

1. $y = 5x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼, 평행이동한 식을 $y = ax^2 + bx + c$ 라 할 때, $a - b + c$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 48

해설

$$\begin{aligned}y &= 5(x - 2)^2 + 3 \\&= 5(x^2 - 4x + 4) + 3 \\&= 5x^2 - 20x + 23\end{aligned}$$

$$\therefore a = 5, b = -20, c = 23$$

$$\therefore a - b + c = 5 - (-20) + 23 = 48$$

2. $y = x^2 + 4x - 7$ 을 $y = a(x - p)^2 + q$ 의 꼴로 고쳤을 때, $a + p + q$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -12

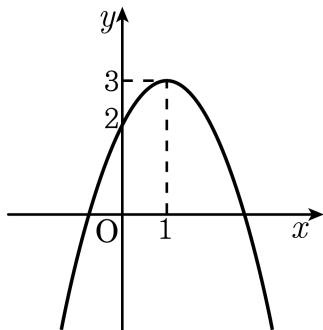
해설

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 4x - 7 \\ &= (x^2 + 4x + 4 - 4) - 7 \\ &= (x + 2)^2 - 11 \end{aligned}$$

$$\therefore a = 1, p = -2, q = -11$$

$$\therefore a + p + q = 1 - 2 - 11 = -12$$

3. 다음 그림은 이차함수의 그래프를 그린 것이다. 이 이차함수의 식을 구하면?



① $y = -2x^2 + 4x + 2$

② $y = -x^2 + 2x + 2$

③ $y = -2x^2 - 4x + 2$

④ $y = -x^2 - 2x + 2$

⑤ $y = -3x^2 - 6x + 2$

해설

$y = a(x-1)^2 + 3$ 이 점 $(0, 2)$ 를 지나므로
 $2 = a(0-1)^2 + 3, a = -1$ 이다.

$$\begin{aligned}\therefore y &= -(x-1)^2 + 3 \\ &= -x^2 + 2x + 2\end{aligned}$$

4. 이차함수 $y = 3x^2$ 의 그래프는 점 $(a, 12)$ 를 지나고, 이차함수 $y = bx^2$ 과 x 축에 대하여 대칭이다. 이 때, ab 의 값은?

① ± 2

② ± 3

③ ± 5

④ ± 6

⑤ ± 7

해설

$y = 3x^2$ 에 $(a, 12)$ 를 대입하면 $a = \pm 2$ 이다.

x 축과 대칭인 함수는 x^2 의 계수의 절댓값이 같고 부호가 서로 반대이므로 $b = -3$ 이다.

$$\therefore ab = \pm 6$$

5. 다음 그림은 모두 꼭짓점이 원점인 포물선이
고, $y = x^2 \cdots$ (가), $y = -x^2 \cdots$ (나)이다. $-1 <$
 $a < 0$ 일 때, $y = -ax^2$ 의 그래프로 알맞은
것은?

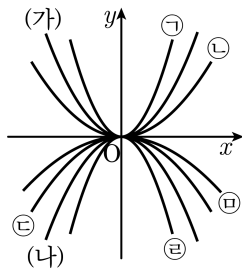
① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉤

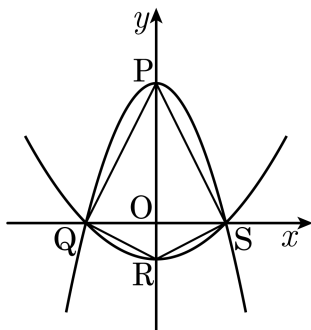
⑤ ㉦



해설

$0 < -a < 1$ 이므로 (가)와 x 축 사이에 있는 그래프를 찾으면 ㉡
이다.

6. 함수 $y = -x^2$ 의 그래프를 y 축 방향으로 4 만큼 평행이동하고, $y = \frac{1}{4}x^2$ 의 그래프를 y 축 방향으로 -1 만큼 평행이동한 그림을 나타낸 것이다. 이 때 다음 설명 중 옳은 것의 개수는?



㉠ 점 $P(0,4)$ 이고, 점 $R(0,-1)$ 이다.

㉡ 점 $Q(2,0)$ 이고, 점 $S(-2,0)$ 이다.

㉢ $\overline{QS} = 8$ 이다.

㉣ $\triangle PRS = 5$, $\triangle QPR = 8$ 이다.

㉤ $\square PQRS = 12$ 이다.

- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

함수 $y = -x^2$ 의 그래프를 y 축 방향으로 4 만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y = -x^2 + 4$

함수 $y = \frac{1}{4}x^2$ 의 그래프를 y 축 방향으로 -1 만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$

$y = -x^2 + 4$ 에 $y = 0$ 을 대입하면 점 $Q(-2,0)$, $S(2,0)$ 이다.

$\overline{QS} = 4$

또, $P(0,4)$ 이고 $R(0,-1)$

$\triangle PRS = \triangle QPR = 5$

따라서 옳은 것은 ㉠이므로 1 개이다.

7. 이차함수 $y = \frac{2}{3}x^2$ 의 그래프를 꼭짓점의 좌표가 $(2, 0)$ 이 되도록 평행 이동하면 점 $(k, 6)$ 을 지난다. 이 때, 상수 k 의 값을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

▷ 정답 : -1

해설

이차함수 $y = \frac{2}{3}x^2$ 의 그래프를 꼭짓점의 좌표가 $(2, 0)$ 이 되도록 평행이동하면 $y = \frac{2}{3}(x-2)^2$ 이다. 점 $(k, 6)$ 을 지나므로 대입하면 $6 = \frac{2}{3}(k-2)^2$, $9 = (k-2)^2$, $k-2 = \pm 3$ 따라서 $k = 5, -1$ 이다.

8. 이차함수 $y = -3x^2$ 의 그래프를 꼭짓점의 좌표가 $(5, -2)$ 가 되도록 평행이동하면 점 $(k, -3)$ 을 지난다. 이 때, 상수 k 의 값을 모두 곱하면?

① $\frac{1}{3}$

② $-\frac{1}{3}$

③ $\frac{74}{3}$

④ $-\frac{80}{3}$

⑤ -10

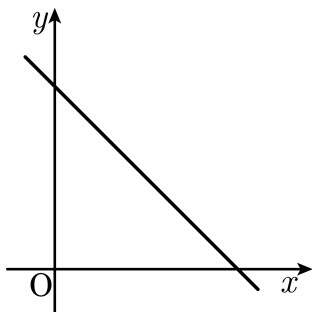
해설

$y = -3x^2$ 을 꼭짓점의 좌표가 $(5, -2)$ 가 되도록 평행이동하면
 $y = -3(x - 5)^2 - 2$ 이고

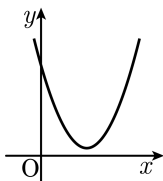
$y = -3(x - 5)^2 - 2$ 가 점 $(k, -3)$ 을 지나므로 대입하면 $-3 = -3(k - 5)^2 - 2$, $3k^2 - 30k + 74 = 0$ 이다.

상수 k 의 값의 곱은 $3k^2 - 30k + 74 = 0$ 의 두 근의 곱과 같으므로
 $\frac{74}{3}$ 이다.

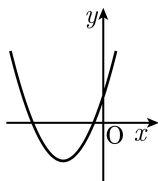
9. 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차함수 $y = a(x + b)^2 - a$ 의 그래프로 적당한 것은?



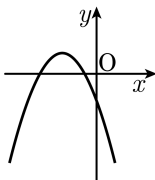
①



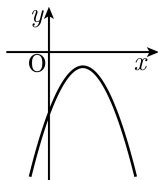
②



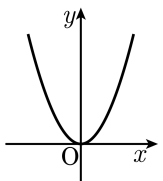
③



④



⑤



해설

그래프가 오른쪽 아래를 향하므로 $a < 0$ 이고 (y 절편) > 0 이므로 $b > 0$ 이다. 따라서 $y = a(x + b)^2 - a$ 의 그래프는 위로 볼록하고, $-b < 0$, $-a > 0$ 이므로 꼭짓점이 제 2 사분면 위에 있는 그래프이다.

10. 다음 보기의 이차함수 그래프 중 $y = ax^2$ 의 그래프가 3 번째로 폭이 넓을 때, $|a|$ 의 범위는?

보기

$$\textcircled{\text{㉠}} y = -\frac{3}{2}x^2$$

$$\textcircled{\text{㉡}} y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}$$

$$\textcircled{\text{㉢}} y = 2x^2 - x$$

$$\textcircled{\text{㉣}} -3(x+2)^2$$

$$\textcircled{\text{㉤}} y = \frac{x(x-1)(x+1)}{x+1}$$

$$\textcircled{\text{①}} 1 < |a| < \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{\text{②}} 1 < |a| < \frac{3}{2}$$

$$\textcircled{\text{③}} 1 < |a| < \frac{5}{2}$$

$$\textcircled{\text{④}} \frac{1}{2} < |a| < \frac{3}{2}$$

$$\textcircled{\text{⑤}} \frac{1}{2} < |a| < \frac{5}{2}$$

해설

a 의 절댓값이 작을수록 폭이 넓어진다.

a 의 절댓값을 각각 구하면

$$\textcircled{\text{㉠}} \frac{3}{2} \textcircled{\text{㉡}} \frac{1}{2} \textcircled{\text{㉢}} 2 \textcircled{\text{㉣}} 3 \textcircled{\text{㉤}} 1 \text{ 이므로 폭이 넓은 순서는 } \textcircled{\text{㉡}}, \textcircled{\text{㉤}}, \textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉢}}, \textcircled{\text{㉣}}$$

이다. 따라서 두 번째인 1과 세 번째인 $\frac{3}{2}$ 사이에 있어야 하므로

$$\textcircled{\text{④}} 1 < |a| < \frac{3}{2} \text{ 이다.}$$

11. 다음 이차함수의 그래프 중 4 번째로 폭이 좁은 것은?

① $y = -(x-2)^2$

② $y = \frac{2x(x-1)(x+1)}{x-1}$

③ $y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}$

④ $y = -3x^2 + x$

⑤ $y = -\frac{5}{2}x^2$

해설

a 의 절댓값이 클수록 폭이 좁아진다.

a 의 절댓값을 각각 구하면

① 1

② 2

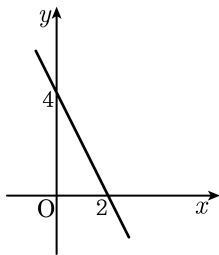
③ $\frac{1}{3}$

④ 3

⑤ $\frac{5}{2}$

이므로 폭이 좁은 순서는 ④, ⑤, ②, ①, ③이다. 따라서 네 번째로 폭이 좁은 것은 ①이다.

12. 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차함수 $y = \frac{1}{2}ax^2 + bx + 3$ 의 꼭짓점의 좌표를 구하면?



- ① $(-2, 7)$ ② $(-2, -7)$
③ $(7, 2)$ ④ $(-7, 2)$

⑤ $(2, 7)$

해설

$a = -2, b = 4$ 이므로

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}ax^2 + bx + 3 \\ &= -x^2 + 4x + 3 \\ &= -(x-2)^2 + 7 \end{aligned}$$

따라서 꼭짓점의 좌표는 $(2, 7)$ 이다.

13. 이차함수 $y = 3x^2 + 2x + a$ 의 그래프가 점 $(a, a^2 + 2)$ 를 지나고 x 축과 두 점에서 만나도록 a 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -2$

해설

$$a^2 + 2 = 3a^2 + 2a + a, 2a^2 + 3a - 2 = 0,$$

$$(2a - 1)(a + 2) = 0$$

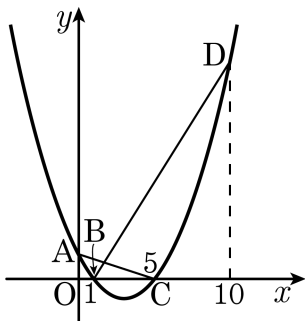
$$\therefore a = \frac{1}{2}, -2$$

x 축과 두 점에서 만나므로

$$D = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot a > 0, a < \frac{1}{3}$$

$$\therefore a = -2$$

14. 다음 그림은 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프이다. 삼각형 ABC 의 넓이가 12 일 때, 삼각형 BCD 의 넓이를 구하면?



① 106

② 107

③ 108

④ 109

⑤ 110

해설

$$\Delta ABC = \frac{1}{2} \times (5 - 1) \times c = 12 \text{ 이다.}$$

$c = 6$, 즉 $A(0, 6)$ 이다.

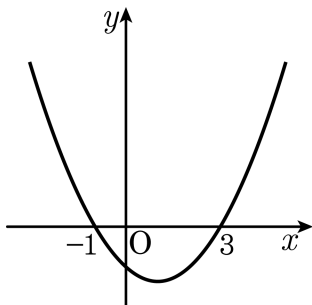
$$y = ax^2 + bx + 6 = a(x - 1)(x - 5) = ax^2 - 6ax + 5a \text{ 이다.}$$

$$5a = 6, a = \frac{6}{5}, b = -\frac{36}{5} \text{ 이다.}$$

$$y = \frac{6}{5}x^2 - \frac{36}{5}x + 6 \text{ 이므로 } D(10, 54) \text{ 이다.}$$

$$\Delta BCD = \frac{1}{2} \times (5 - 1) \times 54 = 108$$

15. 다음은 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프이다. <보기> 중 옳은 것은 모두 몇 개인가?



보기

- ㉠ $b^2 - 4ac > 0$
- ㉡ $abc < 0$
- ㉢ $a - b + c < 0$
- ㉣ $9a + 3b + c > 0$
- ㉤ $a + b + c < 4a + 2b + c$

- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

아래로 볼록한 포물선이므로 $a > 0$

축이 y 축의 오른쪽에 있으므로 $ab < 0$

$\therefore b < 0$

y 절편이 음수이므로 $c < 0$

㉠ x 축과의 교점이 2개이므로 $b^2 - 4ac > 0$

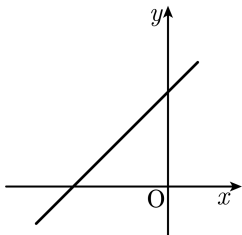
㉡ $abc > 0$

㉢ $x = -1$ 일 때, $y = a - b + c = 0$

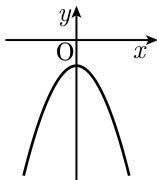
㉣ $x = 3$ 일 때, $y = 9a + 3b + c = 0$

㉤ $x = 1$ 일 때, $y = a + b + c$, $x = 2$ 일 때, $y = 4a + 2b + c$,
 $a + b + c < 4a + 2b + c$

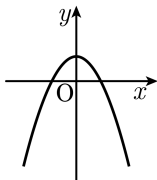
16. 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프가 다음그림과 같을 때 이차함수 $y = ax^2 + b$ 의 그래프로 옳은 것은?



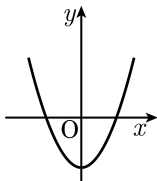
①



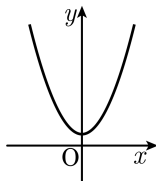
②



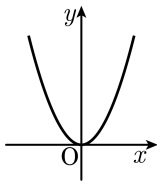
③



④



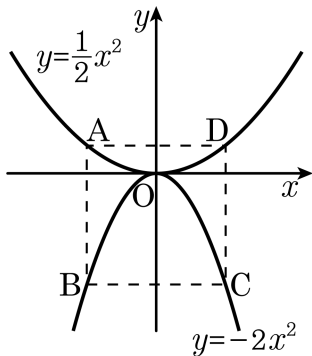
⑤



해설

$a > 0, b > 0$ 이므로 $y = ax^2 + b$ 의 그래프는 아래로 볼록하고 꼭짓점은 y 축의 위에 있다.

17. 다음 그림과 같이 두 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = -2x^2$ 의 그래프 위에 네 점 A, B, C, D 가 있다. 이 때, $\square ABCD$ 는 정사각형일 때, 점 A 의 y 좌표는?



① $\frac{2}{25}$

② $\frac{4}{25}$

③ $\frac{6}{25}$

④ $\frac{8}{25}$

⑤ $\frac{11}{25}$

해설

점 A 의 좌표를 $\left(a, \frac{1}{2}a^2\right)$ 이라고 하면 B $(a, -2a^2)$,

D $\left(-a, \frac{1}{2}a^2\right)$ 이고 $\overline{AD} = \overline{AB}$ 이므로

$$2a = \left\{ \frac{1}{2}a^2 - (-2a^2) \right\}, a = \frac{4}{5} (\because a \neq 0) \text{ 이다.}$$

따라서 점 A 의 y 좌표는 $\frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{8}{25}$ 이다.

18. $y = 2(x-3)^2 - 5$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 , y 축의 방향으로 5 만큼 평행이동 한 이차함수의 그래프 위에 두 점 $A(2, 8)$, $B(a, b)$ 의 y 축에 대하여 대칭인 점을 각각 C , D 라 하고, 원점을 O 라 한다. $\triangle ABC$ 와 $\triangle BOD$ 의 넓이의 비가 $2 : a^2$ 일 때, a 의 값을 구하면?
(단, $0 < a < 2$)

$$\textcircled{1} \quad a = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$$

$$\textcircled{3} \quad a = \frac{-1 + \sqrt{10}}{2}$$

$$\textcircled{5} \quad a = \frac{2}{3}$$

$$\textcircled{2} \quad a = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$\textcircled{4} \quad a = \frac{-1 - \sqrt{10}}{2}$$

해설

$y = 2(x-3)^2 - 5$ 의 그래프를 평행이동하면 $y = 2x^2$ 이다. 점 $A(2, 8)$ 의 y 축에 대하여 대칭인 점 C 의 좌표는 $(-2, 8)$ 이고, 점 $B(a, b)$ 의 y 축에 대하여 대칭인 점 D 의 좌표는 $(-a, b)$ 이다. 이 때, $\triangle ABC$ 의 $\overline{AC}$ 를 밑변, 점 A, B 의 y 좌표의 차를 높이로

$$\text{하면 } \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 4 \times (8 - b)$$

이 식에 $b = 2a^2$ 을 대입하면 ($\because (a, b)$ 는 $y = 2x^2$ 위의 점)

$$\frac{1}{2} \times 4 \times (8 - 2a^2) = 4(4 - a^2)$$

$$\text{또한, } \triangle BOD = \frac{1}{2} \times 2a \times 2a^2 = 2a^3$$

$\triangle ABC$ 와 $\triangle BOD$ 의 넓이의 비가 $2 : a^2$ 이므로 $4(4 - a^2) : 2a^3 = 2 : a^2$

$$\therefore a^2(4 - a^2) = a^3, a^2 + a - 4 = 0 \text{ 에서 } a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+16}}{2} =$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\text{여기서 } 0 < a < 2 \text{ 이므로 } a = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

19. x 축 위의 두 점 $A(5, 0)$, $B(-3, 0)$ 과 이차함수 $y = a(x+1)^2$ 의 그래프와 직선 $y = -12$ 와의 두 교점 C , D 를 연결한 사각형은 평행사변형일 때, 상수 a 의 값을 구하여라. (단, $a < 0$)

▶ 답 :

▶ 정답 : $-\frac{3}{4}$

해설

□ABCD는 평행사변형이므로 마주 보는 두 변의 길이가 같다.

$$\overline{AB} = \overline{CD} = 8$$

점 C와 D는 직선 $x = -1$ 을 중심으로 좌우대칭이므로 $B(-5, -12)$, $C(3, -12)$

점 C와 점 D는 $y = a(x+1)^2$ 위의 점이므로

$$-12 = 16a$$

$$\therefore a = -\frac{3}{4}$$

20. 두 이차함수 $y = 2x^2 + 4x + 3$, $y = 2x^2 + 4x - 5$ 의 그래프가 y 축과 만나는 점을 각각 A, B, 직선 $x = p$ 와 만나는 점을 각각 C, D, 직선 $x = q$ 와 만나는 점을 각각 E, F 라 할 때, $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} + \frac{\overline{EF}}{\overline{AB}}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

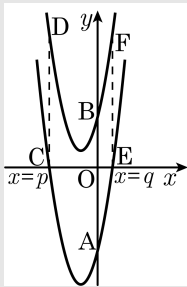
▷ 정답 : 2

해설

$$y = 2x^2 + 4x + 3 \text{ 은 } y = 2(x+1)^2 + 1$$

$$y = 2x^2 + 4x - 5 \text{ 는 } y = 2(x+1)^2 - 7 \text{ 이므로}$$

$y = 2x^2 + 4x - 5$ 의 그래프는 $y = 2x^2 + 4x + 3$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -8 만큼 평행이동한 것이므로



$$\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{EF}$$

$$\therefore \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} + \frac{\overline{EF}}{\overline{AB}} = 2$$

21. 두 이차함수 $f(x) = x^2 + 4x + 2$, $g(x) = x^2 - 2$ 에 대하여 $h(x) = \frac{g(x+1)}{f(x)}$ 이라고 할 때, $h(1)h(2)h(3) \cdots h(30)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{511}$

해설

$f(x) = (x+2)^2 - 2$, $g(x) = x^2 - 2$ 이므로

$y = f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼 평행이동하면

$y = g(x)$ 의 그래프가 되므로

$$\therefore g(x) = f(x-2)$$

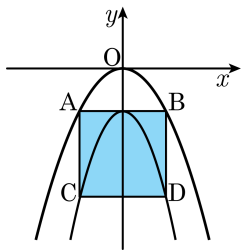
$$\therefore h(1)h(2)h(3) \cdots h(30)$$

$$= \frac{g(2)g(3)g(4) \cdots g(31)}{f(1)f(2)f(3) \cdots f(30)}$$

$$= \frac{f(0)f(1)f(2) \cdots f(29)}{f(1)f(2)f(3) \cdots f(30)}$$

$$= \frac{f(0)}{f(30)} = \frac{2}{1022} = \frac{1}{511}$$

22. 다음 그림에서 두 점 A, B는 이차함수 $y = -x^2$ 위의 점이고, 점 C, D는 이차함수 $y = -2x^2 - 1$ 위의 점이다. 사각형 ABDC가 정사각형일 때, 이 정사각형의 넓이를 구하여라. (단, 사각형의 각 변은 모두 좌표축과 평행하다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

점 A 의 x 좌표를 a 라 하면

$$A(a, -a^2), B(-a, -a^2), C(a, -2a^2 - 1), D(-a, -2a^2 - 1)$$

□ABCD는 정사각형이므로

$$-2a = -a^2 - (-2a^2 - 1)$$

$$(a + 1)^2 = 0$$

$$\therefore a = -1$$

따라서 □ABCD = $2 \times 2 = 4$ 이다.

23. 다음은 $y = 2x^2 - kx + 3$ 이 점 $(1, 1)$ 을 지날 때의 설명을 나타낸 것이다.
이 때, 옳지 않은 것을 모두 고르면?

- ㉠ 꼭짓점의 좌표는 $(-1, 1)$ 이다.
- ㉡ 직선 $x = 1$ 을 축으로 한다.
- ㉢ x 축과 한 점에서 만난다.
- ㉣ y 축과의 교점의 좌표는 $(0, 3)$ 이다.
- ㉤ $y = 2x^2$ 의 그래프를 x 축으로 -1 , y 축으로 3 만큼 평행이동한 것이다.

① ㉠, ㉡, ㉢

② ㉠, ㉡, ㉣

③ ㉠, ㉡, ㉤

④ ㉠, ㉢, ㉤

⑤ ㉠, ㉣, ㉤

해설

$y = 2x^2 - kx + 3$ 이 점 $(1, 1)$ 을 지나므로 $1 = 2 - k + 3, k = 4$

$$y = 2x^2 - 4x + 3 = 2(x - 1)^2 + 1$$

㉠ 꼭짓점의 좌표 $(1, 1)$

㉢ x 축과 만나지 않는다.

㉤ x 축으로 1 , y 축으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

24. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 세 점 $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(-1, 4)$ 를 지날 때, 꼭짓점은 제 A 사분면 위에 있으며 제 B 사분면과 제 C 사분면을 지나지 않는다. $A + B + C$ 의 값을 구하면?

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

해설

주어진 세 점을 각각 $y = ax^2 + bx + c$ 에 대입한다.

점 $(0, 1)$ 을 대입하면 $c = 1$

점 $(1, 2)$ 를 대입하면 $a + b + 1 = 2$

즉, $a + b = 1$ ㉠

점 $(-1, 4)$ 를 대입하면 $a - b + 1 = 4$

즉, $a - b = 3$ ㉡

㉠ + ㉡에서 $2a = 4$

$\therefore a = 2, b = -1$

$\therefore y = 2x^2 - x + 1$

$$= 2 \left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} - \frac{1}{16} \right) + 1$$

$$= 2 \left(x - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{7}{8}$$

따라서, 꼭짓점의 좌표가 $\left(\frac{1}{4}, \frac{7}{8} \right)$ 이므로 꼭짓점의 좌표는 제

1 사분면 위에 있으며 $a > 0$ 이므로 아래로 볼록 즉, 제 1, 2 사분면을 지난다.

따라서 $A = 1, B = 3, C = 4$ 이므로 $A + B + C = 1 + 3 + 4 = 8$ 이다.

25. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - 2(p + 2)x + 2p - 3q = 0$ 이 중근을 가질 때, q 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2 - 2(p + 2)x + 2p - 3q = 0$ 이 중근을 가지므로

$$\frac{D}{4} = (p + 2)^2 - 2p + 3q$$

$$= p^2 + 4p + 4 - 2p + 3q = 0$$

$$\therefore q = -\frac{1}{3}p^2 - \frac{2}{3}p - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}(p + 1)^2 - 1$$

따라서 $p = -1$ 일 때, q 는 최댓값 -1 을 갖는다.

26. 세 실수 x, y, z 에 대하여 $\frac{x+2}{2} = \frac{y+1}{3} = z-2$ 일 때, $(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : $\frac{379}{50}$

해설

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y+1}{3} = z-2 = k \text{ 라 하면}$$

$$x+2 = 2k, y+1 = 3k, z-2 = k$$

이를 $(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2$ 에 대입하면

$$(5k-3)^2 + (4k+1)^2 + (3k)^2$$

$$= 50k^2 - 22k + 10$$

$$= 50 \left(k - \frac{11}{50} \right)^2 + \frac{379}{50}$$

따라서 $k = \frac{11}{50}$ 일 때, 최솟값이 $\frac{379}{50}$ 이다.

27. 이차함수 $f(x) = x^2 - (6+p)x + 4p + 12$ ($-3 \leq x \leq -1$) 의 최솟값이 0 일 때, p 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{19}{5}$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - (6+p)x + 4p + 12 \\ &= \left(x - \frac{6+p}{2}\right)^2 - \frac{p^2 - 4p - 12}{4} \end{aligned}$$

- (1) $\frac{6+p}{2} < -3$, 즉, $p < -12$ 인 경우

$x = -3$ 일 때, 최솟값이 0 이므로

$$f(-3) = 7p + 39 = 0$$

$$\therefore p = -\frac{39}{7}$$

그런데 $p < -12$ 이므로 주어진 조건을 만족하는 p 값은 존재하지 않는다.

- (2) $-3 \leq \frac{6+p}{2} \leq -1$, 즉, $-12 \leq p \leq -8$ 인 경우

$x = \frac{6+p}{2}$ 일 때, 최솟값이 0 이므로

$$f\left(\frac{6+p}{2}\right) = 0$$

$$p^2 - 4p - 12 = 0$$

$$(p+2)(p-6) = 0$$

$$\therefore p = -2 \text{ 또는 } 6$$

그런데 $-12 \leq p \leq -8$ 이므로 주어진 조건을 만족하는 p 값이 존재하지 않는다.

- (3) $\frac{6+p}{2} \geq -1$, 즉, $p \geq -8$ 인 경우

$x = -1$ 일 때, 최솟값이 0 이므로 $f(-1) = 0$

$$\therefore p = -\frac{19}{5}$$

따라서 (1), (2), (3) 에서 $p = -\frac{19}{5}$ 이다.

28. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 두 점 $(-4, 0)$, $(2, 0)$ 을 지나고
최솟값이 -3 일 때, 상수 a , b , c 의 값을 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = \frac{1}{3}$

▷ 정답 : $b = \frac{2}{3}$

▷ 정답 : $c = -\frac{8}{3}$

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 두 점 $(-4, 0)$, $(2, 0)$ 을 각각
지나므로

$$16a - 4b + c = 0$$

$$4a + 2b + c = 0$$

$$\therefore b = 2a, c = -8a$$

또 주어진 함수의 최솟값이 -3 이므로

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c \\ &= ax^2 + 2ax - 8a \\ &= a(x+1)^2 - 9a \end{aligned}$$

$$\therefore -9a = -3$$

따라서 $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{3}$, $c = -\frac{8}{3}$ 이다.

29. 이차함수 $y = ax^2 + 2bx + 4c$ 의 그래프가 두 점 $(-2, 0)$, $(4, 0)$ 을 지나고 최솟값이 -6 일 때, 상수 $a + b + c$ 의 값을 각각 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{4}{3}$

해설

$y = ax^2 + 2bx + 4c$ 의 그래프가 두 점 $(-2, 0)$, $(4, 0)$ 을 각각 지나므로

$$4a - 4b + 4c = 0$$

$$a - b + c = 0$$

$$16a + 8b + 4c = 0$$

$$4a + 2b + c = 0$$

$$\therefore b = -a, c = -2a$$

또 주어진 함수의 최솟값이 -6 이므로

$$y = ax^2 + 2bx + 4c$$

$$= ax^2 - 2ax - 8a$$

$$= a(x - 1)^2 - 9a$$

$$\therefore -9a = -6$$

따라서 $a = \frac{2}{3}$, $b = -\frac{2}{3}$, $c = -\frac{4}{3}$ 이므로 $a + b + c = -\frac{4}{3}$ 이다.

30. $-1 \leq \frac{p}{2} \leq 0$, $p + 2q \leq 2$ 를 만족하는 실수 p, q 에 대하여 이차함수 $y = x^2 + px + q$ ($0 \leq x \leq 1$) 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : $\frac{5}{4}$

해설

$$y = x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$$

이 때 $-1 \leq \frac{p}{2} \leq 0$ 에서 $0 \leq -\frac{p}{2} \leq 1$ 이므로

최솟값 m 은 $x = -\frac{p}{2}$ 일 때이다.

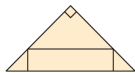
$$\therefore m = q - \frac{p^2}{4}$$

또한 $p + 2q \leq 2$ 에서 $q \leq -\frac{p}{2} + 1$

$$\therefore m \leq -\frac{p^2}{4} - \frac{p}{2} + 1 = -\frac{1}{4}(p+1)^2 + \frac{5}{4}$$

따라서 m 의 최댓값은 $\frac{5}{4}$ 이다.

31. 빗변의 길이가 40 인 직각이등변삼각형에 다음 그림과 같이 직사각형을 그릴 때, 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하여라.

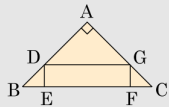


▶ 답 :

▷ 정답 : 200

해설

다음 그림에서 선분 DE 의 길이를 x 라 하면
 $\triangle ABC$ 는 이등변삼각형이고 $\angle B = 45^\circ$ 이므로
 $\overline{BE} = x$ 이다.



마찬가지로 $\overline{FC} = x$

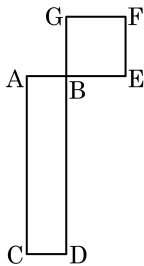
$$\therefore \overline{EF} = 40 - x - x = 40 - 2x$$

직사각형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= x(40 - 2x) \\ &= -2x^2 + 40x \\ &= -2(x - 10)^2 + 200 \end{aligned}$$

따라서 $x = 10$ 일 때, 직사각형의 넓이의 최댓값은 200 이다.

32. 다음 그림과 같이 선분 AB의 연장선 위에 $\overline{AB} : \overline{BE} = 2 : 3$ 이 되도록 점 E를 잡고 선분 BE를 한 변으로 하는 정사각형 BEFG를 그릴 때, 선분 GD의 길이는 12이다. 이때 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ 의 최솟값을 구하여라.



▶ 답 :

▶ 정답 : $\frac{576}{13}$

해설

$\overline{AB} = x$ 라 하면

$\overline{AB} : \overline{BE} = 2 : 3$ 이므로

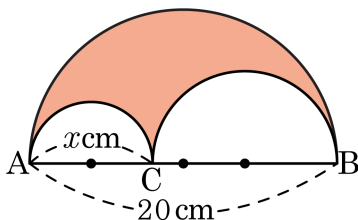
$$\overline{BE} = \frac{3}{2}x = \overline{BG}$$

$$\overline{BD} = 12 - \overline{BG} = 12 - \frac{3}{2}x = \overline{AC}$$

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 &= x^2 + \left(12 - \frac{3}{2}x\right)^2 \\ &= \frac{13}{4} \left(x - \frac{72}{13}\right)^2 + \frac{576}{13}\end{aligned}$$

따라서 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ 의 최솟값은 $\frac{576}{13}$ 이다.

33. 다음 그림과 같이 세 개의 반원으로 이루어진 도형이 있다. 큰 반원의 지름이 20 cm 이고 색칠한 부분의 넓이가 $y\pi \text{ cm}^2$ 일 때, y 의 최댓값을 구하면?



① 10

② 15

③ 16

④ 25

⑤ 36

해설

$\overline{AC} = x \text{ cm}$ 이므로 $\overline{BC} = (20 - x) \text{ cm}$ 이다.

따라서 색칠한 부분의 넓이 S 는

(전체 반원의 넓이 - 작은 두 원의 넓이의 합)이다.

$$\frac{1}{2} \times 10^2 \pi - \left\{ \frac{1}{2} \pi \left(\frac{x}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \pi \left(\frac{20 - x}{2} \right)^2 \right\} = y\pi$$

$$50\pi - \left(\frac{x^2}{8} \pi + \frac{400 - 40x + x^2}{8} \pi \right) = y\pi$$

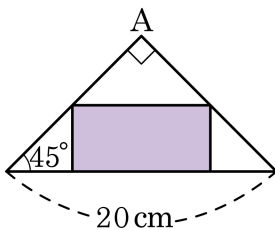
$$50\pi - \left(\frac{2x^2 - 40x + 400}{8} \right) \pi = y\pi$$

$$-\frac{1}{4}x^2\pi + 5x\pi = y\pi$$

$$\begin{aligned} y\pi &= -\frac{1}{4}\pi(x^2 - 20x) \\ &= -\frac{1}{4}\pi(x^2 - 20x + 100 - 100) \\ &= -\frac{1}{4}\pi(x - 10)^2 + 25\pi \text{이다.} \end{aligned}$$

따라서 두 원의 반지름이 각각 10 cm 일 때, 넓이는 최댓값 $25\pi \text{ cm}^2$ 를 갖는다.

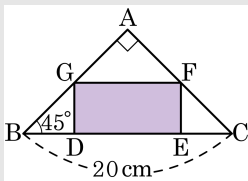
34. 빗변의 길이가 20cm 인 직각이등변삼각형에 그림과 같이 직사각형을 그려 넣을 때, 이 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하여라.



▶ 답 : cm^2

▶ 정답 : 50 cm^2

해설



주어진 그림은 직각이등변삼각형이므로
 $\overline{BD} = \overline{DG} = \overline{EC} = \overline{EF}$ 이고, $\overline{GD} = x$ 라 하면
 $\overline{DE} = 20 - 2x$ 이다. 넓이를 y 로 놓으면

$$\begin{aligned} y &= x(20 - 2x) \\ &= -2x^2 + 20x \\ &= -2(x - 5)^2 + 50 \end{aligned}$$

따라서, 최댓값은 50 이다.

35. 지면으로부터 20 m 높이의 옥상에서 초속 20 m 로 쏘아 올린 물체의 t 초 후의 높이를 h m 라 할 때, 관계식 $h = 20t - t^2 + 20$ 이 성립한다. 높이가 가장 높을 때는 던진 후 몇 초 후인가?

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$$\begin{aligned}h &= 20t - t^2 + 20 \\&= -(t^2 - 20t) + 20 \\&= -(t - 10)^2 + 120\end{aligned}$$

따라서 $t = 10$ 일 때 최댓값 120 를 가진다.