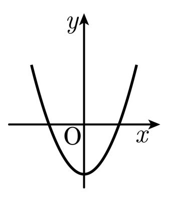
아래로 볼록한 포물선이므로 $a > 0$
축이 y 축의 오른쪽에 있으므로 $ab < 0$
$\therefore b < 0$
y 절편이 음수이므로 $c < 0$
㉠ x 축과의 교점이 2개이므로 $b^2 - 4ac > 0$
㉡ $abc > 0$
㉢ $x = -1$ 일 때, $y = a - b + c = 0$
㉣ $x = 3$ 일 때, $y = 9a + 3b + c = 0$
㉤ $x = 1$ 일 때, $y = a + b + c$, $x = 2$ 일 때, $y = 4a + 2b + c$,
$a + b + c < 4a + 2b + c$

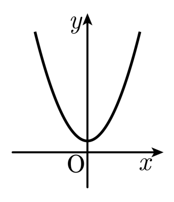
16. 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프가 다음그림과 같을 때 이차함수 $y = ax^2 + b$ 의 그래프로 옳은 것은?

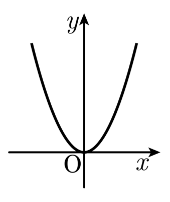


①


②


③


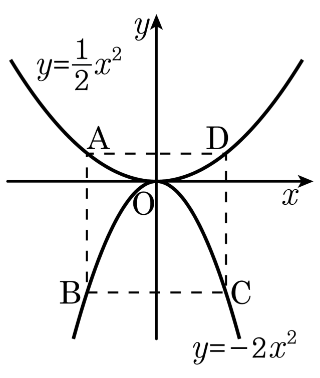
④


⑤


해설

$a > 0, b > 0$ 이므로 $y = ax^2 + b$ 의 그래프는 아래로 볼록하고 꼭짓점은 y 축의 위에 있다.

17. 다음 그림과 같이 두 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = -2x^2$ 의 그래프 위에 네 점 A, B, C, D 가 있다. 이 때, □ABCD 는 정사각형일 때, 점 A 의 y 좌표는?



① $\frac{2}{25}$ ② $\frac{4}{25}$ ③ $\frac{6}{25}$ ④ $\frac{8}{25}$ ⑤ $\frac{11}{25}$

해설

점 A 의 좌표를 $\left(a,\ \frac{1}{2}a^2\right)$ 이라고 하면 B $(a,\ -2a^2)$, D $\left(-a,\ \frac{1}{2}a^2\right)$ 이고 $\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{AB}}$ 이므로

$2a = \left\{\frac{1}{2}a^2 - (-2a^2)\right\}$, $a = \frac{4}{5}$ $(\because a \neq 0)$ 이다.

따라서 점 A 의 y 좌표는 $\frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{8}{25}$ 이다.

18. $y = 2(x-3)^2 - 5$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 , y축의 방향으로 5 만큼 평행이동 한 이차함수의 그래프 위에 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 8)$, $\mathrm{B}(a,\ b)$ 의 y 축에 대하여 대칭인 점을 각각 C , D 라 하고, 원점을 O 라 한다. $\triangle\mathrm{ABC}$ 와 $\triangle\mathrm{BOD}$ 의 넓이의 비가 $2\ :\ a^2$ 일 때, a 의 값을 구하면? (단, $0 < a < 2$)

① $a = \dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}$　　② $a = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$

③ $a = \dfrac{-1+\sqrt{10}}{2}$　　④ $a = \dfrac{-1-\sqrt{10}}{2}$

⑤ $a = \dfrac{2}{3}$

해설

$y = 2(x-3)^2 - 5$ 의 그래프를 평행이동하면 $y = 2x^2$ 이다. 점 $\mathrm{A}(2,8)$ 의 y 축에 대하여 대칭인 점 C 의 좌표는 $(-2,8)$ 이고, 점 $\mathrm{B}(a,b)$ 의 y 축에 대하여 대칭인 점 D 의 좌표는 $(-a,b)$ 이다. 이 때, $\triangle\mathrm{ABC}$ 의 $\overline{\mathrm{AC}}$ 를 밑변, 점 A, B 의 y 좌표의 차를 높이로 하면 $\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2} \times 4 \times (8-b)$

이 식에 $b = 2a^2$ 을 대입하면($\because (a,\ b)$ 는 $y = 2x^2$ 위의 점)

$\dfrac{1}{2} \times 4 \times (8-2a^2) = 4(4-a^2)$

또한, $\triangle\mathrm{BOD} = \dfrac{1}{2} \times 2a \times 2a^2 = 2a^3$

$\triangle\mathrm{ABC}$ 와 $\triangle\mathrm{BOD}$ 의 넓이의 비가 $2 : a^2$ 이므로 $4(4-a^2) : 2a^3 = 2 : a^2$

$\therefore a^2(4-a^2) = a^3, a^2 + a - 4 = 0$ 에서 $a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+16}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$

여기서 $0 < a < 2$ 이므로 $a = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$

19. x축 위의 두 점 A(5, 0), B(−3, 0)과 이차함수 $y = a(x+1)^2$의 그래프와 직선 $y = -12$와의 두 교점 C, D를 연결한 사각형은 평행사변형일 때, 상수 a의 값을 구하여라. (단, $a < 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{3}{4}$

해설

□ABCD는 평행사변형이므로 마주 보는 두 변의 길이가 같다.
$\overline{AB} = \overline{CD} = 8$
점 C와 D는 직선 $x = -1$을 중심으로 좌우대칭이므로 B(−5, −12), C(3, −12)
점 C와 점 D는 $y = a(x+1)^2$ 위의 점이므로
$-12 = 16a$
$\therefore\ a = -\frac{3}{4}$

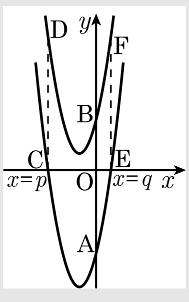
20. 두 이차함수 $y = 2x^2 + 4x + 3$, $y = 2x^2 + 4x - 5$ 의 그래프가 y 축과 만나는 점을 각각 A, B, 직선 $x = p$ 와 만나는 점을 각각 C, D, 직선 $x = q$ 와 만나는 점을 각각 E, F 라 할 때, $\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{CD}}} + \dfrac{\overline{\mathrm{EF}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$y = 2x^2 + 4x + 3$ 은 $y = 2(x+1)^2 + 1$
$y = 2x^2 + 4x - 5$ 는 $y = 2(x+1)^2 - 7$ 이므로
$y = 2x^2 + 4x - 5$ 의 그래프는 $y = 2x^2 + 4x + 3$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -8 만큼 평행이동한 것이므로



$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{CD}} = \overline{\mathrm{EF}}$

$\therefore \dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{CD}}} + \dfrac{\overline{\mathrm{EF}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = 2$

21. 두 이차함수 $f(x) = x^2 + 4x + 2,\ g(x) = x^2 - 2$ 에 대하여 $h(x) = \dfrac{g(x+1)}{f(x)}$ 이라고 할 때, $h(1)h(2)h(3)\cdots h(30)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{1}{511}$

해설

$f(x) = (x+2)^2 - 2, g(x) = x^2 - 2$ 이므로

$y = f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼 평행이동하면

$y = g(x)$ 의 그래프가 되므로

$\therefore\ g(x) = f(x-2)$

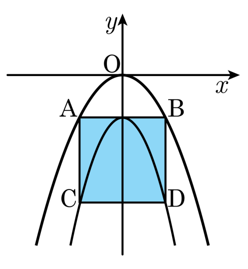
$\therefore h(1)h(2)h(3)\cdots h(30)$

$$= \frac{g(2)g(3)g(4)\cdots g(31)}{f(1)f(2)f(3)\cdots f(30)}$$

$$= \frac{f(0)f(1)f(2)\cdots f(29)}{f(1)f(2)f(3)\cdots f(30)}$$

$$= \frac{f(0)}{f(30)} = \frac{2}{1022} = \frac{1}{511}$$

22. 다음 그림에서 두 점 A, B는 이차함수 $y=-x^2$ 위의 점이고, 점 C, D는 이차함수 $y=-2x^2-1$ 위의 점이다. 사각형 ABDC 가 정사각형일 때, 이 정사각형의 넓이를 구하여라. (단, 사각형의 각 변은 모두 좌표축과 평행하다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

점 A 의 x 좌표를 a라 하면

A$(a,\ -a^2)$, B$(-a,\ -a^2)$, C$(a,\ -2a^2-1)$, D$(-a,\ -2a^2-1)$

□ABCD는 정사각형이므로

$-2a=-a^2-(-2a^2-1)$

$(a+1)^2=0$

$\therefore\ a=-1$

따라서 □ABCD $=2\times2=4$ 이다.

23. 다음은 $y = 2x^2 - kx + 3$이 점 $(1,1)$을 지날 때의 설명을 나타낸 것이다. 이 때, 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 고르면?

㉠ 꼭짓점의 좌표는 $(-1,\ 1)$ 이다.
㉡ 직선 $x = 1$ 을 축으로 한다.
㉢ x 축과 한 점에서 만난다.
㉣ y 축과의 교점의 좌표는 $(0, 3)$ 이다.
㉤ $y = 2x^2$ 의 그래프를 x 축으로 -1, y 축으로 3 만큼 평행이동한 것이다.

① ㉠,㉡,㉢ ② ㉠,㉡,㉣ ③ ㉠,㉡,㉤
④ ㉠,㉢,㉤ ⑤ ㉠,㉣,㉤

해설

$y = 2x^2 - kx + 3$이 점 $(1, 1)$을 지나므로 $1 = 2 - k + 3, k = 4$
$y = 2x^2 - 4x + 3 = 2(x-1)^2 + 1$
㉠ 꼭짓점의 좌표 $(1, 1)$
㉢ x축과 만나지 않는다.
㉤ x축으로 1, y축으로 1만큼 평행이동한 것이다.

24. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 세 점 $(0,\ 1)$, $(1,\ 2)$, $(-1,\ 4)$ 를 지날 때, 꼭짓점은 제 A 사분면 위에 있으며 제 B 사분면과 제 C 사분면을 지나지 않는다. $A + B + C$ 의 값을 구하면?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

주어진 세 점을 각각 $y = ax^2 + bx + c$ 에 대입한다.
점 $(0,\ 1)$ 을 대입하면 $c = 1$
점 $(1,\ 2)$ 를 대입하면 $a + b + 1 = 2$
즉, $a + b = 1 \cdots\cdots$ ㉠
점 $(-1,\ 4)$ 를 대입하면 $a - b + 1 = 4$
즉, $a - b = 3 \cdots\cdots$ ㉡
㉠+ ㉡에서 $2a = 4$
$\therefore a = 2$, $b = -1$

$$\begin{aligned} \therefore y &= 2x^2 - x + 1 \\ &= 2\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} - \frac{1}{16}\right) + 1 \\ &= 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} \end{aligned}$$

따라서, 꼭짓점의 좌표가 $\left(\frac{1}{4}, \frac{7}{8}\right)$ 이므로 꼭짓점의 좌표는 제 1 사분면 위에 있으며 $a > 0$ 이므로 아래로 볼록 즉, 제 1, 2 사분면을 지난다.
따라서 $A = 1, B = 3, C = 4$ 이므로 $A + B + C = 1 + 3 + 4 = 8$ 이다.

25. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - 2(p+2)x + 2p - 3q = 0$ 이 중근을 가질 때, q 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$x^2 - 2(p+2)x + 2p - 3q = 0$이 중근을 가지므로

$$\frac{D}{4} = (p+2)^2 - 2p + 3q$$

$$= p^2 + 4p + 4 - 2p + 3q = 0$$

$$\therefore\ q = -\frac{1}{3}p^2 - \frac{2}{3}p - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}(p+1)^2 - 1$$

따라서 $p = -1$ 일 때, q 는 최댓값 -1 을 갖는다.

26. 세 실수 x, y, z 에 대하여 $\frac{x+2}{2}=\frac{y+1}{3}=z-2$ 일 때, $(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{379}{50}$

해설

$\frac{x+2}{2}=\frac{y+1}{3}=z-2=k$ 라 하면

$x+2=2k,\ y+1=3k,\ z-2=k$

이를 $(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2$ 에 대입하면

$(5k-3)^2+(4k+1)^2+(3k)^2$

$=50k^2-22k+10$

$=50\left(k-\frac{11}{50}\right)^2+\frac{379}{50}$

따라서 $k=\frac{11}{50}$ 일 때, 최솟값이 $\frac{379}{50}$ 이다.

27. 이차함수 $f(x) = x^2 - (6+p)x + 4p + 12$ $(-3 \le x \le -1)$ 의 최솟값이 0 일 때, p 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{19}{5}$

해설

$f(x) = x^2 - (6+p)x + 4p + 12$

$= \left(x - \frac{6+p}{2}\right)^2 - \frac{p^2 - 4p - 12}{4}$

(1) $\frac{6+p}{2} < -3$, 즉, $p < -12$ 인 경우

$x = -3$ 일 때, 최솟값이 0 이므로

$f(-3) = 7p + 39 = 0$

$\therefore\ p = -\frac{39}{7}$

그런데 $p < -12$ 이므로 주어진 조건을 만족하는 p 값은 존재하지 않는다.

(2) $-3 \le \frac{6+p}{2} \le -1$, 즉, $-12 \le p \le -8$ 인 경우

$x = \frac{6+p}{2}$ 일 때, 최솟값이 0 이므로

$f\left(\frac{6+p}{2}\right) = 0$

$p^2 - 4p - 12 = 0$

$(p+2)(p-6) = 0$

$\therefore\ p = -2$ 또는 6

그런데 $-12 \le p \le -8$ 이므로 주어진 조건을 만족하는 p 값이 존재하지 않는다.

(3) $\frac{6+p}{2} \ge -1$, 즉, $p \ge -8$ 인 경우

$x = -1$ 일 때, 최솟값이 0 이므로 $f(-1) = 0$

$\therefore\ p = -\frac{19}{5}$

따라서 (1), (2), (3) 에서 $p = -\frac{19}{5}$ 이다.

28. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 두 점 $(-4,\ 0)$, $(2,\ 0)$ 을 지나고 최솟값이 -3 일 때, 상수 $a,\ b,\ c$ 의 값을 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = \frac{1}{3}$

▷ 정답 : $b = \frac{2}{3}$

▷ 정답 : $c = -\frac{8}{3}$

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 두 점 $(-4,\ 0)$, $(2,\ 0)$ 을 각각 지나므로

$16a - 4b + c = 0$

$4a + 2b + c = 0$

$\therefore\ b = 2a,\ c = -8a$

또 주어진 함수의 최솟값이 -3 이므로

$y = ax^2 + bx + c$

$= ax^2 + 2ax - 8a$

$= a(x+1)^2 - 9a$

$\therefore\ -9a = -3$

따라서 $a = \frac{1}{3},\ b = \frac{2}{3},\ c = -\frac{8}{3}$ 이다.

29. 이차함수 $y = ax^2 + 2bx + 4c$ 의 그래프가 두 점 $(-2,\ 0),\ (4,\ 0)$ 을 지나고 최솟값이 -6 일 때, 상수 $a+b+c$ 의 값을 각각 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{4}{3}$

해설

$y = ax^2 + 2bx + 4c$ 의 그래프가 두 점 $(-2,\ 0),\ (4,\ 0)$ 을 각각 지나므로

$4a - 4b + 4c = 0$

$a - b + c = 0$

$16a + 8b + 4c = 0$

$4a + 2b + c = 0$

$\therefore\ b = -a,\ c = -2a$

또 주어진 함수의 최솟값이 -6 이므로

$y = ax^2 + 2bx + 4c$

$= ax^2 - 2ax - 8a$

$= a(x-1)^2 - 9a$

$\therefore\ -9a = -6$

따라서 $a = \frac{2}{3},\ b = -\frac{2}{3},\ c = -\frac{4}{3}$ 이므로 $a+b+c = -\frac{4}{3}$ 이다.

30. $-1 \le \dfrac{p}{2} \le 0$, $p+2q \le 2$ 를 만족하는 실수 p, q 에 대하여 이차함수 $y = x^2 + px + q \ (0 \le x \le 1)$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{5}{4}$

해설

$y = x^2 + px + q = \left(x + \dfrac{p}{2}\right)^2 + q - \dfrac{p^2}{4}$

이 때 $-1 \le \dfrac{p}{2} \le 0$ 에서 $0 \le -\dfrac{p}{2} \le 1$ 이므로

최솟값 m 은 $x = -\dfrac{p}{2}$ 일 때이다.

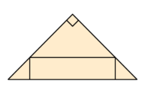
$\therefore \ m = q - \dfrac{p^2}{4}$

또한 $p + 2q \le 2$ 에서 $q \le -\dfrac{p}{2} + 1$

$\therefore \ m \le -\dfrac{p^2}{4} - \dfrac{p}{2} + 1 = -\dfrac{1}{4}(p+1)^2 + \dfrac{5}{4}$

따라서 m 의 최댓값은 $\dfrac{5}{4}$ 이다.

31. 빗변의 길이가 40 인 직각이등변삼각형에 다음 그림과 같이 직사각형을 그릴 때, 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하여라.

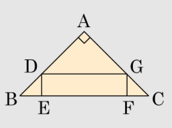


▶ 답 :

▷ 정답 : 200

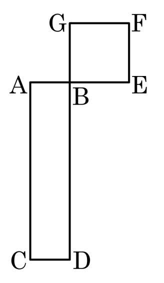
해설

다음 그림에서 선분 DE 의 길이를 x 라 하면
$\triangle$ABC 는 이등변삼각형이고 $\angle B = 45°$ 이므로
$\overline{BE} = x$ 이다.



마찬가지로 $\overline{FC} = x$
$\therefore\ \overline{EF} = 40 - x - x = 40 - 2x$
직사각형의 넓이를 S 라 하면
$S = x(40 - 2x)$
$= -2x^2 + 40x$
$= -2(x - 10)^2 + 200$
따라서 $x = 10$ 일 때, 직사각형의 넓이의 최댓값은 200 이다.

32. 다음 그림과 같이 선분 AB 의 연장선 위에 $\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{BE}} = 2 : 3$ 이 되도록 점 E 를 잡고 선분 BE 를 한 변으로 하는 정사각형 BEFG 를 그릴 때, 선분 GD 의 길이는 12 이다. 이때 $\overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{AC}}^2$ 의 최솟값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{576}{13}$

해설

$\overline{\mathrm{AB}} = x$ 라 하면

$\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{BE}} = 2 : 3$ 이므로

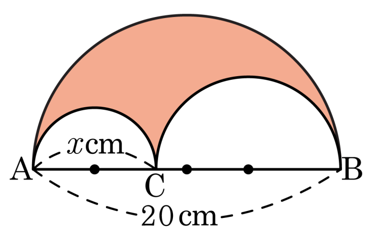
$\overline{\mathrm{BE}} = \frac{3}{2}x = \overline{\mathrm{BG}}$

$\overline{\mathrm{BD}} = 12 - \overline{\mathrm{BG}} = 12 - \frac{3}{2}x = \overline{\mathrm{AC}}$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{AC}}^2 &= x^2 + \left(12 - \frac{3}{2}x\right)^2 \\ &= \frac{13}{4}\left(x - \frac{72}{13}\right)^2 + \frac{576}{13}\end{aligned}$$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{AC}}^2$ 의 최솟값은 $\frac{576}{13}$ 이다.

33. 다음 그림과 같이 세 개의 반원으로 이루어진 도형이 있다. 큰 반원의 지름이 20 cm 이고 색칠한 부분의 넓이가 $y\pi\,\mathrm{cm}^2$ 일 때, y 의 최댓값을 구하면?



① 10　② 15　③ 16　④ 25　⑤ 36

해설

$\overline{\mathrm{AC}} = x\,\mathrm{cm}$ 이므로 $\overline{\mathrm{BC}} = (20-x)\,\mathrm{cm}$ 이다.
따라서 색칠한 부분의 넓이 S 는
(전체 반원의 넓이 - 작은 두 원의 넓이의 합) 이다.

$$\frac{1}{2}\times 10^2\pi - \left\{\frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{20-x}{2}\right)^2\right\} = y\pi$$

$$50\pi - \left(\frac{x^2}{8}\pi + \frac{400-40x+x^2}{8}\pi\right) = y\pi$$

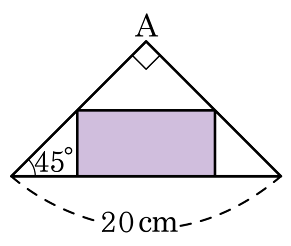
$$50\pi - \left(\frac{2x^2-40x+400}{8}\right)\pi = y\pi$$

$$-\frac{1}{4}x^2\pi + 5x\pi = y\pi$$

$$\begin{aligned} y\pi &= -\frac{1}{4}\pi(x^2-20x) \\ &= -\frac{1}{4}\pi(x^2-20x+100-100) \\ &= -\frac{1}{4}\pi(x-10)^2 + 25\pi \text{이다.} \end{aligned}$$

따라서 두 원의 반지름이 각각 10 cm 일 때, 넓이는 최댓값 $25\pi\,\mathrm{cm}^2$ 를 갖는다.

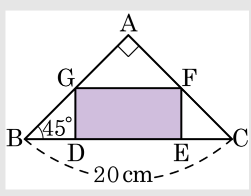
34. 빗변의 길이가 20cm 인 직각이등변삼각형에 그림과 같이 직사각형을 그려 넣을 때, 이 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하여라.



▶ **답 :** ______ cm^2

▷ **정답 :** $50\,\text{cm}^2$

해설



주어진 그림은 직각이등변삼각형이므로
$\overline{BD} = \overline{DG} = \overline{EC} = \overline{EF}$ 이고, $\overline{GD} = x$ 라 하면
$\overline{DE} = 20 - 2x$ 이다. 넓이를 y 로 놓으면

$$\begin{aligned} y &= x(20 - 2x) \\ &= -2x^2 + 20x \\ &= -2(x-5)^2 + 50 \end{aligned}$$

따라서, 최댓값은 50 이다.

35. 지면으로부터 $20\,\mathrm{m}$ 높이의 옥상에서 초속 $20\,\mathrm{m}$ 로 쏘아 올린 물체의 t 초 후의 높이를 $h\,\mathrm{m}$ 라 할 때, 관계식 $h = 20t - t^2 + 20$ 이 성립한다. 높이가 가장 높을 때는 던진 후 몇 초 후인가?

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

$$\begin{aligned} h &= 20t - t^2 + 20 \\ &= -(t^2 - 20t) + 20 \\ &= -(t-10)^2 + 120 \end{aligned}$$

따라서 $t = 10$ 일 때 최댓값 120 를 가진다.