1. 수직선 위의 두 점 P(2), Q(x)에 대하여 P, Q 두 점 사이의 거리가 4일 때, x의 값은 2개이다. 이 중에서 2보다 큰 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x > 2$ 일 때, $x - 2 = 4$

$\therefore\ x = 6$

2. 다음 두 점 사이의 거리를 구하여라.

$A(\sqrt{3}-1,\ 1-\sqrt{2}),\ B(\sqrt{3},\ 1+\sqrt{2})$

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\overline{AB}=\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{3}+1)^2+(1+\sqrt{2}-1+\sqrt{2})^2}$

$=\sqrt{1+8}=3$

3. 두 점 $A(5,\ -4)$, $B(-1,\ 2)$를 잇는 선분 AB의 중점 M의 좌표를 $(a,\ b)$라 하자. 이때, $a+b$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$a = \{5+(-1)\} \div 2 = 2$
$b = \{(-4)+2\} \div 2 = -1$이다.
따라서 $a+b=1$

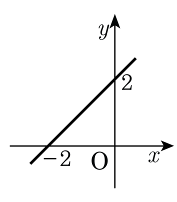
4. 세 점 A(1, −1), B(2, 1), C(3, 3)를 꼭짓점으로 하는 △ABC의 무게중심의 좌표는?

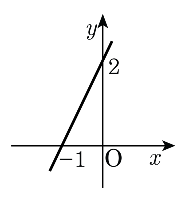
① (1, 1) ② (2, 1) ③ (3, 1)
④ (0, 1) ⑤ (2, 2)

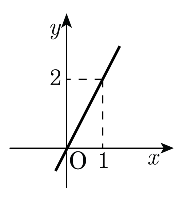
해설

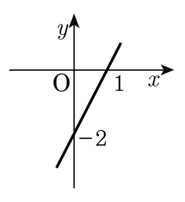
무게중심 G$\left(\frac{1+2+3}{3}, \frac{-1+1+3}{3}\right)=(2,\ 1)$

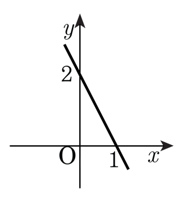
5. 다음 중 직선 $y = 2(x+1)$ 을 나타내는 그래프는?

①


②


③


④


⑤


해설

$y = 2(x+1) = 2x+2$ 이므로, 기울기가 2 이고,
y 절편이 2 인 그래프는 ②번이다.

6. 직선 $(1+k)x+(k-1)y=2k$에 대한 다음 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $k=0$일 때, 직선 $y=x$와 일치한다.

㉡ $k\neq 0$일 때, 직선 $y=-x+2$와 일치한다.

㉢ k의 값에 관계없이 정점 $(1,\ 1)$을 지난다.

① ㉠　② ㉠, ㉡　③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $k=0$이면 주어진 직선은 $x-y=0$으로
$y=x$와 일치한다.
㉡ $k\neq 1$이면 주어진 직선은
$y=-\frac{k+1}{k-1}x+\frac{2k}{k-1}$ 이므로 $k\neq 0$일 때
$y=-x+2$와 일치한다고 할 수 없다.
㉢ 주어진 식을 k에 관하여 정리하면
$(x+y-2)k+(x-y)=0$
$x+y-2=0$,
$x-y=0$이면 k값에 관계없이
주어진 식이 성립한다.
즉 k 값에 관계없이 $(1,\ 1)$을 지난다.

7. $x^2+y^2+8x-6y-1=0$ 과 중심이 같고, 원점을 지나는 원의 반지름의 길이를 구하면?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$x^2+y^2+8x-6y-1=0$

$\Rightarrow (x+4)^2+(y-3)^2=26$

중심 : $(-4, 3)$

$\therefore (x+4)^2+(y-3)^3=r^2$,

$(0,\ 0)$ 을 지나므로

$r=5(\because r>0)$

8. 지름의 양 끝점이 $(3,\ 0)$, $(5,\ 2)$ 인 원의 방정식이 $(x-a)^2+(y-b)^2=r$ 이다. $a+b+r$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

지름의 양 끝점의 중점의 원의 중심이므로,
중심의 좌표는 $(4,\ 1)$ 이다.
(지름의 길이) $= \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$ 에서
반지름의 길이는 $\sqrt{2}$
따라서, 구하는 원의 방정식은
$(x-4)^2+(y-1)^2=2$

9. 원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 $(-5, 0)$ 에서 접하는 직선의 방정식을 구하면?

① $x=-1$ ② $x=-2$ ③ $x=-3$
④ $x=-4$ ⑤ $x=-5$

해설
구하는 접선의 방정식은 $-5\cdot x+0\cdot y=25$
$-5x=25$
$\therefore x=-5$

10. 평행이동 $T:(x,y) \to (x+4, y-3)$ 에 의하여 점 $(2,5)$ 가 옮겨지는 점의 좌표를 구하면?

① (2, 1)　② (4, 6)　③ (6, 2)　④ (5, 3)　⑤ (9, 1)

해설

평행이동 T 로부터 얻어지는 관계식

$$\begin{cases} x' = x+4 \\ y' = y-3 \end{cases}$$

에 주어진 점의 좌표를 대입하여 구하면 된다.

$(2+4, 5-3)$, 즉 $(6,2)$

11. 두 점 $A(-3, 2)$, $B(4, 5)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P의 좌표는?

① $(-3,\ 0)$　　② $(1,\ 0)$　　③ $(2,\ 0)$

④ $(-1,\ 0)$　　⑤ $(5,\ 0)$

해설

x축 위의 점을 $P(x, 0)$라 하면

$\overline{PA} = \overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$이므로

$(x+3)^2 + (0-2)^2 = (x-4)^2 + (0-5)^2$

$14x = 28$

따라서 $x = 2$ 즉, $P(2,\ 0)$

12. A $(4, 7)$, B $(3, 2)$, C $(5, 3)$, D (x, y)에 대하여 사각형 ABCD가 평행사변형일 때, $y - x$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$\left(\frac{4+5}{2}, \frac{7+3}{2}\right) = \left(\frac{x+3}{2}, \frac{y+2}{2}\right)$

$\therefore\ x+3=9,\ y+2=10$

$\therefore\ x=6,\ y=8$

13. 두 점 $A(-2,\ -3)$, $B(2,\ 1)$ 을 지나는 직선에 평행하고, 점 $(2,\ 1)$ 을 지나는 직선의 방정식은?

① $y=x+1$　② $y=x-1$　③ $y=-x+1$
④ $y=-x-1$　⑤ $y=x$

해설

기울기가 m 이고, 점$(x_1,\ y_1)$ 을 지나는 직선의 방정식은 $y-y_1=m(x-x_1)$
두 점 $A(-2,\ -3)$, $B(2,\ 1)$ 을 지나는 직선의 기울기가
$\dfrac{1-(-3)}{2-(-2)}=1$ 이므로,
구하는 직선의 방정식은
$y-1=1\cdot(x-2)$
$\therefore\ y=x-1$

14. 직선 $y = -x + 1$ 의 기울기와 y 절편, x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

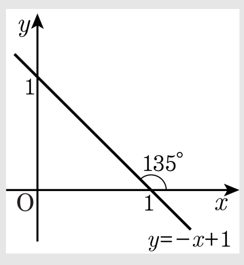
▷ 정답 : 기울기 -1

▷ 정답 : y 절편 1

▷ 정답 : x축의 양의 방향 $135°$

해설

기울기 -1, y 절편 1,
x 축의 양의 방향과
이루는 각 $135°$



15. 세 점 A $(2,\ 1)$, B $(-k+1,\ 3)$, C $(1,\ k+2)$가 같은 직선위에 있도록 하는 실수 k의 값들의 합은?

① -2　② -1　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

세 점 $\mathrm{A}(2,1)$, $\mathrm{B}(-\mathrm{k}+1,3)$, $\mathrm{C}(1,\mathrm{k}+2)$ 가 같은 직선 위에 있으려면
직선 AB 와 AC 의 기울기가 같아야 하므로

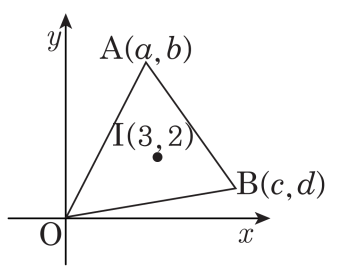
$$\frac{3-1}{(-k+1)-2} = \frac{(k+2)-1}{1-2}$$

$$\frac{2}{-k-1} = \frac{k+1}{-1},$$

$(k+1)^2 = 2$,

$\therefore\ k = -1 \pm \sqrt{2}$ 따라서 구하는 합은 $(-1+\sqrt{2})+(-1-\sqrt{2}) = -2$

16. 그림과 같이 세 점 O(0, 0), A(a, b), B(c, d) 로 이루어진 삼각형 OAB 의 내심 I 의 좌표가 (3, 2) 이다. $\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{OB}}$ 일 때, $\dfrac{3c+2d}{3a+2b}$ 의 값은?



① 1 ② $\dfrac{3}{2}$ ③ $-\dfrac{2}{3}$
④ $-\dfrac{3}{2}$ ⑤ 알 수 없다

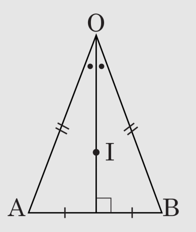
해설

△OAB 가 $\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{OB}}$ 인 이등변삼각형이고,
$\angle\mathrm{AOI} = \angle\mathrm{BOI}$ 이므로
$\overline{\mathrm{OI}}$ 는 $\overline{\mathrm{AB}}$ 와 수직이다.
$\overline{\mathrm{OI}}$ 의 기울기가 $\dfrac{2}{3}$ 이므로
$\overline{\mathrm{AB}}$ 의 기울기는 $-\dfrac{3}{2}$ 이다.

$\therefore \dfrac{b-d}{a-c} = -\dfrac{3}{2}$

$\therefore 3a+2b = 3c+2d$

$\therefore \dfrac{3c+2d}{3a+2b} = 1$



17. 두 직선 $2x-y-3=0$, $x+y-3=0$ 의 교점을 지나고 $(0,0)$ 을 지나는 직선의 방정식을 $ax+by=0$ 이라 할 때, $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(2x-y-3)+k(x+y-3)=0$으로 나타낼 수 있다.
이 때, $(0,\ 0)$을 지나므로
$(-3)+k(-3)=0 \quad \therefore\ k=-1$
$(2x-y-3)+(-1)(x+y-3)=0$을 정리하면
$\therefore\ x-2y=0$
$a=1,\ b=-2 \quad \therefore\ a-b=1-(-2)=3$

18. 점 $\mathrm{P}(1, 2)$ 에서 직선 $2x+y-3=0$ 에 내린 수선의 발을 H 라할 때, 수선 PH 의 길이는?

① $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ 3

해설

($\overline{\mathrm{PH}}$ 의 길이)

$=$ (점 $\mathrm{P}(1,\ 2)$ 와 직선 $2x+y-3=0$ 과의 거리)

$\therefore\ \overline{\mathrm{PH}} = \dfrac{|2+2-3|}{\sqrt{4+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

19. 세 점 $(-1,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $(6,\ 0)$을 지나는 원의 중심의 좌표는?

① $(2, 3)$ ② $(-2, 3)$ ③ $(2, -3)$
④ $(-2, -3)$ ⑤ $\left(2, \frac{3}{2}\right)$

해설

세 점 $(-1,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $(6,\ 0)$을 지나는 원의 방정식을
$x^2+y^2+ax+by+c=0$ 이라 하면
이 원이 세점을 지나므로
$(-1)^2+1^2-a+b+c=0$
$\therefore a-b-c=2 \cdots\cdots$ ㉠
$2^2+2^2+2a+2b+c=0$
$\therefore 2a+2b+c=-8 \cdots\cdots$ ㉡
$6^2+6a+c=0$
$\therefore 6a+c=-36 \cdots\cdots$ ㉢
㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면
$a=-4,\ b=6,\ c=-12$
즉, $x^2+y^2-4x+6y-12=0$ 이므로
표준형으로 나타내면
$(x-2)^2+(y+3)^2=25$
따라서, 원의 중심의 좌표는 $(2,\ -3)$ 이다.

20. 이차방정식 $x^2+y^2+kx-2ky+k^2+k=0$ 의 그래프가 원을 나타내도록 상수 k 값의 범위를 구하면?

① $0 \le k \le 4$　　② $\frac{1}{4} \le k \le 4$

③ $0 < k < 4$　　④ $k \le 0$ 또는 $k \ge 4$

⑤ $k < 0$ 또는 $k > 4$

해설

$$\left(x+\frac{k}{2}\right)^2+(y-k)^2=\frac{k^2}{4}-k$$

원이 되려면 $\frac{k^2}{4}-k>0$ 이 성립해야 한다.

$\Rightarrow \quad \frac{1}{4}(k-4)k>0$

$\Rightarrow \quad k<0$ 또는 $k>4$

21. 중심이 직선 $y = x + 3$ $(x > 0)$ 위에 있고, 점 $(1,\ 2)$를 지나며 또 x 축에 접하는 원의 반지름은?

① 2　　② 5　　③ 10　　④ 12　　⑤ 15

해설

중심을 $(a,\ a+3)$ 이라 하면 반지름이
$a+3$ 이므로 원의 방정식은
$(x-a)^2 + (y-a-3)^2 = (a+3)^2$ ……㉠
㉠이 점 $(1,\ 2)$ 를 지나므로
$(1-a)^2 + (2-a-3)^2 = (a+3)^2 \Rightarrow\ a^2 - 6a - 7 = 0$
$\Rightarrow\ (a+1)(a-7) = 0$
$\Rightarrow\ a = 7 \quad (\because\ x > 0\ \Rightarrow\ a > 0)$
$\therefore$ 반지름 : $a + 3 = 7 + 3 = 10$

22. 다음 원 $x^2+y^2=9$와 직선 $y=x+5$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 0 개

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면,

$$\frac{|5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}>3$$

반지름보다 크므로 원과 직선은 만나지 않는다.

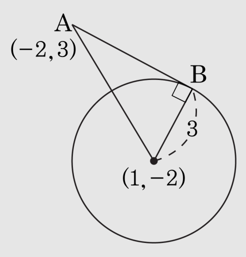
23. 점 A$(-2,\ 3)$ 에서 원 $x^2+y^2-2x+4y-4=0$에 그은 접선의 접점을 B라 할 때, AB의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x^2+y^2-2x+4y-4=0$
$(x-1)^2+(y+2)^2=3^2$
원의 중심은 $(1,\ -2)$, 반지름은 3이므로
$\overline{AB} = \sqrt{(3^2+(-5)^2)-3^2} = 5$



24. $y = x^2 - 2x + 3$ 을 평행이동 $f : (x, y) \to (x+2, y-1)$ 에 의하여 옮겨진 도형의 방정식은?

① $y = x^2 + 2x + 4$ ② $y = x^2 + 2x + 2$

③ $y = x^2 + 2x + 3$ ④ $y = x^2 - 6x + 8$

⑤ $y = x^2 - 6x + 10$

해설

$f : (x, y) \quad \to \quad (x + 2, y - 1)$ 에서
$x + 2 = x', y - 1 = y'$ 라 하자.
$x = x' - 2 \quad y = y' + 1$ 을 주어진 식에 대입하면,
$y' + 1 = (x' - 2)^2 - 2(x' - 2) + 3$
$y' = x'^2 - 6x' + 10$ 에서 $y = x^2 - 6x + 10$

25. 직선 $3x+4y-5=0$ 를 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동시켰을 때, 이 직선의 y 절편의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ 3 ④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ -8

해설

직선 $3x+4y-5=0$ 를
x 축의 방향으로 2 만큼,
y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동시키면
$3(x-2)+4(y+3)-5=0$ 으로 나타낼 수 있다.
이 식을 정리하면 $3x+4y+1=0$
따라서 이 직선의 y 절편의 값은 $-\frac{1}{4}$ 이다.

26. $y=x^2-2$ 를 x 축에 대하여 대칭 이동시킨 도형의 방정식은?

① $y=-x^2+2$ ② $y=-x^2+3$ ③ $y=x^2+2$
④ $y=2x^2+2$ ⑤ $y=3x^2+2$

해설

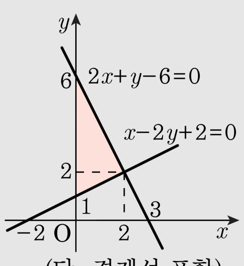
$y=ax^2+b$ 를 x 축에 대하여 대칭 이동시킨 도형의 방정식
$y=-ax^2-b$
$y=x^2-2$ 를
x 축에 대하여 대칭 이동시킨 도형의 방정식은
$-y=x^2-2$
$\therefore y=-x^2+2$

27. 세 부등식 $x \geq 0, x - 2y + 2 \leq 0, 2x + y - 6 \leq 0$을 동시에 만족하는 영역의 넓이는?

① 5　　② $\frac{11}{2}$　　③ 6　　④ $\frac{13}{2}$　　⑤ 7

해설

주어진 세 부등식을 동시에 만족하는 영역은 다음 그림의 색칠된 부분이다.
이 때, 두 직선 $x-2y+2=0$, $2x+y-6=0$의 교점은
점 $(2,\ 2)$이므로 어두운 부분의 넓이는
$\frac{1}{2} \times 5 \times 2 = 5$



(단, 경계선 포함)

28. 「m, n 을 서로소인 자연수라 할 때, 좌표평면위의 두 점 P(m, 0) , Q(0, n) 을 잇는 선분 PQ 위에는 x 좌표, y 좌표가 모두 자연수인 점이 존재하지 않는다.」를 다음과 같이 증명하였다.

<증명>

두 점 P, Q 를 지나는 직선의 방정식은
$\boxed{(가)}$ 이다. 따라서 $nx + my = mn$ $(0 < x < m,\ 0 < y < n)$ 을
만족하는 자연수 x, y 가 존재한다고 가정하면 $my = n(m - x)$
좌변이 m 의 배수이므로 우변도 m 의 배수이고,
m, n 이 서로소이므로
$\boxed{(나)}$는 m 의 배수가 된다.
이것은 $0 < m - x <$ $\boxed{(다)}$에 모순이다.

위의 증명에서 (가), (나), (다) 에 알맞은 것은?

① $nx + my = 1,\ \ m - x,\ \ m$
② $nx + my = 1,\ \ m + x,\ \ 2m$
③ $\dfrac{x}{m} + \dfrac{y}{n} = 1,\ \ m - x,\ \ m$
④ $\dfrac{x}{m} + \dfrac{y}{n} = 1,\ \ m + x,\ \ 2m$
⑤ $nx + my = 1,\ \ m + x,\ \ n$

해설

두 점 P, Q 를 지나는 직선의 x 절편, y 절편이
각각 m, n 이므로
$\dfrac{x}{m} + \dfrac{y}{n} = 1 \Leftrightarrow nx + my = mn$ …… ㉠
㉠을 만족하는 자연수 x, y 가
존재한다고 가정하면
$my = n(m - x)$ 에서 m, n 이 서로소이므로
$m - x$ 는 m 의 배수가 된다.
이것은 $0 < m - x < m$ 에 모순이다.

29. x, y에 관한 이차방정식 $2x^2-3xy+ay^2-2x+9y+b=0$이 직교하는 두 직선의 곱을 나타낼 때, ab를 구하면?

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

해설

준식이 나타내는 두 직선을
$px+qy+r=0 \cdots$ ㉠ ,
$p'x+q'y+r'=0 \cdots$ ㉡이라 하자.
㉠과 ㉡은 서로 직교하므로
$pp'+qq'=0$이다.
(준식)$=(px+qy+r)(p'x+q'y+r')=0$의
전개식에서 x^2의 계수와 y^2의 계수의 합은
$pp'+qq'$이므로 $a+2=pp'+qq'=0$
$\therefore\ a=-2$
$a=-2$를 준식에 대입하여 정리하면
(준식)
$=2x^2-(3y+2)x+(-2y^2+9y+b)=0 \cdots$ ㉢
㉢이 두 직선의 곱을 나타내므로
㉢의 판별식 $\mathrm{D}_1=(3y+2)^2-8(-2y^2+9y+b)$
$=25y^2-60y+(4-8b) \cdots$ ㉣이 완전제곱식이다.
따라서 ㉣의 판별식 $\frac{\mathrm{D}_2}{4}$는 0이다.
$\frac{\mathrm{D}_2}{4}=30^2-25(4-8b)=0$
$\therefore\ b=-4$
$\therefore\ ab=(-2)\cdot(-4)=8$

30. 두 직선 $2x-3y+3=0,\ 2x-3y-10=0$사이의 거리는?

① $\frac{\sqrt{13}}{13}$　　② 1　　③ $\sqrt{13}$

④ 13　　⑤ $13\sqrt{13}$

해설

두 직선이 평행하므로 한 직선 위의 임의의 점에서
다른 직선에 이르는 거리는 항상 일정하다.
$2x-3y+3=0$ 위의 임의의 한 점 $(0,\ 1)$에서
직선 $2x-3y-10=0$에 이르는 거리는
$\frac{|-3-10|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{13}{\sqrt{13}}=\sqrt{13}$

31. 중심 C 가 직선 $y = 2x + 1$ 위에 있고 두 점 $(2,\ 1)$, $(6,\ 5)$ 를 지나는 원의 면적은?

① 10π　② 12π　③ 14π　④ 16π　⑤ 18π

해설

구하는 원을
$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0 \cdots\cdots$①라 두면
①은 $(2,\ 1)$, $(6,\ 5)$ 를 지나므로
$4 + 1 + 4A + 2B + C = 0 \cdots\cdots\cdots$②
$36 + 25 + 12A + 10B + C = 0 \cdots\cdots\cdots$③
또한 ①의 중심은 $(-A,\ -B)$ 이므로
$-B = 2 \cdot (-A) + 1 \cdots\cdots\cdots$④
②, ③, ④에서 $A = -2,\ B = -5,\ C = 13$ 이고
①의 반지름의 길이는 $\sqrt{A^2 + B^2 - C} = \sqrt{16}$
구하는 원의 면적은 16π

해설

중심 $C(a, 2a + 1)$ 이라 하면
$(x - a)^2 + (y - 2a - 1)^2 = r^2$
$(2,\ 1)$, $(6,\ 5)$ 를 지나므로 각각 대입하면
$(2 - a)^2 + (1 - 2a - 1)^2 = r^2 \cdots$①
$(6 - a)^2 + (5 - 2a - 1)^2 = r^2 \cdots$②
①, ②를 연립해서 풀면 $a = 2$, ①에 대입하면 $r = 4$

32. 좌표평면 위에 원 $(x+1)^2+(y+2)^2=5$ 이 있다.
이 원 밖의 임의의 한 점에서 두 접선을 그었을 때, 두 접선이 직교하는 점들의 자취방정식의 자취의 길이는?

① π ② 5π ③ $\sqrt{10}\pi$

④ $2\sqrt{10}\pi$ ⑤ 10π

해설

주어진 원은 중심이 $(-1,-2)$ 이고 반지름이 $\sqrt{5}$ 인 원이다.
원 밖의 한 점 $P(a,b)$ 에서 원에 그은 접선이 서로 수직이려면 원의 중심에서 P 까지의
거리가 $\sqrt{10}$ 이어야 한다.
따라서 두 접선이 직교하는 접들의 자취의 방정식은 $(x+1)^2+(y+2)^2=10$

33. 두 원 $x^2+y^2-5=0$, $x^2+y^2-3x-y-4=0$ 의 교점과 점$(1,1)$을 지나는 원의 방정식이 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ 일 때, $A+B-C$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$x^2+y^2-5=0$, $x^2+y^2-3x-y-4=0$
교점을 지나는 원의 방정식은
$(x^2+y^2-5)m+x^2+y^2-3x-y-4=0$
의 꼴이고, 이 원이 점 $(1,1)$을지나므로
$(1+1-5)m+1+1-3-1-4=0$
$\therefore m=-2$
이 값을 대입하고 정리하면
$x^2+y^2+3x+y-6=0$ 이다.
$\therefore A=3,\ B=1,\ C=-6$
그러므로 $A+B-C=10$

34. 두 원 $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2-6x+6y=7$ 의 공통현의 길이를 구하면?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

해설

두 원의 교점을 P, Q 라 하고 $\overline{PQ}$ 의 중점을 H 라 하면
$\triangle$OPH 는 직각삼각형이고,
$\overline{OP}$ 의 길이는 원 $x^2+y^2=1$ 의 반지름이므로 1 이다.
두 원의 공통현의 방정식은
$(x^2+y^2-1)-(x^2+y^2-6x+6y-7)=0$,
즉 $x-y+1=0$ ⋯⋯㉠
원 $x^2+y^2=1$ 의 중심 O(0, 0) 에서
직선 ㉠에 이르는 거리

$$\overline{OH}=\frac{|0-0+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\ \overline{PH}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{OH}^2}$$
$$=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore\ \overline{PQ}=2\overline{PH}=\sqrt{2}$$

35. 두 원 $x^2+y^2=1$, $(x-3)^2+(y+4)^2=r^2$ 의 공통접선이 모두 4 개가 되도록 하는 자연수 r 의 개수는?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

두 원의 공통접선이 4 개가 되려면 두 원의
위치 관계는 서로 다른 원의 외부에 있어야 한다.
이 때, $x^2+y^2=1$ 은 중심이 $(0,0)$,
반지름의 길이가 1 인 원이고
$(x-3)^2+(y+4)^2=r^2$ 은 중심이 $(3,-4)$,
반지름의 길이가 r 인 원이므로
$\sqrt{3^2+(-4)^2}>1+r$
$5>1+r$
$\therefore 0<r<4$
따라서, 자연수 r 은 $1,2,3$ 으로 모두 3개이다.

36. 다음 두 원 $x^2+y^2=9$ 와 $(x-12)^2+(y-5)^2=25$ 의 공통외접선과 공통내접선의 길이를 각각 구하면?

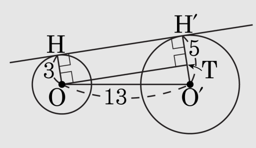
① $\sqrt{91}$, $\sqrt{103}$　　② $\sqrt{161}$, $\sqrt{145}$　　③ $\sqrt{165}$, $\sqrt{105}$

④ $\sqrt{151}$, $\sqrt{101}$　　⑤ $\sqrt{127}$, $\sqrt{105}$

해설

두 원의 반지름의 길이는 각각 $3, 5$ 이고,
두 원의 중심을 각각 O, O' 이라고 할 때,
$\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{O}'(12,5)$ 이므로
중심거리는 $\sqrt{12^2+5^2}=13$ 이다.

(i) 다음 그림과 같이 점 O 에서 $\overline{\mathrm{O'H'}}$ 에 내린 수선의 발을 T 라고 하면

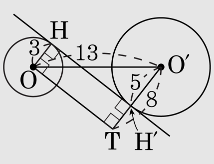


$\overline{\mathrm{TH'}}=\overline{\mathrm{OH}}=3$ 이므로
$\overline{\mathrm{O'T}}=5-3=2$
한편, $\triangle\mathrm{OTO'}$ 은 직각삼각형이므로
피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{OT}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OO'}}^2-\overline{\mathrm{O'T}}^2}=\sqrt{13^2-2^2}=\sqrt{165}$

이때, $\overline{\mathrm{HH'}}=\overline{\mathrm{OT}}$ 이므로
구하는 공통외접선의 길이는 $\sqrt{165}$

(ii) 다음 그림과 같이 점 O 에서 $\overline{\mathrm{O'H'}}$ 의 연장선에 내린 수선의 발을 T 라고 하면



$\overline{\mathrm{TH'}}=\overline{\mathrm{OH}}=3$ 이므로 $\overline{\mathrm{O'T}}=5+3=8$
한편, $\triangle\mathrm{OTO'}$ 은 직각삼각형이므로 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{OT}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OO'}}^2-\overline{\mathrm{O'T}}^2}=\sqrt{13^2-8^2}=\sqrt{105}$

이 때, $\overline{\mathrm{HH'}}=\overline{\mathrm{OT}}$ 이므로 구하는 공통내접선의 길이는 $\sqrt{105}$

37. 다음 원과 직선의 교점의 개수를 구하여라.

$x^2+y^2-2x+4y+1=0,\quad 3x-4y+6=0$

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 0개

해설

원의 방정식을 표준형으로 나타내면

$(x-1)^2+(y+2)^2=2^2$

따라서 , 원의 중심 $(1,-2)$ 에서 직선

$3x-4y+6=0$ 까지의 거리 d 는

$d=\dfrac{|17|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{17}{5}$

이때, $\dfrac{17}{5}>2$ 이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

$\therefore$ 교점의 개수 : 0 개

38. 점 $(3,\ -1)$에서 원 $x^2+y^2=5$에 그은 접선의 방정식 중 기울기가 음수인 것의 y절편을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $(3,\ -1)$을 지나고 접선의 기울기를 m이라고 하면
접선은 $y+1=m(x-3)\cdots$①
따라서 원의 중심$(0,0)$에서 직선
$mx-y-3m-1=0$과의 거리가
원의 반지름 $\sqrt{5}$와 같다.
$\frac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$, $|-3m-1|=\sqrt{5}\sqrt{m^2+1}$
양변을 제곱하면
$9m^2+6m+1=5m^2+5$, $4m^2+6m-4=0$
따라서, 기울기 $m=\frac{1}{2}, -2$
여기서 기울기가 음수인 -2를 ①에 대입하면
$y=-2x+5$
따라서 y절편은 5이다.

39. 점 $(a,\ 5)$ 가 곡선 $y = 2x^2 - 2x + 1$ 의 위 또는 윗부분에 있을 때, 상수 a 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

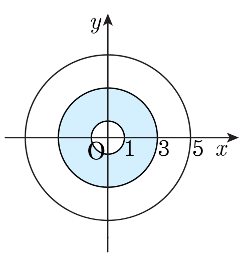
▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

점$(a,\ 5)$ 가 부등식 $y \geq 2x^2 - 2x + 1$ 이 나타내는 영역에 포함되어야 한다.
$5 \geq 2a^2 - 2a + 1,\ 2a^2 - 2a - 4 \leq 0$
$a^2 - a - 2 \leq 0,\ (a+1)(a-2) \leq 0$
$\therefore\ -1 \leq a \leq 2$
a 의 최댓값은 2 이고, 최솟값은 -1 이다.
$\therefore\ 2 + (-1) = 1$

40. 다음 그림은 다트 판을 직교좌표계에 올려놓은 것이다. 부등식 $x^2+y^2 \le 1$ 의 영역을 A, 부등식$1 < x^2+y^2 \le 9$ 의 영역을 B, 부등식 $9 < x^2+y^2 \le 25$ 의 영역을 C 라 할 때, A 에 맞추면 10 점, B 에 맞추면 9 점, C 에 맞추면 8 점이라고 한다. 한 사람이 다트를 5 회 던졌을 때 꽂힌 지점의 위치가 다음과 같다고 할 때, 획득 점수의 평균을 구하여라.



$(0,\ 0)$, $(1,\ \sqrt{2})$, $(3,\ \pi)$, $\left(3,\ \frac{1}{2}\right)$, $(4,\ \sqrt{2}+1)$

▶ 답 :

▷ 정답 : 8.6

해설

$(0,\ 0)$ 은 $0^2+0^2 \le 1$, A 이므로 10 점,
$(1,\ \sqrt{2})$ 은 $1 < 1^2+(\sqrt{2})^2 \le 9$, B 이므로 9 점
같은 방법으로, $(3,\ \pi)$ 는 C 이므로 8 점,
$\left(3,\ \frac{1}{2}\right)$, $(4,\ \sqrt{2}+1)$ 은 C 이므로 8 점
$\therefore$ 총합은 $10+9+8+8+8=43$ 점,
평균은 8.6 점

41. 세 점 $O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(2,-2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB의 외심의 좌표를 $P(a,b)$라 할 때, a^2-b^2을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

외심(외접원의 중심)은 세 꼭지점으로부터 거리가 같은 점이므로

$\overline{PO}^2=\overline{PA}^2$ 으로부터

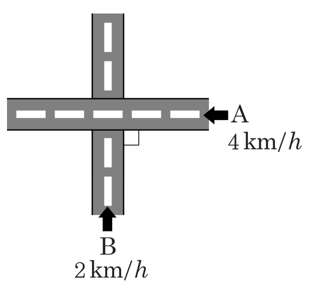
$a^2+b^2=(a-1)^2+(b-1)^2,\ a+b=1\cdots㉠$

$\overline{PO}^2=\overline{PB}^2$ 으로부터

$a^2+b^2=(a-2)^2+(b+2)^2,\ a-b=2\cdots㉡$

㉠, ㉡로 부터 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)=1\times2=2$

42. 그림과 같이 수직으로 만나는 도로가 있다. 교차점에서 A는 동쪽으로 6 km, B는 남쪽으로 4 km지점에 있다. 지금 A는 시속 4 km의 속도로 서쪽으로, B는 시속 2 km의 속도로 북쪽을 향하여 동시에 출발했을 때 A, B 사이의 거리가 가장 짧을 때는 출발 후 몇 시간 후인가?



① 1 시간 후　② 1.2 시간 후　③ 1.4 시간 후　④ 1.6 시간 후　⑤ 2 시간 후

해설

동서를 x 축, 남북을 y 축으로 잡으면
최초의 A, B 의 위치는 A(6, 0) , B(0, −4) 이고
t 시간 후의 A, B 의 좌표는
$A(6-4t,\ 0),\ B(0, -4+2t)$ 이다.
따라서 t 시간 후의 $\overline{AB}$ 의 거리는 s 는

$$s = \sqrt{(6-4t)^2 + (-4+2t)^2}$$
$$= \sqrt{20t^2 - 64t + 52}$$
$$= \sqrt{20\left(t^2 - \frac{64}{20}t\right) + 52}$$
$$= \sqrt{20\left(t - \frac{8}{5}\right)^2 + \frac{4}{5}}$$ 이므로

$t = \frac{8}{5}$ 일 때 최소가 된다.
∴ 출발 후 1.6 시간 후이다.

43. 두 점 A$(-2,\ 0)$, B$(2,\ 0)$ 에서의 거리의 비가 $3\ :\ 1$ 인 점의 자취위의 점 P 라 할 때, $\triangle$ABP 의 넓이의 최댓값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\overline{\mathrm{AP}} = \sqrt{(x+2)^2+y^2}$

$\overline{\mathrm{BP}} = \sqrt{(x-2)^2+y^2}$

$\overline{\mathrm{AP}}\ :\ \overline{\mathrm{BP}} = 3\ :\ 1$ 이므로

$\overline{\mathrm{AP}} = 3\overline{\mathrm{BP}} \rightarrow \overline{\mathrm{AP}}^2 = 9\overline{\mathrm{BP}}^2$

따라서, $(x+2)^2+y^2 = 9(x-2)^2+9y^2$

$\rightarrow x^2+4x+4+y^2 = 9x^2-36x+36+9y^2$

$\rightarrow\ 8x^2+8y^2-40x+32=0$

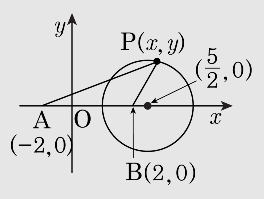
$\rightarrow\ x^2+y^2-5x+4=0$

$$\rightarrow \left(x-\frac{5}{2}\right)^2+y^2-\frac{25}{4}+4=0$$

$$\rightarrow \left(x-\frac{5}{2}\right)^2+y^2=\frac{9}{4}$$

즉, 중심이 $\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$ 이고

반지름의 길이가 $\frac{3}{2}$ 인 원이다.



$\therefore$ 넓이 S 의 최댓값 $= \frac{1}{2}\times 4\times\frac{3}{2} = 3$

44. 두 원 $(x-a)^2+y^2=4$, $x^2+(y-b)^2=9$가 서로 외접할 때, 점 $(a,\ b)$가 그리는 도형에 대한 설명 중 옳은 것은?

① 이 도형에 내접하는 정사각형의 한 변의 길이는 12이다.

② 이 도형에 내접하는 정삼각형의 한 변의 길이는 $6\sqrt{3}$이다.

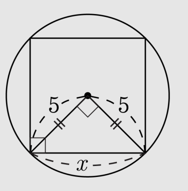
③ 두 종류의 두형이 나타난다.

④ 이 도형의 길이는 10π이다.

⑤ 원점을 지나는 원이다.

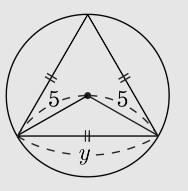
해설

두 원이 서로 외접할 조건은 두 원의 중심을 연결한 선분의 길이가 두 원의 반지름들의 합과 같으면 된다.
원 $(x-a)^2+y^2=4$에서 중심은 $(a,\ 0)$, 반지름은 2이고, 원 $x^2+(y-b)^2=9$에서 중심은 $(0,\ b)$, 반지름은 3이다.
따라서, $(a,\ 0)$과 $(0,\ b)$ 사이의 거리가 5가 되므로 $\sqrt{a^2+b^2}=5$
$\therefore a^2+b^2=25$
그러므로 구하려는 자취는 $x^2+y^2=25$
① 내접하는 정사각형의 한 변의 길이를 x라 하면



$2x^2=10 \therefore\ x=5\sqrt{2}$

② 내접하는 정삼각형의 한 변의 길이를 y라 하면



$y=\frac{5}{2}\sqrt{3}\times 2=5\sqrt{3}$

$\therefore\ y=5\sqrt{3}$ 이다.

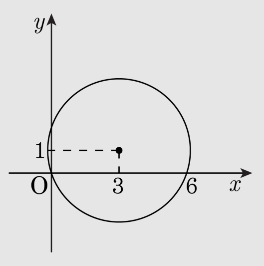
45. 원 $x^2+y^2-2x-6y=0$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 도형에 의하여 x 축이 잘렸을 때, 잘린 선분의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

원 $x^2+y^2-2x-6y=0$ 을 표준형으로 고치면,
$(x-1)^2+(y-3)^2=10$,
이 원을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하면,
$(x-3)^2+(y-1)^2=10$ $\cdots$ ㉠



㉠의 그래프는 다음 그림과 같으므로
$y=0$ 일 때의 x 의 값을 구하면
$(x-3)^2+(0-1)^2=10$ 에서
$x^2-6x=0$, $x(x-6)=0$
$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=6$
따라서 잘린 선분의 길이는 6 이다.

46. 직선 $x-3y+1=0$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 후 직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭이동한 직선이 원 $(x-m)^2+(y-n)^2=5$ 의 넓이를 이등분할 때, $3m+n$ 의 값은?

① 1　② 3　③ 5　④ 7　⑤ 9

해설

$x-3y+1=0$ 의 x 축 대칭 $(y \to -y)$

$\to\ \ x+3y+1=0$

$x+3y+1=0$ 의 $y=-x$ 축 대칭 $(x \to -y,\ y \to -x)$

$\to\ \ -y-3x+1=0,\ \ y=-3x+1$

이 직선이 $(x-m)^2+(y-m)^2=5$ 의 넓이를

이등분하므로 $(m,\ n)$ 을 지난다.

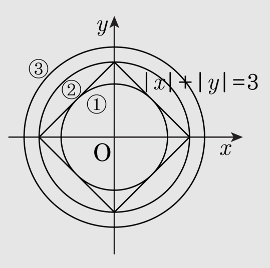
$\therefore\ \ 3m+n=1$

47. $|x|+|y| \leq 3$, $x^2+y^2 \geq r^2$를 동시에 만족하는 $(x,\ y)$가 존재하지 않는다고 할 때, r의 최댓값은?

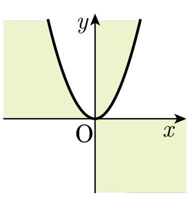
① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$|x|+|y| \leq 3$는 아래 그림의 정사각형의 내부이고
$x^2+y^2 \geq r^2$는 중심이 $(0,\ 0)$ 이고 반지름이 r 인 원의 외부이다.
부등식 $|x|+|y| < 3$ 의 영역은 마름모의 내부이다.
$(x,\ y)$가 존재하는 경우는 ①, ② 이고,
③의 경우는 $(x,\ y)$가 존재하지 않는다.
점 $(0,\ 3)$ 을 지날 때, 반지름이 최대이다.
따라서 r 의 최댓값은 3 이다.



48. 다음 그림의 빗금 칠한 부분을 나타내는 부등식으로 알맞은 것은?



① $xy \le 0$ 이고, $y \ge x^2$

② $xy \ge 0$ 이고, $y \le x^2$

③ $y - x^2 \le 0$

④ $xy(x^2 - y) \ge 0$

⑤ $xy(x^2 - y) \le 0$

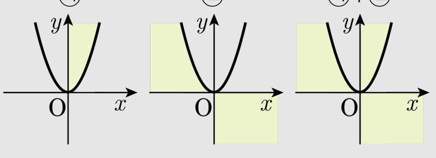
해설

⑤ $xy(x^2 - y) \le 0 \cdots$ ㉠ + ㉡

$\Rightarrow \{xy \ge 0,\ x^2 - y \le 0\} \cdots$ ㉠

$\{xy \le 0,\ x^2 - y \ge 0\} \cdots$ ㉡

㉠ ㉡ ㉠+㉡

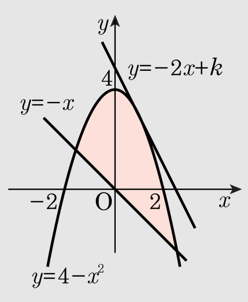


49. 부등식 $-x \le y \le 4-x^2$ 을 만족시키는 실수 x, y 에 대하여 $2x+y$ 의 최댓값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

부등식 $-x \le y \le 4-x^2$ 의 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다.



$2x+y=k$ 라 하고 움직여보면 직선 $y=-2x+k$ 가 포물선 $y=-x^2+4$ 에 접할 때 k 의 값은 최대가 되므로 방정식 $x^2-2x-4+k=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $\frac{D}{4}=1^2+4-k=0$ $\quad \therefore k=5$

따라서 $2x+y$ 의 최댓값은 5 이다.

50. 영희가 A 과자 한 개를 만드는 데 설탕 $1\,\mathrm{g}$, 밀가루 $3\,\mathrm{g}$ 이 필요하고, B 과자 한 개를 만드는 데 설탕 $2\,\mathrm{g}$, 밀가루 $2\,\mathrm{g}$ 이 필요하다고 한다. 영희가 설탕 $80\,\mathrm{g}$ 과 밀가루 $120\,\mathrm{g}$ 을 가지고 최대로 만들 수 있는 A 과자와 B 과자의 총 개수는?

① 40 개　② 45 개　③ 50 개　④ 55 개　⑤ 60 개

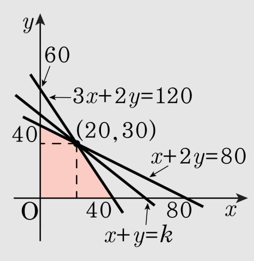
해설

A 과자를 x 개, B 과자를 y 개 만든다고 하면, $x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+2y \leq 80,\ 3x+2y \leq 120$ 이다.

	설탕	밀가루	개수
A과자	1 g	3 g	x개
B과자	2 g	2 g	y개
제한량	80 g	120 g	

이 연립부등식의 영역을 그림으로 나타내면 다음 그림의 어두운 부분이다. 과자의 총 개수를 k 라 하면, $x+y=k$

k 의 값이 최대가 되는 경우는 직선 $x+y=k$ 가 두 직선 $x+2y=80,\ 3x+2y=120$ 의 교점 $(20,\ 30)$ 을 지날 때이다.



따라서 만들 수 있는 과자 개수의 최댓값은

$20+30=50$