

1. 수직선 위의 두 점 $A(a), B(b)(a > b)$ 사이의 거리 $\overline{AB}$ 는 5이고 점 $C(a + b)$ 의 좌표를 -1 이라 할 때, 점 $D(a - b)$ 의 좌표는?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$a > b$ 일때, $A(a), B(b)$ 사이의 거리는 $a - b$ 이므로, $a - b = 5$
따라서 $D(a - b)$ 의 좌표는 5

2. 두 점 A(4, -3), B(a, 3) 사이의 거리가 $6\sqrt{2}$ 일 때, 양수 a 의 값은?

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

두 점 A(4, -3), B(a, 3) 에 대하여

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \sqrt{(a-4)^2 + (3+3)^2} \\ &= \sqrt{a^2 - 8a + 52} \\ &= 6\sqrt{2}\end{aligned}$$

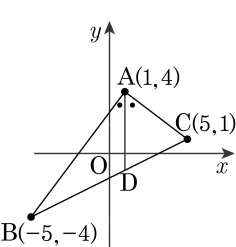
위의 식의 양변을 제곱하면 $a^2 - 8a + 52 = 72$

$$a^2 - 8a - 20 = 0$$

$$(a-10)(a+2) = 0$$

$$\therefore a = 10 (\because a > 0)$$

3. 다음 그림과 같이 세 점 $A(1, 4)$, $B(-5, -4)$, $C(5, 1)$ 를 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 가 있다. $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 할 때, $\triangle ABD$ 와 $\triangle ACD$ 의 넓이의 비는?



- ① $1 : 1$ ② $\sqrt{2} : 1$ ③ $\sqrt{3} : 1$
 ④ $2 : 1$ ⑤ $\sqrt{5} : 1$

해설

두 삼각형의 넓이비는 $\overline{BD} : \overline{CD}$ 이고
 각의 이등분선정리에 의해

$$\overline{BD} : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{AC}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\sqrt{(1+5)^2 + (4+4)^2}}{\sqrt{(1-5)^2 + (4-1)^2}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{25}} = 2$$

$$\therefore \triangle ABD : \triangle ACD = 2 : 1$$

4. 두 점 $A(-1, 4)$, $B(6, 3)$ 에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 $P(a, b)$ 라 할 때, $a + b$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$P = (a, 0)$ 이므로 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 에서
 $(a + 1)^2 + 4^2 = (a - 6)^2 + 9, a = 2$
 $\therefore P = (2, 0)$
 $a + b = 2$

5. A(-2, 3), B(4, 3)에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 P의 좌표를 구하면?

① (-2, 0)

② (-1, 0)

③ (0, 0)

④ (1, 0)

⑤ (2, 0)

해설

점 P를 $(\alpha, 0)$ 이라 하자.

$\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$$(\alpha + 2)^2 + (0 - 3)^2 = (\alpha - 4)^2 + (0 - 3)^2$$

$$\therefore \alpha = 1$$

$$\therefore P = (1, 0)$$

6. 직선 $x + y = 2$ 위에 있고, 두 점 A(0, 6), B(2, 2)에서 같은 거리에 있는 점을 P라 할 때, AP의 길이를 구하면?

① 2 ② $\sqrt{5}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{10}$ ⑤ 5

해설

$x + y = 2$ 위에 있는 점 P는
 $(\alpha, -\alpha + 2)$ 로 나타낼 수 있다.
 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로
 $\alpha^2 + (-\alpha - 4)^2 = (\alpha - 2)^2 + (-\alpha)^2$
 $\alpha = -1$
P(-1, 3)
 $\therefore \overline{AP} = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$

7. 세 꼭짓점의 좌표가 각각 $A(a, 3)$, $B(-1, -5)$, $C(3, 7)$ 인 $\triangle ABC$ 가 $\angle A$ 가 직각인 직각삼각형이 되도록 하는 상수 a 의 값들의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\triangle ABC$ 에서 $\angle A$ 가 직각이므로

피타고라스의 정리에 의해

$$\overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{BC}^2 \dots \textcircled{1}$$

이때, 세 점 $A(a, 3)$, $B(-1, -5)$, $C(3, 7)$ 에 대하여

$$\overline{AB}^2 = (-1 - a)^2 + (-5 - 3)^2 = a^2 + 2a + 65$$

$$\overline{CA}^2 = (a - 3)^2 + (3 - 7)^2 = a^2 - 6a + 25$$

$$\overline{BC}^2 = (3 + 1)^2 + (7 + 5)^2 = 160 \text{ 이므로}$$

$$\textcircled{1} \text{에 의해 } 2a^2 - 4a + 90 = 160$$

$$\therefore a^2 - 2a - 35 = 0$$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 a 의 값들의 합은 2이다.

8. 세 점 A(2, 1), B(-4, 3), C(-1, -3)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 외심의 좌표를 (a, b) 라고 할때, $a + b$ 를 구하면?

- ① -2
- ② 3
- ③ 4
- ④ -1
- ⑤ -3

해설

외심은 외접원의 중심이므로 외심을 O라 하면
 $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$ 이다.
 $\sqrt{(a-2)^2 + (b-1)^2} = \sqrt{(a+4)^2 + (b-3)^2}$ 에서 $3a - b = -5 \dots \textcircled{A}$
 $\sqrt{(a-2)^2 + (b-1)^2} = \sqrt{(a+1)^2 + (b+3)^2}$ 에서 $6a + 8b = -5 \dots \textcircled{B}$
 $\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 를 연립하면
 $a = -\frac{3}{2} \quad b = \frac{1}{2}$
 $\therefore a + b = -1$

9. 다음은 삼각형 ABC에서 변 $\overline{BC}$ 의 중점을 M이라 할 때, $\overline{AB^2} + \overline{AC^2} = 2(\overline{AM^2} + \overline{BM^2})$ 임을 보이는 과정이다. 다음 중 ㉠, ㉡을 차례로 쓴 것을 고르면?

$\overline{BC}$ 를 x 축
 $\overline{BC}$ 의 수직이등분선을 y 축으로 하여
좌표평면을 정하면 점 (㉠)은 원점이다.
이 때, 세 점 A, B, C의 좌표를
각각 (a, b) , $(-c, 0)$, $(c, 0)$ 으로 놓으면
 $\overline{AB^2} + \overline{AC^2} = (\text{㉡}) \cdots (b)$
 $2(\overline{AM^2} + \overline{BM^2}) = (\text{㉡}) \cdots (b)$
 $(b), (b)$ 에서 $\overline{AB^2} + \overline{AC^2} = 2(\overline{AM^2} + \overline{BM^2})$

- ① $A, a^2 + b^2 + c^2$
- ② $B, a^2 + b^2 + c^2$
- ③ $M, a^2 + b^2 + c^2$
- ④ $M, 2(a^2 + b^2 + c^2)$
- ⑤ $C, 2(a^2 + b^2 + c^2)$

해설

㉠ = M

㉡ = $2(a^2 + b^2 + c^2)$

10. 두 점 A(1, 9), B(2, 3)과 직선 $x + y + 1 = 0$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은?

- ① 5 ② $8\sqrt{2}$ ③ 12 ④ $9\sqrt{2}$ ⑤ 13

해설

점 B의 직선 $x + y + 1 = 0$ 에 대한 대칭점을 $B'(a, b)$ 라고 하면 $\overline{BB'}$ 의 중점은 직선 $x + y + 1 = 0$ 위의 점이므로

$$\frac{a+2}{2} + \frac{b+3}{2} + 1 = 0$$

$\therefore a + b + 7 = 0 \cdots \textcircled{A}$

또, $\overline{BB'} \perp$ (직선 $x + y + 1 = 0$) 이므로

$$\frac{b-3}{a-2} = 1 \text{ 에서 } b = a + 1 \cdots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 에서 $a = -4, b = -3$

$\therefore B'(-4, -3)$

$\therefore \overline{AB'} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$

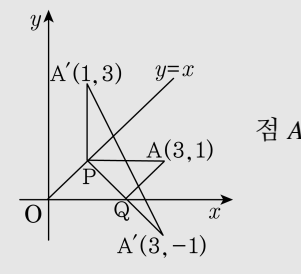
$\overline{AP} + \overline{PB} = \overline{AP} + \overline{PB'} \geq \overline{AB'} = 13$

11. 정점 $A(3, 1)$ 과 직선 $y = x$ 위를 움직이는 동점 P , x 축 위를 움직이는 동점 Q 에 대하여 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QA}$ 의 최소거리를 구하면?

- ① $2\sqrt{3}$
- ② 4
- ③ $2\sqrt{5}$
- ④ $3\sqrt{5}$
- ⑤ $4\sqrt{3}$

해설

점 A 의 $y = x$ 에 대한 대칭점을 A' ,



의 x 축에 대한 A'' 라 하면,
 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QA} = \overline{A'P} + \overline{PQ} + \overline{QA'}$
 $\overline{A'A''} = \sqrt{(3-1)^2 + (-1-3)^2} = 2\sqrt{5}$
따라서 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QA}$ 의 최솟값은 $2\sqrt{5}$ 이다.

12. 정점 A(4, 2)과 직선 $y = x$ 위를 움직이는 동점 P, x 축 위를 움직이는 동점 Q에 대하여 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QA}$ 가 최소가 되는 거리는?

① $3\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $4\sqrt{3}$ ④ $3\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{10}$

해설

최솟값은 점 A를 $y = x$ 에 대해 대칭시킨 점과 A를 x 축에 대칭시킨 점 사이의 거리와 같다.

$y = x$ 에 대한 대칭점은 A'(2, 4)

x 축에 대한 대칭점은 A''(4, -2)이므로

$$\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QA} \geq \overline{A'A''}$$

$$= \sqrt{(2-4)^2 + (4+2)^2} = 2\sqrt{10}$$

13. $(0, 0)$, $(0, 4)$, $(4, 4)$ 와 $(4, 0)$ 을 꼭짓점으로 하는 정사각형을 생각하자. $(0, 1)$ 에서 출발하여 윗변과 밑변으로 반사시켜 $(4, 2)$ 에 도달하는 꺾인 직선을 그리려면 윗변의 어느 점을 지나야 하는가? (단, 입사각과 반사각은 같다)

① $(1, 4)$

② $\left(\frac{10}{7}, 4\right)$

③ $\left(\frac{5}{3}, 4\right)$

④ $\left(\frac{4}{3}, 4\right)$

⑤ $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$

해설

대칭성을 이용하여 $(0, 1)$ 과 $(4, 10)$ 을 연결하는 직선과 $y = 4$ 와의 교점을 계산하면 된다.

$$\begin{cases} y = \frac{9}{4}x + 1 \\ y = 4 \end{cases} \quad \therefore x = \frac{4}{3}$$

따라서, $\left(\frac{4}{3}, 4\right)$ 를 지난다.

14. 두 점 A(-2, 6), B(2, -4)를 잇는 선분을 $t : 1-t$ 로 내분하는 점이 제 4사분면에 있도록 t 의 값의 범위를 정하면?

- ① $t > \frac{1}{2}$ ② $t > \frac{3}{5}$ ③ $t > \frac{3}{4}$ ④ $t < \frac{2}{5}$ ⑤ $t < \frac{1}{6}$

해설

내분점 $(2t + (1-t)(-2), -4t + (1-t)6) = (4t-2, -10t+6)$

$\therefore 4t-2 > 0$ 이고 $-10t+6 < 0$

$\therefore t > \frac{1}{2}$ 이고 $t > \frac{3}{5}$

$\therefore t > \frac{3}{5}$

15. 직선 $3x+y=8$ 이 두 점 A(4, -3), B(1, 2)를 잇는 선분 AB를 1 : m 으로 내분할 때, 상수 m 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

두 점 A(4, -3), B(1, 2)에 대하여 선분 AB를 1 : m 으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{4m+1}{m+1}, \frac{-3m+2}{m+1}\right)$ 이다.

이 점이 직선 $3x+y=8$ 위에 있으므로

$$3 \times \frac{4m+1}{m+1} + \frac{-3m+2}{m+1} = 8$$

따라서 $m=3$

16. 평행사변형 ABCD에서 꼭짓점 A(-1, -2), B(6, 4), D(0, 2)이고, $\overline{AB}$ 와 BC가 이웃하는 두 변일 때 나머지 한 꼭짓점 C의 좌표는?

- ① C(5, 0) ② C(0, 5) ③ C(7, 8)
④ C(8, 7) ⑤ C(7, 6)

해설

$C(a, b)$ 라고 하면, 평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 $\overline{AC}$ 의 중점과 $\overline{BD}$ 의 중점은 같다.

$$\left(\frac{-1+a}{2}, \frac{-2+b}{2}\right) = \left(\frac{6+0}{2}, \frac{4+2}{2}\right)$$

$$-1+a=6, \quad -2+b=6$$

$$\therefore a=7, \quad b=8$$

$$\therefore C(7, 8)$$

17. 네 점 $A(a, 4), B(2, 4), C(-3, b), D(-2, 2)$ 를 꼭짓점으로 하는 사각형 ABCD 가 평행사변형일 때, ab 의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

사각형 ABCD 가 평행사변형이므로

대각선의 중점이 서로 일치한다.

즉, $\overline{AC}$ 의 중점과 $\overline{BD}$ 의 중점이 일치하므로

$$\frac{a-3}{2} = \frac{2-2}{2}, \frac{4+b}{2} = \frac{4+2}{2}$$

$$a-3=0, 4+b=6$$

$$\therefore a=3, b=2$$

$$\therefore ab=6$$

18. 삼각형 ABC의 세 꼭짓점의 좌표가 A (1, 1), B (2, 4), C(6, 3)이고 선분 AB를 2 : 1로 외분하는 점을 D라 하자. 삼각형 BCD의 무게중심의 좌표가 (x, y)일 때, $x - y$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

두 점 A(1, 1), B(2, 4)이므로

점 D의 좌표를 (a, b)라 하면

$$a = \frac{2 \cdot 2 - 1 \cdot 1}{2 - 1} = 3, b = \frac{2 \cdot 4 - 1 \cdot 1}{2 - 1} = 7$$

따라서 D(3, 7)이므로

삼각형 BCD의 무게중심의 좌표 (x, y)는

$$x = \frac{2 + 6 + 3}{3} = \frac{11}{3}, y = \frac{4 + 3 + 7}{3} = \frac{14}{3}$$

$$\therefore x - y = \frac{11}{3} - \frac{14}{3} = -1$$

19. 삼각형 ABC에서 꼭지점 A의 좌표가 (5, 4), 변 AB의 중점 M의 좌표가 (-1, 3), 무게중심의 좌표가 (1, 2) 일 때 변 BC를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표는 (a, b)라 한다. 이 때, a + b의 값은?

- ① $\frac{1}{3}$
- ② $\frac{2}{3}$
- ③ 1
- ④ $\frac{4}{3}$
- ⑤ $\frac{5}{3}$

해설

B의 좌표를 (b_1, b_2) , C의 좌표를 (c_1, c_2) 라고 하면

$\overline{AB}$ 의 중점의 좌표가

$$\left(\frac{b_1+5}{2}, \frac{b_2+4}{2}\right) \text{ 이므로}$$

$$\frac{b_1+5}{2} = -1, \frac{b_2+4}{2} = 3 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } b_1 = -7, b_2 = 2$$

$$\text{즉 } B(-7, 2)$$

$\overline{CM}$ 을 2 : 1로 내분하는 점이

$\triangle ABC$ 의 무게중심이므로

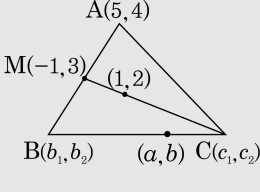
$$\left(\frac{2 \times (-1) + 1 \times c_1}{2+1}, \frac{2 \times 3 + 1 \times c_2}{2+1}\right) = (1, 2)$$

$$\left(\frac{c_1-2}{3}, \frac{6+c_2}{3}\right) = (1, 2) \text{ 에서 } c_1 = 5, c_2 = 0$$

$\overline{BC}$ 의 2 : 1로 내분점을 계산하면,

$$\left(\frac{2 \times 5 + 1 \times (-7)}{2+1}, \frac{2 \times 0 + 1 \times 2}{2+1}\right) = \left(1, \frac{2}{3}\right)$$

$$\text{따라서 } a + b = \frac{5}{3} \text{가 된다.}$$



20. 세 점 A (1, 5), B (-4, -7), C (5, 2)가 좌표평면 위에 있다. $\triangle ABC$ 에서 $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라 할 때, 점 D의 좌표를 구하면?

- ① (0, 0) ② $\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ③ $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
④ $\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ⑤ $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$

해설

$$\overline{AB} = 13, \overline{AC} = 5$$

$$\text{따라서 } \overline{AB} : \overline{AC} = 13 : 5$$

D는 B, C를 13 : 5로 내분한 점

$$\therefore \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

21. 세 점 $O(0, 0)$, $A(2, 4)$, $B(6, 2)$ 와 선분 AB 위의 점 $P(a, b)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 넓이가 삼각형 OAP 의 넓이의 2배일 때, $a + b$ 의 값은?

- ① 3
- ② 4
- ③ 5
- ④ 6
- ⑤ 7

해설

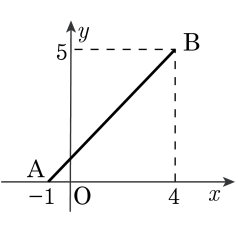
다음 그림에서 $\triangle OAB$ 와 $\triangle OAP$ 의 넓이가 같으므로 $\triangle OAB = 2\triangle OAP$ 이려면 P 는 선분 AB 의 중점이어야 한다.

이 때, $P\left(\frac{2+6}{2}, \frac{4+2}{2}\right)$

즉 $P(4, 3)$ 이므로 $a = 4, b = 3$

$\therefore a + b = 7$

22. 두 점 A(-1, 0), B(4, 5)에 대하여 두 점 A, B로부터의 거리의 비가 3 : 2 점 P의 자취의 방정식은?



- ① $(x-5)^2 + (y-6)^2 = 50$ ② $(x-6)^2 + (y-7)^2 = 60$
 ③ $(x-7)^2 + (y-6)^2 = 70$ ④ $(x-7)^2 + (y-8)^2 = 80$
 ⑤ $(x-8)^2 + (y-9)^2 = 72$

해설

점 P를 (x,y)라 두면

$$\overline{AP} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$$

$$\overline{BP} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-5)^2}$$

$\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} : \frac{\overline{BP}}{\overline{AP}} = 3 : 2$ 이므로

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} : \sqrt{(x-4)^2 + (y-5)^2} = 3 : 2$$

정리하면 $(x-8)^2 + (y-9)^2 = 72$

23. 수직선 위의 세 점 A(1), B(7), C(10)과 동점 $P(x)$ 에 대하여 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 이 최소가 되는 점 P의 좌표를 구하면?
- ① P(5) ② P(6) ③ P(7) ④ P(8) ⑤ P(9)

해설

$$\begin{aligned} &\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 \\ &= (x-1)^2 + (x-7)^2 + (x-10)^2 \\ &= 3(x-6)^2 + 42 \end{aligned}$$

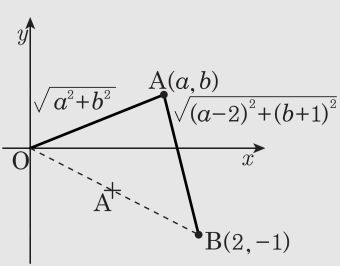
따라서 $x=6$ 일 때 최소가 된다.

24. 좌표평면 위에 점 $O(0, 0)$, $A(a, b)$, $B(2, -1)$ 이 있다. 이때, $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{(a-2)^2 + (b+1)^2}$ 의 최솟값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ $\sqrt{5}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

해설

$\sqrt{a^2 + b^2}$ 은 $\overline{OA}$ 의 길이이고,
 $\sqrt{(a-2)^2 + (b+1)^2}$ 은 $\overline{AB}$ 의 길이이다.
따라서, 준 식은 O, A, B 가 일
직선상에 있을 때
최소가 된다. (그림 참조)
따라서, $\overline{OA} + \overline{AB}$ 의 최솟값은
 $\overline{OB} = \sqrt{5}$



25. 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC에서 변 BC 위에 한 점 P가 있다.

$\overline{AP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 최솟값은?

① $\frac{6}{5}$

② $\frac{5}{4}$

③ $\frac{4}{3}$

④ $\frac{7}{2}$

⑤ $\frac{7}{4}$

해설

$\overline{BC}$ 를 x 축, $\overline{BC}$ 의 수직이등분선을 y 축으로 잡고

$A(0, \sqrt{3})$, $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$ 이라고 하자.

점 P는 $\overline{BC}$ 위의 점이므로

좌표를 $P(x, 0)$ 이라고 하면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2 + \overline{CP}^2 &= (x^2 + 3) + (x - 1)^2 \\ &= 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{2}\end{aligned}$$

따라서 $x = \frac{1}{2}$ 일 때, $\overline{AP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 최솟값은 $\frac{7}{2}$ 이다.