1. 이차방정식 $3(x-b)^2 = 15$ 의 근이 $x = 7 \pm \sqrt{a}$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a+b = 12$

해설

$3(x-b)^2 = 15$, $(x-b)^2 = 5$
$\therefore x = b \pm \sqrt{5}$
이것이 $7 \pm \sqrt{a}$ 이므로 $a = 5$, $b = 7$ 이다.
$\therefore a+b = 12$

2. x 에 관한 이차방정식 $2x^2 - ax - b = 0$ 의 한 근이 $2 - \sqrt{5}$ 일 때, $a - b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 유리수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$2x^2 - ax - b = 0$ 의 계수가 모두 유리수이므로
$2 - \sqrt{5}$ 가 근이면 $2 + \sqrt{5}$ 도 근이다.
근과 계수의 관계에서
$\frac{a}{2} = (2 - \sqrt{5}) + (2 + \sqrt{5}), a = 8$
$-\frac{b}{2} = (2 - \sqrt{5})(2 + \sqrt{5}), -\frac{b}{2} = -1, b = 2$
$\therefore a - b = 6$

3. 이차방정식 $x^2 - 6x - m = 0$ 의 두 근 α, β 에 대하여 $\frac{\beta}{\alpha} = 2$ 일 때, 상수 m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

근과 계수와의 관계에서 $\alpha + \beta = 6$, $\alpha\beta = -m$
$\beta = 2\alpha$ 이므로 $\alpha + \beta = 3\alpha = 6$
따라서 $\alpha = 2$, $\beta = 4$
$\therefore m = -\alpha\beta = -8$

4. 책을 1 장 찢어서 보이는 두 쪽수의 곱이 210 이었을 때, 두 쪽의 합을 구하여라.

▶ 답 : 쪽

▷ 정답 : 29 쪽

해설

두 쪽수를 x, $x+1$ 이라 하면
$x(x+1)=210$
$x^2+x-210=0$
$(x+15)(x-14)=0$
$x>0$ 이므로 $x=14$ (쪽)
따라서 두 쪽의 쪽수는 14, 15 이므로 합은 $14+15=29$(쪽) 이다.

5. 지면으로부터 45m 높이의 건물 옥상에서 초속 30m 로 쏘아 올린 물로켓의 x 초 후의 높이는 $(45 + 40x - 5x^2)$m 이다. 이 물체가 다시 지면에 떨어지는 것은 쏘아 올린 지 몇 초 후인지 구하여라.

▶ 답 : 초

▷ 정답 : 9 초

해설

지면에 떨어지므로 높이는 0m 이다.
$45 + 40x - 5x^2 = 0$ 이므로
$x^2 - 8x - 9 = 0$
$(x + 1)(x - 9) = 0$
따라서 $x = 9$ 이다.

6. 이차함수 $y = 3x^2 - 18x + 5$ 의 그래프는 $y = 3x^2 - 18x - 7$ 의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이다. $a + b$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a + b = 12$

해설

$y = 3x^2 - 18x - 7$ 의 그래프를 $y = a(x-p)^2 + q$ 의 꼴로 나타내면 $y = 3(x-3)^2 - 34$ 이다.
$y = 3x^2 - 18x + 5$ 의 그래프를 $y = a(x-p)^2 + q$ 의 꼴로 나타내면 $y = 3(x-3)^2 - 22$ 이므로 $y = 3(x-3)^2 - 34$ 의 그래프를 x축의 방향으로 0 , y축의 방향으로 12만큼 평행이동한 것이다. 따라서 $a + b = 12$ 이다.

7. 다음 이차함수의 그래프가 x 축과 만나지 <u>않는</u> 것은?

① $y = x^2 - 1$　② $y = x^2 - 2x - 3$

③ $y = x^2 + 4x + 4$　④ $y = x^2 - 2x$

⑤ $y = x^2 - 4x + 5$

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 와 x 축과의 교점의 개수

$b^2 - 4ac > 0$: 2 개

$b^2 - 4ac = 0$: 1 개

$b^2 - 4ac < 0$: 0 개

⑤ $(-4)^2 - 4 \times 5 = -4 < 0$

따라서 x 축과 만나지 않는다.

8. 두 이차방정식 $2x^2 - ax + 2 = 0$, $x^2 - 3x + b = 0$의 공통인 해가 2일 때, ab의 값을 구하면?

① -25　② -10　③ 1　④ 10　⑤ 25

해설

주어진 식에 x 대신 2 를 대입하면

$8 - 2a + 2 = 0,\ \ a = 5$

$4 - 6 + b = 0,\ \ b = 2$

$\therefore ab = 10$

9. 이차방정식 $(x-1)(x-b)=-1$이 0이 아닌 중근 a를 가진다. 이때, b의 값은? (단, a, b는 정수)

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$(x-1)(x-b)=-1$이 중근 a를 가지므로
x에 a를 대입하면
$(a-1)(a-b)=-1$
i) $a-1=-1$, $a-b=1$인 경우
$a=0$, $b=-1$, $a\neq 0$이므로 부적합
ii) $a-1=1$, $a-b=-1$인 경우
$a=2$, $b=3$
$\therefore\ b=3$

10. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - 2(k+a)x + (k^2 - k + b) = 0$ 이 k 값에 관계없이 중근을 가질 때, $8ab$ 의 값은?

① -2 ② 2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 0

해설

$D/4 = (k+a)^2 - (k^2 - k + b) = 0$
k 에 대해서 정리하면
$(2a+1)k + a^2 - b = 0$, 이 식이 k에 관한 항등식이므로 $2a+1 = 0$, $a^2 - b = 0$
$\therefore a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{4}$
$\therefore 8ab = 8\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = -1$

11. x 에 대한 이차방정식 $x^2+ax+a^2+a-1=0$ 이 서로 다른 두 근 α,β 를 가질 때, $\alpha+\beta$ 의 범위는 $m<\alpha+\beta<n$ 이다. $m+n$ 의 값은?

① 1 ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{3}$ ④ 2 ⑤ $\frac{7}{3}$

해설

근과 계수의 관계에서
$\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=a^2+a-1$
서로 다른 두 근을 가지므로
$a^2-4a^2-4a+4>0$
$(3a-2)(a+2)<0$
$-2<a<\frac{2}{3}$
그런데 $\alpha+\beta=-a$ 이므로
$-\frac{2}{3}<\alpha+\beta<2$
$\therefore m+n=\frac{4}{3}$

12. 다음 이차방정식이 중근을 가질 때 k, $k+5$ 를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1 인 이차방정식은? (단, $k < 0$)

$2x^2 + kx + 8 = 0$

① $x^2 - 11x + 24 = 0$
② $x^2 + 11x + 24 = 0$
③ $x^2 - 11x - 24 = 0$
④ $x^2 + 11x - 24 = 0$
⑤ $x^2 + 5x - 12 = 0$

해설

$k^2 - 4 \times 2 \times 8 = 0$, $k = \pm 8$
$k < 0$ 이므로 $k = -8$
-8, -3 을 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1 인 이차방정식은
$x^2 + 11x + 24 = 0$

13. 한 원 위에 n개의 점을 잡아 n각형을 만들었다. 새로 만든 도형의 대각선의 총 개수가 35개 일 때, n의 값은?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

$\frac{n(n-3)}{2} = 35$이므로

$n^2 - 3n - 70 = 0$

$(n+7)(n-10) = 0$

$n = 10 (\because n > 0)$

14. 포물선 $f(x)=ax^2+bx+4$ 는 점 $(-1,4)$ 를 지나고, $g(x)=mx^2+nx+p$ 는 점 $(5,-2)$ 를 지난다. 두 포물선이 y 축에 대하여 대칭일 때, 포물선 $g(x)$ 의 꼭짓점의 좌표를 구하면?

① $\left(\frac{1}{2},\frac{61}{16}\right)$ ② $\left(\frac{1}{2},\frac{31}{8}\right)$ ③ $\left(\frac{1}{2},\frac{63}{16}\right)$
④ $\left(\frac{1}{2},4\right)$ ⑤ $\left(\frac{1}{2},\frac{163}{40}\right)$

해설

두 포물선 $f(x)$, $g(x)$ 가 y 축에 대하여 대칭이므로 $f(x)$ 는 점 $(-1,4)$ 와 점 $(-5,-2)$ 를 지난다.
$f(x)=ax^2+bx+4$ 에 두 점 $(-1,4),(-5,-2)$ 를 대입하면 $a-b+4=4$ 이므로 $a=b$ 이다.

$25a-5b+4=-2$

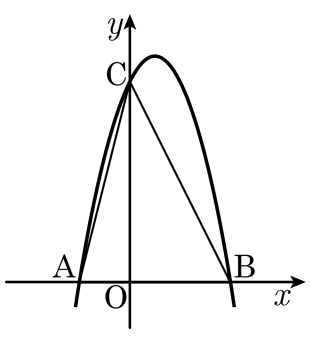
$20a=-6$

$a=b=-\frac{3}{10}$

$f(x)=-\frac{3}{10}x^2-\frac{3}{10}x+4=-\frac{3}{10}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{163}{40}$

따라서 $f(x)$ 의 꼭짓점의 좌표가 $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{163}{40}\right)$ 이므로 $g(x)$ 의 꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{163}{40}\right)$ 이다.

15. 이차함수 $y = -x^2 + 2x + 8$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $\triangle ABC$ 의 넓이를 구하면?



① 20 ② 22 ③ 24 ④ 26 ⑤ 28

해설

$y = -x^2 + 2x + 8$ 의 C 의 좌표 $(0, 8)$
$-x^2 + 2x + 8 = 0$, $(x - 4)(x + 2) = 0$
$x = 4$ 또는 $x = -2$
$A(-2, 0), B(4, 0)$ 이므로
$\triangle ABC$ 의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$

16. 포물선 $y = -2x^2 - bx + c$ 에서 $b < 0,\ c > 0$ 이면 꼭짓점은 제 몇 사분면 위에 있는가?

① 원점　② 제1 사분면　③ 제2 사분면
④ 제3 사분면　⑤ 제4 사분면

해설

$y = -2x^2 - bx + c = -2\left(x + \frac{b}{4}\right)^2 + \frac{b^2}{8} + c = -2\left(x + \frac{b}{4}\right)^2 + \frac{b^2 + 8c}{8}$

$\therefore$ 꼭짓점의 좌표는 $\left(-\frac{b}{4},\ \frac{b^2 + 8c}{8}\right)$

그런데 $b < 0,\ c > 0$ 이므로 $-\frac{b}{4} > 0,\ \frac{b^2 + 8c}{8} > 0$

$\therefore$ 제 1 사분면

17. 세 점 $(-1,\ -5)$, $(0,\ 5)$, $(2,\ 13)$ 을 지나는 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(p,\ q)$ 일 때, $p-q$ 의 값은?

① 1 ② 5 ③ -5 ④ -1 ⑤ -11

해설

이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+c$ 라고 놓으면
$(-1,-5)$를 지나므로 $-5=a-b+5$
$(0,5)$를 지나므로 $5=c$
$(2,13)$ 을 지나므로 $13=4a+2b+5$
$\therefore a=-2,\ b=8,\ c=5$
따라서 주어진 이차함수의 식은
$y=-2x^2+8x+5=-2(x-2)^2+13$ 이므로
꼭짓점의 좌표는 $(2,\ 13)$ 이므로
$p-q=-11$ 이다.

18. $2a^2x + ax - 15x = a + 3$ 을 만족하는 x 의 값이 없을 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $\frac{5}{2}$

해설

$2a^2x + ax - 15x = a + 3$
$(2a^2 + a - 15)x = a + 3$
해가 없을 때이므로
$2a^2 + a - 15 = 0$, $a + 3 \neq 0$ 이다.
$2a^2 + a - 15 = 0$, $(a + 3)(2a - 5) = 0$
$a + 3 \neq 0$ 이므로 $2a - 5 = 0$, $a = \frac{5}{2}$ 이다.

19. p, q, r에 대하여 $(p+q+r)^2 = 3pq+3qr+3rp$이 성립할 때, p, q, r을 세 변으로 하는 삼각형은 어떤 삼각형인지 말하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 정삼각형

해설

$(p+q+r)^2 = 3pq+3qr+3rp$

$p^2+q^2+r^2+2pq+2qr+2rp = 3pq+3qr+3rp$

$p^2+q^2+r^2-pq-qr-rp = 0$

양변에 2 를 곱하면

$2p^2+2q^2+2r^2-2pq-2qr-2rp = 0$

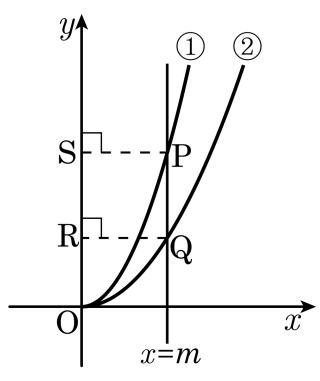
$(p-q)^2+(q-r)^2+(r-p)^2 = 0$

$p-q = q-r = r-p = 0$

$\therefore\ p = q = r$

따라서 p, q, r을 세 변으로 하는 삼각형은 정삼각형이다.

20. 다음 그림은 이차함수 $y=\frac{3}{4}x^2(x\geq 0)\cdots①$, $y=\frac{1}{3}x^2(x\geq 0)\cdots②$의 그래프이다. y축에 평행한 직선 $x=m(m>0)$이 ①과 만나는 점을 P, ②와 만나는 점을 Q라 하고, 두 점 P, Q에서 y축에 내린 수선이 y축과 만나는 점을 각각 S, R이라 할 때, □PQRS가 정사각형이 되는 m의 값을 구하면?



① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{12}$ ④ $\frac{12}{5}$ ⑤ $\frac{13}{5}$

해설

□PQRS가 정사각형이 되려면

$\frac{3}{4}m^2-\frac{1}{3}m^2=m$이어야 한다.

이것을 풀면 $\frac{5}{12}m^2=m$

따라서 $m>0$이므로 $m=\frac{12}{5}$이다.

21. 직선 $y = 1 - x$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점을 A, 포물선 $y = ax^2$, $y = bx^2$ 의 그래프와 1 사분면에서 만나는 점을 각각 C, B, y 축과 만나는 점을 D 라 할 때, $\overline{AB} = \overline{CD} = \frac{1}{2}\overline{CB}$ 가 되기 위한 상수 a, b 의 값을 구하여라. (단, $a > b > 0$)

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $a = 12$

▷ 정답: $b = \frac{4}{9}$

해설

A(1.0), D(0, 1) 이고 $\overline{AB} = \overline{CD} = \frac{1}{2}\overline{CB}$ 이므로

$B\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$, $C\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$

$y = bx^2$ 가 $B\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$ 를 지나므로 $b = \frac{4}{9}$

$y = ax^2$ 가 $C\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ 를 지나므로 $a = 12$

$\therefore a = 12, b = \frac{4}{9}$

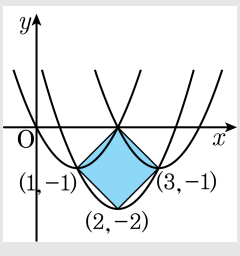
22. 세 이차함수 $y = x^2 - 2x$, $y = x^2 - 6x + 8$, $y = x^2 - 4x + 2$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$y = x^2 - 2x$ ···㉠
$y = x^2 - 6x + 8$ ···㉡
$y = x^2 - 4x + 2$ ···㉢
그래프 ㉢은 그래프 ㉠과 그래프 ㉡의 꼭짓점을 지나고 세 이차함수의 그래프는 모양과 폭이 같으므로 세 이차함수의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 도형의 넓이는
$\frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$이다.

23. 함수 $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = 2x^2$, $h(x) = -x + 2$ 에 대하여 $h(g(f(x)))$ 의 최댓값을 M 이라 할 때, $h(g(f(M)))$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -16

해설

$g(f(x)) = 2(2x-1)^2$,
$h(g(f(x))) = -2(2x-1)^2 + 2$ 이므로
$M = 2$
$\therefore\ h(g(f(m))) = -2(2M-1)^2 + 2 = -16$

24. 이차함수 $y = -2x^2 - 4(k-1)x + 3k$ 의 최댓값을 K 라 할 때, K 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $\frac{15}{8}$

해설

$$\begin{aligned} y &= -2x^2 - 4(k-1)x + 3k \\ &= -2\left\{x^2 + 2(k-1)x + (k-1)^2\right\} + 2(k-1)^2 + 3k \\ &= -2\left\{x + (k-1)\right\}^2 + 2(k-1)^2 + 3k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore K &= 2(k-1)^2 + 3k \\ &= 2k^2 - k + 2 \\ &= 2\left(k^2 - \frac{1}{2}k + \frac{1}{16}\right) + \frac{15}{8} \\ &= 2\left(k - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{8} \end{aligned}$$

따라서 K 의 최솟값은 $\frac{15}{8}$ 이다.

25. 어느 공장에서 생산하는 제품은 50 개를 생산할 때까지는 개당 5000 원의 비용이 들어가고 51 개 부터는 생산량이 1 개씩 증가할 때마다 개당 10 원씩 추가로 감소한다. 예컨대 51 개, 52 개의 제품을 생산할 때의 생산 비용이 각각 개당 4990 원, 4980 원이다. 이 때 총 생산 비용이 최대가 될 때의 개당 생산 비용을 구하여라.

▶ 답 : 원

▷ 정답 : 2750 원

해설

생산량을 x 개라 하면

(1) $x \le 50$ 일 때

(총 생산 비용) $= 5000 \times x = 5000x$

따라서 $x = 50$ 일 때, 총 생산 비용의 최댓값은 250000 원이다.

(2) $x > 50$ 일 때

(개당 생산 비용) $= 5000 - 10(x - 50) - 10x + 5500$

$$\begin{aligned}(\text{총 생산 비용}) &= (5500 - 10x)x \\ &= -10x^2 + 5500x \\ &= -10(x - 275)^2 + 756250\end{aligned}$$

따라서 $x = 275$ 일 때, 총 생산 비용의 최댓값은 756250 원이다.

(1), (2)에 의하면 생산량 275 개일 때, 총 생산 비용이 최대이다.

이 때, 개당 생산 비용은 2750 원이다.