1. 수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(a), \mathrm{B}(b)(a > b)$ 사이의 거리 $\overline{\mathrm{AB}}$는 5이고 점 $\mathrm{C}(a+b)$의 좌표를 -1이라 할 때, 점 $\mathrm{D}(a-b)$의 좌표는?

① 4　　② 5　　③ 6　　④ 7　　⑤ 8

해설

$a > b$일때, $\mathrm{A}(a)$, $\mathrm{B}(b)$ 사이의 거리는 $a-b$이므로, $a-b=5$
따라서 $\mathrm{D}(a-b)$의 좌표는 5

2. 두 점 $\mathrm{A}(4,-3), \mathrm{B}(a,3)$ 사이의 거리가 $6\sqrt{2}$ 일 때, 양수 a 의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

두 점 $\mathrm{A}(4,-3), \mathrm{B}(a,3)$ 에 대하여

$$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(a-4)^2 + (3+3)^2}$$
$$= \sqrt{a^2 - 8a + 52}$$
$$= 6\sqrt{2}$$

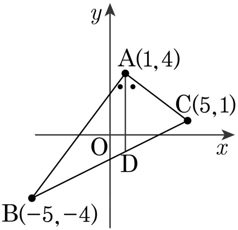
위의 식의 양변을 제곱하면 $a^2 - 8a + 52 = 72$

$a^2 - 8a - 20 = 0$

$(a-10)(a+2) = 0$

$\therefore a = 10 (\because a > 0)$

3. 다음 그림과 같이 세점 $A(1,4)$, $B(-5,-4)$, $C(5,1)$를 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 가 있다. $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 할 때, $\triangle ABD$ 와 $\triangle ACD$ 의 넓이의 비는?



① $1:1$　② $\sqrt{2}:1$　③ $\sqrt{3}:1$

④ $2:1$　⑤ $\sqrt{5}:1$

해설

두 삼각형의 넓이비는 $\overline{BD}:\overline{CD}$ 이고

각의 이등분선정리에 의해

$\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}$

$\overline{AB}=\sqrt{(1+5)^2+(4+4)^2}=\sqrt{100}=10$

$\overline{AC}=\sqrt{(1-5)^2+(4-1)^2}=\sqrt{25}=5$

$\therefore\ \triangle ABC\ :\ \triangle ACD=2\ :\ 1$

4. 두 점 $\mathrm{A}(-1, 4), \mathrm{B}(6, 3)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점을 $\mathrm{P}(a, b)$라 할 때, $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\mathrm{P}=(a, 0)$이므로 $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$에서

$(a+1)^2+4^2=(a-6)^2+9$, $a=2$

$\therefore\ \mathrm{P}=(2, 0)$

$a+b=2$

5. A$(-2, 3)$, B$(4, 3)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P의 좌표를 구하면?

① $(-2, 0)$ ② $(-1, 0)$ ③ $(0, 0)$

④ $(1, 0)$ ⑤ $(2, 0)$

해설

점 P를 $(\alpha, 0)$이라 하자.

$\overline{\mathrm{AP}}^2 = \overline{\mathrm{BP}}^2$이므로

$(\alpha+2)^2 + (0-3)^2 = (\alpha-4)^2 + (0-3)^2$

$\therefore\ \alpha = 1$

$\therefore\ P = (1, 0)$

6. 직선 $x+y=2$ 위에 있고, 두 점 $\mathrm{A}(0,6)$, $\mathrm{B}(2,2)$에서 같은 거리에 있는 점을 P라 할 때, $\overline{\mathrm{AP}}$의 길이를 구하면?

① 2 ② $\sqrt{5}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{10}$ ⑤ 5

해설

$x+y=2$ 위에 있는 점 P는

$(\alpha, -\alpha+2)$로 나타낼 수 있다.

$\overline{\mathrm{AP}}^2 = \overline{\mathrm{BP}}^2$ 이므로

$\alpha^2+(-\alpha-4)^2=(\alpha-2)^2+(-\alpha)^2$

$\alpha=-1$

$\mathrm{P}(-1,\ 3)$

$\therefore\ \overline{AP}=\sqrt{(-1)^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$

7. 세 꼭짓점의 좌표가 각각 $\mathrm{A}(a, 3)$, $\mathrm{B}(-1, -5)$, $\mathrm{C}(3, 7)$ 인 $\triangle\mathrm{ABC}$가 $\angle\mathrm{A}$가 직각인 직각삼각형이 되도록 하는 상수 a의 값들의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\triangle\mathrm{ABC}$에서 $\angle\mathrm{A}$가 직각이므로
피타고라스의 정리에 의해
$\overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{CA}}^2 = \overline{\mathrm{BC}}^2 \cdots$ ㉠
이때, 세 점 $\mathrm{A}(a, 3)$, $\mathrm{B}(-1, -5)$, $\mathrm{C}(3, 7)$에 대하여

$$\overline{\mathrm{AB}}^2 = (-1-a)^2 + (-5-3)^2 = a^2 + 2a + 65$$

$$\overline{\mathrm{CA}}^2 = (a-3)^2 + (3-7)^2 = a^2 - 6a + 25$$

$\overline{\mathrm{BC}}^2 = (3+1)^2 + (7+5)^2 = 160$ 이므로
㉠에 의해 $2a^2 - 4a + 90 = 160$
$\therefore\ a^2 - 2a - 35 = 0$
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 a의 값들의 합은 2이다.

8. 세 점 $A(2,1), B(-4,3), C(-1,-3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 외심의 좌표를 (a,b)라고 할때, $a+b$를 구하면?

① -2 ② 3 ③ 4 ④ -1 ⑤ -3

해설

외심은 외접원의 중심이므로 외심을 O라 하면
$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$이다.
$\sqrt{(a-2)^2+(b-1)^2} = \sqrt{(a+4)^2+(b-3)^3}$에서 $3a-b = -5 \cdots$㉠
$\sqrt{(a-2)^2+(b-1)^2} = \sqrt{(a+1)^2+(b+3)^3}$에서 $6a+8b = -5 \cdots$㉡
㉠,㉡를 연립하면
$a = -\frac{3}{2} \quad b = \frac{1}{2}$
$\therefore \ a+b = -1$

9. 다음은 삼각형 ABC에서 변 $\overline{BC}$의 중점을 M이라 할 때, $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$임을 보이는 과정이다. 다음 중 ㉠, ㉡을 차례로 쓴 것을 고르면?

$\overline{BC}$를 x축 $\overline{BC}$의 수직이등분선을 y축으로 하여 좌표평면을 정하면 점 (㉠)은 원점이다. 이 때, 세 점 A, B, C의 좌표를 각각 (a,b), $(-c,0)$, $(c,0)$으로 놓으면 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=($ ㉡ $)\cdots$(가) $2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)=($ ㉡ $)\cdots$(나) (가), (나)에서 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$

① $A, a^2+b^2+c^2$　② $B, a^2+b^2+c^2$
③ $M, a^2+b^2+c^2$　④ $M, 2(a^2+b^2+c^2)$
⑤ $C, 2(a^2+b^2+c^2)$

해설

㉠ $= M$
㉡ $= 2(a^2+b^2+c^2)$

10. 두 점 $A(1,\ 9)$, $B(2,\ 3)$과 직선 $x+y+1=0$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은?

① 5 ② $8\sqrt{2}$ ③ 12 ④ $9\sqrt{2}$ ⑤ 13

해설

점 B의 직선 $x+y+1=0$에 대한 대칭점을
$B'(a, b)$라고 하면 $\overline{BB'}$의 중점은
직선 $x+y+1=0$ 위의 점이므로

$$\frac{a+2}{2}+\frac{b+3}{2}+1=0$$

$\therefore\ a+b+7=0 \cdots$ ㉠

또, $\overline{BB'}\perp$(직선 $x+y+1=0$)이므로

$\dfrac{b-3}{a-2}=1$에서 $b=a+1 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=-4, b=-3$

$\therefore\ B'(-4, -3)$

$\therefore\ \overline{AB'}=\sqrt{5^2+12^2}=13$

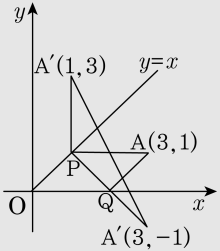
$\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{AP}+\overline{PB'}\geq\overline{AB'}=13$

11. 정점 $A(3,1)$ 과 직선 $y=x$ 위를 움직이는 동점 P , x 축 위를 움직이는 동점 Q 에 대하여 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QA}$ 의 최소거리를 구하면?

① $2\sqrt{3}$ ② 4 ③ $2\sqrt{5}$ ④ $3\sqrt{5}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

해설

점 A 의 $y=x$ 에 대한 대칭점을 A' , 점 A 의 x 축에 대한 A'' 라 하면,



$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QA}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QA''}}ge\overline{\mathrm{A'A''}}$

$\overline{\mathrm{A'A''}}=\sqrt{(3-1)^2+(-1-3)^2}=2\sqrt{5}$

따라서 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QA}$ 의 최솟값은 $2\sqrt{5}$ 이다.

12. 정점 A$(4,\ 2)$과 직선 $y=x$ 위를 움직이는 동점 P, x축 위를 움직이는 동점 Q 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QA}}$가 최소가 되는 거리는?

① $3\sqrt{2}$　② $2\sqrt{5}$　③ $4\sqrt{3}$　④ $3\sqrt{7}$　⑤ $2\sqrt{10}$

해설

최솟값은 점 A를 $y=x$에 대해 대칭시킨 점과 A를 x축에 대칭시킨 점 사이의 거리와 같다.

$y=x$에 대한 대칭점은 $\mathrm{A}'(2,4)$

x축에 대한 대칭점은 $\mathrm{A}''(4,-2)$이므로

$$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QA}}\geq\overline{\mathrm{A'A''}}$$

$$=\sqrt{(2-4)^2+(4+2)^2}=2\sqrt{10}$$

13. $(0,0)$, $(0,4)$, $(4,4)$와 $(4,0)$을 꼭짓점으로 하는 정사각형을 생각하자. $(0,\ 1)$에서 출발하여 윗변과 밑변으로 반사시켜 $(4,2)$에 도달하는 꺾인 직선을 그리려면 윗변의 어느 점을 지나야 하는가? (단, 입사각과 반사각은 같다)

① $(1,\ 4)$ ② $\left(\frac{10}{7},\ 4\right)$ ③ $\left(\frac{5}{3},\ 4\right)$
④ $\left(\frac{4}{3},\ 4\right)$ ⑤ $\left(\frac{3}{2},\ 4\right)$

해설

대칭성을 이용하여 $(0,1)$과 $(4,10)$을 연결하는 직선과 $y=4$와의 교점을 계산하면 된다.

$$\begin{cases} y = \frac{9}{4}x + 1 \\ y = 4 \end{cases} \qquad \therefore\ x = \frac{4}{3}$$

따라서, $\left(\frac{4}{3}, 4\right)$를 지난다.

14. 두 점 A$(-2,\ 6)$, B$(2,\ -4)$를 잇는 선분을 $t:1-t$ 로 내분하는 점이 제 4사분면에 있도록 t의 값의 범위를 정하면?

① $t>\frac{1}{2}$ ② $t>\frac{3}{5}$ ③ $t>\frac{3}{4}$ ④ $t<\frac{2}{5}$ ⑤ $t<\frac{1}{6}$

해설

내분점 $(2t+(1-t)(-2),\ -4t+(1-t)6)=(4t-2,\ -10t+6)$

$\therefore\ 4t-2>0$ 이고 $-10t+6<0$

$\therefore\ t>\frac{1}{2}$ 이고 $t>\frac{3}{5}$

$\therefore\ t>\frac{3}{5}$

15. 직선 $3x+y=8$이 두 점 $\mathrm{A}(4,\ -3)$, $\mathrm{B}(1,\ 2)$를 잇는 선분 AB를 $1\ :\ m$으로 내분할 때, 상수 m의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

두 점 $\mathrm{A}(4,\ -3)$, $\mathrm{B}(1,\ 2)$ 에 대하여 선분 AB 를 $1\ :\ m$ 으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{4m+1}{m+1},\ \dfrac{-3m+2}{m+1}\right)$ 이다.

이 점이 직선 $3x+y=8$ 위에 있으므로

$$3\times\frac{4m+1}{m+1}+\frac{-3m+2}{m+1}=8$$

따라서 $m=3$

16. 평행사변형 ABCD에서 꼭짓점 $A(-1,\ -2)$, $B(6,\ 4)$, $D(0,\ 2)$이고, $\overline{AB}$와 $\overline{BC}$가 이웃하는 두 변일 때 나머지 한 꼭짓점 C의 좌표는?

① $C(5,\ 0)$　② $C(0,\ 5)$　③ $C(7,\ 8)$

④ $C(8,\ 7)$　⑤ $C(7,\ 6)$

해설

$C(a,b)$ 라고 하면, 평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 $\overline{AC}$의 중점과 $\overline{BD}$의 중점은 같다.

$$\left(\frac{-1+a}{2},\ \frac{-2+b}{2}\right)=\left(\frac{6+0}{2},\ \frac{4+2}{2}\right)$$

$-1+a=6,\ \ -2+b=6$

$\therefore\ a=7,\ b=8$

$\therefore\ C(7,8)$

17. 네 점 $\mathrm{A}(a, 4), \mathrm{B}(2, 4), \mathrm{C}(-3, b), \mathrm{D}(-2, 2)$ 를 꼭짓점으로 하는 사각형 ABCD 가 평행사변형일 때, ab 의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

사각형 ABCD 가 평행사변형이므로
대각선의 중점이 서로 일치한다.
즉, $\overline{\mathrm{AC}}$ 의 중점과 $\overline{\mathrm{BD}}$ 의 중점이 일치하므로

$$\frac{a-3}{2} = \frac{2-2}{2}, \frac{4+b}{2} = \frac{4+2}{2}$$

$a - 3 = 0, 4 + b = 6$

$\therefore a = 3, b = 2$

$\therefore ab = 6$

18. 삼각형 ABC의 세 꼭짓점의 좌표가 A$(1,\ 1)$, B$(2,\ 4)$, C$(6,\ 3)$이고 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점을 D라 하자. 삼각형 BCD의 무게중심의 좌표가 $(x,\ y)$일 때, $x-y$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

두 점 A$(1,\ 1)$, B$(2,\ 4)$이므로
점 D의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

$$a=\frac{2\cdot2-1\cdot1}{2-1}=3,\ b=\frac{2\cdot4-1\cdot1}{2-1}=7$$

따라서 D$(3,\ 7)$이므로
삼각형 BCD의 무게중심의 좌표 $(x,\ y)$는

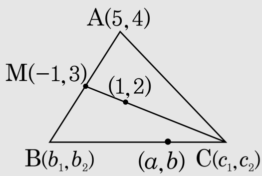
$$x=\frac{2+6+3}{3}=\frac{11}{3},\ y=\frac{4+3+7}{3}=\frac{14}{3}$$

$$\therefore x-y=\frac{11}{3}-\frac{14}{3}=-1$$

19. 삼각형 ABC 에서 꼭지점 A 의 좌표가 $(5,\ 4)$, 변 AB 의 중점 M 의 좌표가 $(-1,\ 3)$, 무게중심의 좌표가 $(1,\ 2)$ 일 때 변 BC 를 $2\ :\ 1$ 로 내분하는 점의 좌표는 $(a,\ b\ )$라 한다. 이 때, $a+b$ 의 값은?

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{2}{3}$　③ 1　④ $\frac{4}{3}$　⑤ $\frac{5}{3}$

해설



B 의 좌표를 $(b_1,\ b_2)$, C 의 좌표를 $(c_1,\ c_2)$ 라고 하면

$\overline{\mathrm{AB}}$ 의 중점의 좌표가

$\left(\frac{b_1+5}{2},\ \frac{b_2+4}{2}\right)$ 이므로

$\frac{b_1+5}{2}=-1, \frac{b_2+4}{2}=3$ 이다.

따라서 $b_1=-7,\ b_2=2$

즉 $\mathrm{B}(-7,\ 2)$

$\overline{\mathrm{CM}}$ 을 $2\ :\ 1$ 로 내분하는 점이

$\triangle$ABC 의 무게중심이므로

$$\left(\frac{2\times(-1)+1\times c_1}{2+1},\ \frac{2\times 3+1\times c_2}{2+1}\right)=(1,\ 2)$$

$\left(\frac{c_1-2}{3},\ \frac{6+c_2}{3}\right)=(1,\ 2)$ 에서 $c_1=5,\ c_2=0$

$\overline{\mathrm{BC}}$ 의 $2:1$ 로 내분점을 계산하면,

$$\left(\frac{2\times 5+1\times(-7)}{2+1},\ \frac{2\times 0+1\times 2}{2+1}\right)=\left(1,\ \frac{2}{3}\right)$$

따라서 $a+b=\frac{5}{3}$ 가 된다.

20. 세 점 A $(1,5)$, B $(-4,-7)$, C $(5,2)$가 좌표평면 위에 있다. $\triangle$ABC 에서 $\angle$A 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 할 때, 점 D 의 좌표를 구하면?

① $(0,0)$ ② $\left(-\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$ ③ $\left(\frac{5}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

④ $\left(-\frac{4}{3},\ \frac{2}{3}\right)$ ⑤ $\left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{6}\right)$

해설

$\overline{AB} = 13,\ \overline{AC} = 5$

따라서 $\overline{AB} : \overline{AC} = 13 : 5$

D 는 B , C 를 13 : 5 로 내분한 점

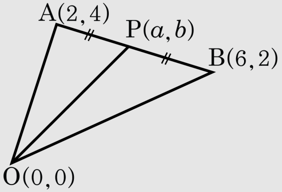
$\therefore\ \left(\frac{5}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

21. 세 점 $O(0,0), A(2,4), B(6,2)$ 와 선분 AB 위의 점 $P(a,b)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 넓이가 삼각형 OAP 의 넓이의 2배일 때, $a+b$ 의 값은?

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

다음 그림에서 $\triangle OAB$ 와 $\triangle OAP$ 의 높이가 같으므로
$\triangle OAB = 2\triangle OAP$ 이려면
P는 선분 AB의 중점이어야 한다.

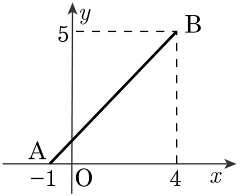


이 때, $P\left(\frac{2+6}{2}, \frac{4+2}{2}\right)$

즉 $P(4,3)$ 이므로 $a=4, b=3$

$\therefore a+b=7$

22. 두 점 $A(-1,\ 0)$, $B(4,\ 5)$에 대하여 두 점 A, B로부터의 거리의 비가 $3:2$ 점 P의 자취의 방정식은?



① $(x-5)^2+(y-6)^2=50$

② $(x-6)^2+(y-7)^2=60$

③ $(x-7)^2+(y-6)^2=70$

④ $(x-7)^2+(y-8)^2=80$

⑤ $(x-8)^2+(y-9)^2=72$

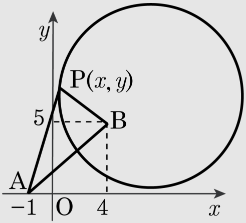
해설

점 P를 (x, y)라 두면

$\overline{AP}=\sqrt{(x+1)^2+y^2}$

$\overline{BP}=\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2}$

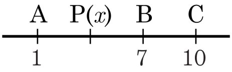
$\overline{AP}:\overline{BP}=3:2$이므로



$\sqrt{(x+1)^2+y^2}:\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2}=3:2$

정리하면 $(x-8)^2+(y-9)^2=72$

23. 수직선 위의 세 점 A(1), B(7), C(10)과 동점 P(x)에 대하여 $\overline{AP^2}+\overline{BP^2}+\overline{CP^2}$이 최소가 되는 점 P의 좌표를 구하면?



① P(5) ② P(6) ③ P(7) ④ P(8) ⑤ P(9)

해설

$\overline{AP^2}+\overline{BP^2}+\overline{CP^2}$

$=(x-1)^2+(x-7)^2+(x-10)^2$

$=3(x-6)^2+42$

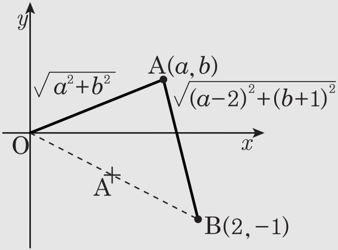
따라서 $x=6$일 때 최소가 된다.

24. 좌표평면 위에 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(a,\ b)$, $\mathrm{B}(2, -1)$ 이 있다. 이때, $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a-2)^2+(b+1)^2}$ 의 최솟값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ $\sqrt{5}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

해설

$\sqrt{a^2+b^2}$ 은 $\overline{\mathrm{OA}}$ 의 길이이고, $\sqrt{(a-2)^2+(b+1)^2}$ 은 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 길이이다.
따라서, 준 식은 O, A, B 가 일직선상에 있을 때 최소가 된다. (그림 참조)
따라서, $\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AB}}$ 의 최솟값은 $\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{5}$



25. 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC에서 변 BC 위에 한 점 P 가 있다. $\overline{AP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 최솟값은?

① $\frac{6}{5}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

해설

$\overline{BC}$를 x 축, $\overline{BC}$의 수직이등분선을 y축으로 잡고
$A(0, \sqrt{3})$, $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$이라고 하자.
점 P는 $\overline{BC}$ 위의 점이므로
좌표를 $P(x, 0)$이라고 하면

$$\overline{AP}^2 + \overline{CP}^2 = (x^2 + 3) + (x - 1)^2 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{2}$$

따라서 $x = \frac{1}{2}$ 일 때, $\overline{AP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 최솟값은 $\frac{7}{2}$ 이다.