

1. 이차방정식 $3(x - b)^2 = 15$ 의 근이 $x = 7 \pm \sqrt{a}$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = 12$

해설

$$3(x - b)^2 = 15, (x - b)^2 = 5$$

$$\therefore x = b \pm \sqrt{5}$$

이것이 $7 \pm \sqrt{a}$ 이므로 $a = 5$, $b = 7$ 이다.

$$\therefore a + b = 12$$

2. x 에 관한 이차방정식 $2x^2 - ax - b = 0$ 의 한 근이 $2 - \sqrt{5}$ 일 때, $a - b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 유리수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$2x^2 - ax - b = 0$ 의 계수가 모두 유리수이므로
 $2 - \sqrt{5}$ 가 근이면 $2 + \sqrt{5}$ 도 근이다.

근과 계수의 관계에서

$$\frac{a}{2} = (2 - \sqrt{5}) + (2 + \sqrt{5}), a = 8$$

$$-\frac{b}{2} = (2 - \sqrt{5})(2 + \sqrt{5}), -\frac{b}{2} = -1, b = 2$$

$$\therefore a - b = 6$$

3. 이차방정식 $x^2 - 6x - m = 0$ 의 두 근 α, β 에 대하여 $\frac{\beta}{\alpha} = 2$ 일 때, 상수 m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

근과 계수와의 관계에서 $\alpha + \beta = 6$, $\alpha\beta = -m$

$\beta = 2\alpha$ 이므로 $\alpha + \beta = 3\alpha = 6$

따라서 $\alpha = 2$, $\beta = 4$

$\therefore m = -\alpha\beta = -8$

4. 책을 1장 찢어서 보이는 두 쪽수의 곱이 210 이었을 때, 두 쪽의 합을 구하여라.



답 :

쪽



정답 : 29 쪽

해설

두 쪽수를 $x, x + 1$ 이라 하면

$$x(x + 1) = 210$$

$$x^2 + x - 210 = 0$$

$$(x + 15)(x - 14) = 0$$

$x > 0$ 이므로 $x = 14$ (쪽)

따라서 두 쪽의 쪽수는 14, 15 이므로 합은 $14 + 15 = 29$ (쪽)이다.

5. 지면으로부터 45m 높이의 건물 옥상에서 초속 30m 로 쏘아 올린 물로켓의 x 초 후의 높이는 $(45 + 40x - 5x^2)$ m 이다. 이 물체가 다시 지면에 떨어지는 것은 쏘아 올린 지 몇 초 후인지 구하여라.

▶ 답: 초

▶ 정답 : 9 초

해설

지면에 떨어지므로 높이는 0m 이다.

$$45 + 40x - 5x^2 = 0 \text{ 이므로}$$

$$x^2 - 8x - 9 = 0$$

$$(x + 1)(x - 9) = 0$$

따라서 $x = 9$ 이다.

6. 이차함수 $y = 3x^2 - 18x + 5$ 의 그래프는 $y = 3x^2 - 18x - 7$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 것이다. $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = 12$

해설

$y = 3x^2 - 18x - 7$ 의 그래프를 $y = a(x-p)^2 + q$ 의 꼴로 나타내면 $y = 3(x-3)^2 - 34$ 이다.

$y = 3x^2 - 18x + 5$ 의 그래프를 $y = a(x-p)^2 + q$ 의 꼴로 나타내면 $y = 3(x-3)^2 - 22$ 이므로 $y = 3(x-3)^2 - 34$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 0, y 축의 방향으로 12만큼 평행이동한 것이다. 따라서 $a + b = 12$ 이다.

7. 다음 이차함수의 그래프가 x 축과 만나지 않는 것은?

① $y = x^2 - 1$

② $y = x^2 - 2x - 3$

③ $y = x^2 + 4x + 4$

④ $y = x^2 - 2x$

⑤ $y = x^2 - 4x + 5$

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 와 x 축과의 교점의 개수

$b^2 - 4ac > 0$: 2 개

$b^2 - 4ac = 0$: 1 개

$b^2 - 4ac < 0$: 0 개

⑤ $(-4)^2 - 4 \times 5 = -4 < 0$

따라서 x 축과 만나지 않는다.

8. 두 이차방정식 $2x^2 - ax + 2 = 0$, $x^2 - 3x + b = 0$ 의 공통인 해가 2일 때, ab 의 값을 구하면?

① -25

② -10

③ 1

④ 10

⑤ 25

해설

주어진 식에 x 대신 2를 대입하면

$$8 - 2a + 2 = 0, \quad a = 5$$

$$4 - 6 + b = 0, \quad b = 2$$

$$\therefore ab = 10$$

9. 이차방정식 $(x-1)(x-b) = -1$ 이 0이 아닌 중근 a 를 가진다. 이때, b 의 값은? (단, a, b 는 정수)

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$(x-1)(x-b) = -1$ 이 중근 a 를 가지므로
 x 에 a 를 대입하면

$$(a-1)(a-b) = -1$$

i) $a-1 = -1, a-b = 1$ 인 경우

$a = 0, b = -1, a \neq 0$ 이므로 부적합

ii) $a-1 = 1, a-b = -1$ 인 경우

$$a = 2, b = 3$$

$$\therefore b = 3$$

10. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - 2(k + a)x + (k^2 - k + b) = 0$ 이 k 값에 관계없이 중근을 가질 때, $8ab$ 의 값은?

① -2

② 2

③ -1

④ 1

⑤ 0

해설

$$D/4 = (k + a)^2 - (k^2 - k + b) = 0$$

k 에 대해서 정리하면

$$(2a + 1)k + a^2 - b = 0, \text{ 이 식이 } k \text{에 관한 항등식이므로 } 2a + 1 = 0, \quad a^2 - b = 0$$

$$\therefore a = -\frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{4}$$

$$\therefore 8ab = 8 \left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{4}\right) = -1$$

11. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + ax + a^2 + a - 1 = 0$ 이 서로 다른 두 근 α, β 를 가질 때, $\alpha + \beta$ 의 범위는 $m < \alpha + \beta < n$ 이다.
 $m + n$ 의 값은?

① 1

② $\frac{4}{3}$

③ $\frac{5}{3}$

④ 2

⑤ $\frac{7}{3}$

해설

근과 계수의 관계에서

$$\alpha + \beta = -a, \alpha\beta = a^2 + a - 1$$

서로 다른 두 근을 가지므로

$$a^2 - 4a^2 - 4a + 4 > 0$$

$$(3a - 2)(a + 2) < 0$$

$$-2 < a < \frac{2}{3}$$

그런데 $\alpha + \beta = -a$ 이므로

$$-\frac{2}{3} < \alpha + \beta < 2$$

$$\therefore m + n = \frac{4}{3}$$

12. 다음 이차방정식이 중근을 가질 때 k , $k+5$ 를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1 인 이차방정식은? (단, $k < 0$)

$$2x^2 + kx + 8 = 0$$

① $x^2 - 11x + 24 = 0$

② $x^2 + 11x + 24 = 0$

③ $x^2 - 11x - 24 = 0$

④ $x^2 + 11x - 24 = 0$

⑤ $x^2 + 5x - 12 = 0$

해설

$$k^2 - 4 \times 2 \times 8 = 0, k = \pm 8$$

$$k < 0 \text{ 이므로 } k = -8$$

$-8, -3$ 을 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1 인 이차방정식은
 $x^2 + 11x + 24 = 0$

13. 한 원 위에 n 개의 점을 잡아 n 각형을 만들었다. 새로 만든 도형의 대각선의 총 개수가 35개 일 때, n 의 값은?

① 7

② 8

③ 9

④ 10

⑤ 11

해설

$$\frac{n(n-3)}{2} = 35 \text{ 이므로}$$

$$n^2 - 3n - 70 = 0$$

$$(n+7)(n-10) = 0$$

$$n = 10 (\because n > 0)$$

14. 포물선 $f(x) = ax^2 + bx + 4$ 는 점 $(-1, 4)$ 를 지나고, $g(x) = mx^2 + nx + p$ 는 점 $(5, -2)$ 를 지난다. 두 포물선이 y 축에 대하여 대칭일 때, 포물선 $g(x)$ 의 꼭짓점의 좌표를 구하면?

① $\left(\frac{1}{2}, \frac{61}{16}\right)$

② $\left(\frac{1}{2}, \frac{31}{8}\right)$

③ $\left(\frac{1}{2}, \frac{63}{16}\right)$

④ $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$

⑤ $\left(\frac{1}{2}, \frac{163}{40}\right)$

해설

두 포물선 $f(x)$, $g(x)$ 가 y 축에 대하여 대칭이므로 $f(x)$ 는 점 $(-1, 4)$ 와 점 $(-5, -2)$ 를 지난다.

$f(x) = ax^2 + bx + 4$ 에 두 점 $(-1, 4), (-5, -2)$ 를 대입하면 $a - b + 4 = 4$ 이므로 $a = b$ 이다.

$$25a - 5b + 4 = -2$$

$$20a = -6$$

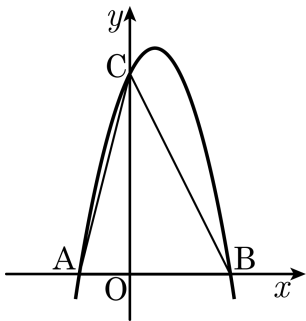
$$a = b = -\frac{3}{10}$$

$$f(x) = -\frac{3}{10}x^2 - \frac{3}{10}x + 4 = -\frac{3}{10}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{163}{40}$$

따라서 $f(x)$ 의 꼭짓점의 좌표가 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{163}{40}\right)$ 이므로 $g(x)$ 의

꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, \frac{163}{40}\right)$ 이다.

15. 이차함수 $y = -x^2 + 2x + 8$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $\triangle ABC$ 의 넓이를 구하면?



① 20

② 22

③ 24

④ 26

⑤ 28

해설

$y = -x^2 + 2x + 8$ 의 C 의 좌표 (0, 8)

$-x^2 + 2x + 8 = 0$, $(x - 4)(x + 2) = 0$

$x = 4$ 또는 $x = -2$

A(-2, 0), B(4, 0) 이므로

$\triangle ABC$ 의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$

16. 포물선 $y = -2x^2 - bx + c$ 에서 $b < 0$, $c > 0$ 이면 꼭짓점은 제 몇 사분면 위에 있는가?

① 원점

② 제1 사분면

③ 제2 사분면

④ 제3 사분면

⑤ 제4 사분면

해설

$$y = -2x^2 - bx + c = -2\left(x + \frac{b}{4}\right)^2 + \frac{b^2}{8} + c = -2\left(x + \frac{b}{4}\right)^2 + \frac{b^2 + 8c}{8}$$

$$\therefore \text{꼭짓점의 좌표는 } \left(-\frac{b}{4}, \frac{b^2 + 8c}{8}\right)$$

$$\text{그런데 } b < 0, c > 0 \text{ 이므로 } -\frac{b}{4} > 0, \frac{b^2 + 8c}{8} > 0$$

$\therefore$ 제 1 사분면

17. 세 점 $(-1, -5)$, $(0, 5)$, $(2, 13)$ 을 지나는 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 (p, q) 일 때, $p - q$ 의 값은?

① 1

② 5

③ -5

④ -1

⑤ -11

해설

이차함수의 식을 $y = ax^2 + bx + c$ 라고 놓으면

$(-1, -5)$ 를 지나므로 $-5 = a - b + c$

$(0, 5)$ 를 지나므로 $5 = c$

$(2, 13)$ 을 지나므로 $13 = 4a + 2b + c$

$\therefore a = -2, b = 8, c = 5$

따라서 주어진 이차함수의 식은

$y = -2x^2 + 8x + 5 = -2(x - 2)^2 + 13$ 이므로

꼭짓점의 좌표는 $(2, 13)$ 이므로

$p - q = -11$ 이다.

18. $2a^2x + ax - 15x = a + 3$ 을 만족하는 x 의 값이 없을 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{5}{2}$

해설

$$2a^2x + ax - 15x = a + 3$$

$$(2a^2 + a - 15)x = a + 3$$

해가 없을 때이므로

$$2a^2 + a - 15 = 0, a + 3 \neq 0 \text{ 이다.}$$

$$2a^2 + a - 15 = 0, (a + 3)(2a - 5) = 0$$

$$a + 3 \neq 0 \text{ 이므로 } 2a - 5 = 0, a = \frac{5}{2} \text{ 이다.}$$

19. p, q, r 에 대하여 $(p+q+r)^2 = 3pq+3qr+3rp$ 이 성립할 때, p, q, r 을 세 변으로 하는 삼각형은 어떤 삼각형인지 말하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 정삼각형

해설

$$(p+q+r)^2 = 3pq+3qr+3rp$$

$$p^2+q^2+r^2+2pq+2qr+2rp = 3pq+3qr+3rp$$

$$p^2+q^2+r^2-pq-qr-rp = 0$$

양변에 2를 곱하면

$$2p^2+2q^2+2r^2-2pq-2qr-2rp = 0$$

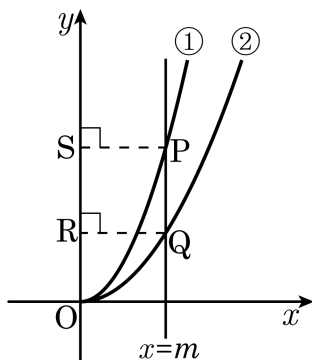
$$(p-q)^2+(q-r)^2+(r-p)^2 = 0$$

$$p-q=q-r=r-p=0$$

$$\therefore p=q=r$$

따라서 p, q, r 을 세 변으로 하는 삼각형은 정삼각형이다.

20. 다음 그림은 이차함수 $y = \frac{3}{4}x^2 (x \geq 0) \cdots \textcircled{1}$, $y = \frac{1}{3}x^2 (x \geq 0) \cdots \textcircled{2}$ 의 그래프이다. y 축에 평행한 직선 $x = m (m > 0)$ 이 $\textcircled{1}$ 과 만나는 점을 P, $\textcircled{2}$ 와 만나는 점을 Q라 하고, 두 점 P, Q에서 y 축에 내린 수선이 y 축과 만나는 점을 각각 S, R이라 할 때, $\square PQRS$ 가 정사각형이 되는 m 의 값을 구하면?



① $\frac{3}{4}$

② $\frac{4}{3}$

③ $\frac{5}{12}$

④ $\frac{12}{5}$

⑤ $\frac{13}{5}$

해설

$\square PQRS$ 가 정사각형이 되려면

$$\frac{3}{4}m^2 - \frac{1}{3}m^2 = m \text{ 이어야 한다.}$$

$$\text{이것을 풀면 } \frac{5}{12}m^2 = m$$

$$\text{따라서 } m > 0 \text{ 이므로 } m = \frac{12}{5} \text{ 이다.}$$

21. 직선 $y = 1 - x$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점을 A, 포물선 $y = ax^2$, $y = bx^2$ 의 그래프와 1 사분면에서 만나는 점을 각각 C, B, y 축과 만나는 점을 D 라 할 때, $\overline{AB} = \overline{CD} = \frac{1}{2}\overline{CB}$ 가 되기 위한 상수 a, b 의 값을 구하여라. (단, $a > b > 0$)

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 12$

▷ 정답 : $b = \frac{4}{9}$

해설

A(1.0), D(0, 1) 이고 $\overline{AB} = \overline{CD} = \frac{1}{2}\overline{CB}$ 이므로

$B\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right), C\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$

$y = bx^2$ 가 $B\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$ 를 지나므로 $b = \frac{4}{9}$

$y = ax^2$ 가 $C\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ 를 지나므로 $a = 12$

$\therefore a = 12, b = \frac{4}{9}$

22. 세 이차함수 $y = x^2 - 2x$, $y = x^2 - 6x + 8$, $y = x^2 - 4x + 2$ 의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 2

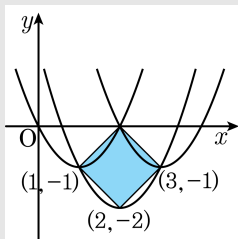
해설

$$y = x^2 - 2x \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

$$y = x^2 - 6x + 8 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

$$y = x^2 - 4x + 2 \quad \cdots \textcircled{㉢}$$

그래프 ㉢은 그래프 ㉠과 그래프 ㉡의 꼭짓점을 지나고 세 이차함수의 그래프는 모양과 폭이 같으므로 세 이차함수의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2 \text{이다.}$$

23. 함수 $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = 2x^2$, $h(x) = -x + 2$ 에 대하여 $h(g(f(x)))$ 의 최댓값을 M 이라 할 때, $h(g(f(M)))$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -16

해설

$$g(f(x)) = 2(2x - 1)^2,$$

$$h(g(f(x))) = -2(2x - 1)^2 + 2 \text{ 이므로}$$

$$M = 2$$

$$\therefore h(g(f(m))) = -2(2M - 1)^2 + 2 = -16$$

24. 이차함수 $y = -2x^2 - 4(k-1)x + 3k$ 의 최댓값을 K 라 할 때, K 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{15}{8}$

해설

$$\begin{aligned}y &= -2x^2 - 4(k-1)x + 3k \\&= -2\{x^2 + 2(k-1)x + (k-1)^2\} + 2(k-1)^2 + 3k \\&= -2\{x + (k-1)\}^2 + 2(k-1)^2 + 3k \\ \therefore K &= 2(k-1)^2 + 3k \\&= 2k^2 - k + 2 \\&= 2\left(k^2 - \frac{1}{2}k + \frac{1}{16}\right) + \frac{15}{8} \\&= 2\left(k - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{8}\end{aligned}$$

따라서 K 의 최솟값은 $\frac{15}{8}$ 이다.

25. 어느 공장에서 생산하는 제품은 50 개를 생산할 때까지는 개당 5000 원의 비용이 들어가고 51 개 부터는 생산량이 1 개씩 증가할 때마다 개당 10 원씩 추가로 감소한다. 예컨대 51 개, 52 개의 제품을 생산할 때의 생산 비용이 각각 개당 4990 원, 4980 원이다. 이 때 총 생산 비용이 최대가 될 때의 개당 생산 비용을 구하여라.

▶ 답 : 원

▷ 정답 : 2750 원

해설

생산량을 x 개라 하면

(1) $x \leq 50$ 일 때

$$(\text{총 생산 비용}) = 5000 \times x = 5000x$$

따라서 $x = 50$ 일 때, 총 생산 비용의 최댓값은 250000 원이다.

(2) $x > 50$ 일 때

$$(\text{개당 생산 비용}) = 5000 - 10(x - 50) - 10x + 5500$$

$$(\text{총 생산 비용}) = (5500 - 10x)x$$

$$= -10x^2 + 5500x$$

$$= -10(x - 275)^2 + 756250$$

따라서 $x = 275$ 일 때, 총 생산 비용의 최댓값은 756250 원이다.

(1), (2)에 의하면 생산량 275 개일 때, 총 생산 비용이 최대이다.

이 때, 개당 생산 비용은 2750 원이다.