1. 다음 방정식의 모든 근의 합을 구하여라.

$$x^3 - 13x + 12 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & -13 & 12 \\ & & 1 & 1 & -12 \\ \hline & 1 & 1 & -12 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x) = x^3 - 13x + 12$라고 하면 $f(1) = 0$이므로
$(x-1)(x^2+x-12) = 0$
$(x-1)(x+4)(x-3) = 0$
$\therefore\ x = -4$ 또는 $x = 1$ 또는 $x = 3$
$\therefore\ -4 + 1 + 3 = 0$

2. 이차부등식 $x^2 + ax + b < 0$의 해가 $2 < x < 3$일 때, $a + b$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$2 < x < 3$ 가 해이므로

$(x-2)(x-3) < 0$

$x^2 - 5x + 6 < 0$, $a = -5, b = 6$

$\therefore\ a + b = 1$

3. 세 점 A $(-1, 1)$, B $(-3, -2)$, C $(2, -1)$에 대하여 사각형 ABCD가 평행사변형이 되도록 D의 좌표를 정하면?

① $(4, 2)$ ② $(2, 4)$ ③ $(3, 5)$
④ $(5, 3)$ ⑤ $(1, -5)$

해설

D (a, b)라 두면 평행사변형의 성질로부터
대각선 $\overline{AD}$의 중점과 $\overline{BC}$의 중점은 일치한다.

$\therefore \left(\frac{1}{2}, 0\right) = \left(\frac{a-3}{2}, \frac{b-2}{2}\right)$

$\therefore a = 4, b = 2$

4. 원 $x^2+y^2-4x+6y-1=0$ 과 같은 중심을 갖고, 점 $(1,\ 2)$ 를 지나는 원의 반지름을 r 이라 할 때, r^2 의 값을 구하여라.

▶ 답：

▷ 정답： 26

해설

준 식에서 $(x-2)^2+(y+3)^2=14$ 이므로
중심은 $(2,\ -3)$ 이다.
구하는 원의 반지름을 r 라 하면
$(x-2)^2+(y+3)^2=r^2$ 이고,
이 원이 점 $(1,\ 2)$ 를 지나므로
$(1-2)^2+(2+3)^2=r^2$
$\therefore r^2=26$

5. 방정식 $x^2 + y^2 + kx - 2y + 10 = 0$ 이 원을 나타낼 때, k 의 범위를 구하면?

① $-4 < k < 5$

② $k < -4$ 또는 $k > 5$

③ $-6 < k < 6$

④ $k < -6$ 또는 $k > 6$

⑤ $-4 < k < 6$

해설

준 식 : $\left(x + \frac{k}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{k^2}{4} - 9$

중심이 $\left(-\frac{k}{2}, 1\right)$,

반지름이 $\sqrt{\frac{k^2}{4} - 9}$ 인 원이 되려면

$\frac{k^2}{4} - 9 > 0$

$\therefore\ k^2 - 36 > 0$

$\therefore\ (k+6)(k-6) > 0$

$\therefore\ k < -6$ 또는 $k > 6$

6. 점 A(−2, 3) 에서 원 $x^2+y^2-2x+4y-4=0$에 그은 접선의 접점을 B라 할 때, AB의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

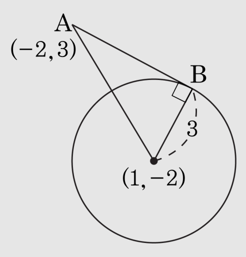
해설

$x^2+y^2-2x+4y-4=0$

$(x-1)^2+(y+2)^2=3^2$

원의 중심은 (1, −2), 반지름은 3이므로

$\overline{AB} = \sqrt{(3^2+(-5)^2)-3^2} = 5$



7. 점 P (2, 1) 을 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 Q, 원점에 대하여 대칭이동한 점을 R 라 할 때, 세 점 P, Q, R 를 세 꼭짓점으로 하는 $\triangle$PQR 의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

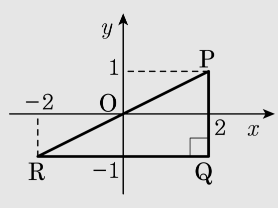
해설

점 P (2, 1) 을 x 축에 대하여 대칭이동한

점 Q 는 Q (2, −1)

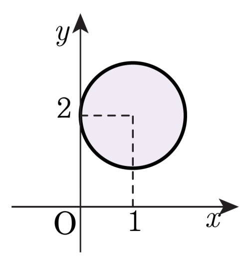
또, 점 P (2, 1) 을 원점에 대하여 대칭이동한 점 R 는 R (−2, −1)

따라서, 다음 그림에서 세 점 P (2, 1) , Q (2, −1) , R (−2, −1) 을 꼭짓점으로 하는$\triangle$PQR 의 넓이는



$\frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$

8. 다음 그림의 색칠한 부분의 영역을 부등식으로 바르게 나타낸 것은?(단, 경계선은 포함한다.)



① $(x+1)^2+(y+2)^2 \le 1$
② $(x-2)^2+(y-1)^2 \ge 1$
③ $(x-2)^2+(y-1)^2 \le 1$
④ $(x-1)^2+(y-2)^2 \ge 1$
⑤ $(x-1)^2+(y-2)^2 \le 1$

해설

$(x-1)^2+(y-2)^2=1$ (경계선) 의 내부이므로 $(x-1)^2+(y-2)^2 \le 1$

9. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=5 \\ y+z=6 \\ z+x=7 \end{cases}$ 의 해를 $x=\alpha,\ y=\beta,\ z=\gamma$ 라 할 때, 곱 $\alpha\beta\gamma$ 의 값을 구하면?

① 18 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 30

해설

주어진 세 식을 합하면 $2\cdot(x+y+z)=18$

$\therefore\ \alpha+\beta+\gamma=9$

$\begin{cases} \alpha=9-(\beta+\gamma)=9-6=3 \\ \beta=9-(\alpha+\gamma)=9-7=2 \\ \gamma=9-(\alpha+\beta)=9-5=4 \end{cases}$

$\therefore\ \alpha\beta\gamma=3\cdot2\cdot4=24$

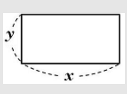
10. 가로의 길이가 세로의 길이보다 5 cm 더 긴 직사각형이 있다. 둘레의 길이가 34 cm 일 때, 이 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이의 곱을 구하여라.(단, 단위 생략)

▶ 답 :

▷ 정답 : 66

해설

직사각형의 가로, 세로의 길이를
각각 $x$cm, $y$cm 라 하면



$x = y + 5 \quad \cdots\cdots$ ㉠
또, 이 직사각형의 둘레는 $2(x + y)$ 이므로
$2(x + y) = 34$ 즉, $x + y = 17 \quad \cdots\cdots$ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$y + 5 + y = 17$, $2y = 12$
$\therefore\ y = 6$
$y = 6$ 을 ㉠에 대입하면 $x = 11$
$\therefore\ xy = 11 \times 6 = 66$

11. 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 2(a-5)x + 2(3a-19)$ 가 양수가 되기 위한 a 의 정수값은 얼마인가?

① 7　　② 8　　③ 9　　④ 10　　⑤ 11

해설

$x^2 + 2(a-5)x + 2(3a-19)$ 가 양수가 되려면
판별식이 $D < 0$ 이이어야 하므로
$\frac{D}{4} = (a-5)^2 - 2(3a-19) < 0$
$a^2 - 10a + 25 - 6a + 38 < 0$, $a^2 - 16a + 63 < 0$
$(a-9)(a-7) < 0$
$\therefore\ 7 < a < 9$
따라서 정수a 의 값은 8 이다.

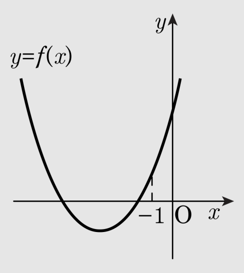
12. x 에 대한 이차방정식 $x^2-2kx+6-k=0$ 의 서로 다른 두 근이 모두 -1 보다 작을 때, 정수 k 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 3 개

해설

$f(x)=x^2-2kx+6-k$ 라 하면
방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 두 근이 -1 보다 작으므로



(i) $\frac{D}{4}=(-k)^2-(6-k)>0$ 에서
$k^2+k-6>0,\ (k+3)(k-2)>0$
$\therefore\ k<-3$ 또는 $k>2$

(ii) $f(-1)=1+2k+6-k>0$ 에서 $k>-7$

(iii) $-\frac{-2k}{2}<-1$ 에서 $k<-1$
이상에서 $-7<k<-3$
따라서 정수 k 는 $-6,\ -5,\ -4$ 의 3 개다.

13. 두 점 $A(1,\ 3)$, $B(4,\ 0)$ 을 지나는 직선에 수직이고 선분 AB 를 $1:2$ 로 외분하는 점을 지나는 직선의 방정식을 구하면 $y = ax + b$ 이다. $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = 9$

해설

직선 AB 의 기울기는 $\frac{0-3}{4-1} = -1$ 이므로
직선 AB 에 수직인 직선의 기울기는 1 이다.
또, 선분 AB 를 $1:2$ 로 외분하는 점의 좌표는
$\left(\frac{1\times 4 - 2\times 1}{1-2},\ \frac{1\times 0 - 2\times 3}{1-2}\right)$, 즉 $(-2, 6)$
따라서 구하는 직선은 기울기가 1 이고
점 $(-2,\ 6)$ 을 지나므로
$y - 6 = 1\cdot(x+2)$, $y = x + 8$
$a = 1$, $b = 8$ $\quad\therefore a + b = 9$

14. $ax-6y-2=0$, $2x-(2a-5)y-1=0$일 때,
두 식을 동시에 만족하는 $(x,\ y)$가 하나도 없도록 하는 a의 값은?(단, $a>0$)

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

두 식을 동시에 만족하는 $(x,\ y)$가 하나도 없도록 하기 위해서는 두 직선이 서로 평행해야한다.
직선 $ax-6y-2=0$는
$y=\frac{a}{6}x-\frac{1}{3}$ 이므로 기울기가 $\frac{a}{6}$ 이다.
$2x-(2a-5)y-1=0$는
$y=\frac{2}{2a-5}x-\frac{1}{2a-5}$ 이므로
기울기가 $\frac{2}{2a-5}$ 이다.
$\frac{a}{6}=\frac{2}{2a-5}$ 이므로
$2a^2-5a-12=0(2a+3)(a-4)=0$
$a=-\frac{3}{2}$ 또는 $a=4$
$\therefore a=4$

15. 이차방정식 $x^2-2x-6=0$ 의 두 근을 α,β 라 할 때, 원점에서 직선 $\alpha x+\beta y+10=0$ 까지의 거리를 구하시오.

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

이차방정식 $x^2-2x-6=0$ 의 두 근이 α,β이므로 근과 계수와의 관계에 의해

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-6$

$$l=\frac{|0+0+10|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}=\frac{10}{\sqrt{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}}=\frac{10}{\sqrt{16}}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$$

16. 직선 $3x - 4y - 12 = 0$ 에 수직이고 원 $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 1$ 에 접하는 접선의 방정식을 구하면?

① $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$ 또는 $y = -\frac{5}{2}x - \frac{1}{3}$
② $y = -2x - \frac{4}{3}$ 또는 $y = -\frac{4}{5}x - 1$
③ $y = -\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$ 또는 $y = -\frac{4}{3}x - \frac{11}{3}$
④ $y = -\frac{6}{5}x - \frac{2}{3}$ 또는 $y = -\frac{4}{7}x - \frac{9}{2}$
⑤ $y = -4x - 3$ 또는 $y = -9x - 6$

해설

$3x - 4y - 12 = 0$ 에서
$y = \frac{3}{4}x - 3 \cdots\cdots$ ㉠
이 때, 구하는 접선이 ㉠과 수직이므로
기울기가 $-\frac{4}{3}$ 인 직선의 방정식은
$y = -\frac{4}{3}x + b \cdots\cdots$ ㉡
로 놓을 수 있다.
㉡에서 $4x + 3y - 3b = 0$ 이고,
원의 중심 $(-3, 2)$ 에서 이 직선까지의 거리가
반지름의 길이와 같으므로
$\frac{|-12+6-3b|}{\sqrt{4^2+3^2}} = 1, |3b+6| = 5, 3b+6 = \pm 5$
$3b = -1$ 또는 $3b = -11$
$\therefore b = -\frac{1}{3}$ 또는 $b = -\frac{11}{3}$
이것을 ㉡에 대입하면 구하는 접선의 방정식은
$y = -\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$ 또는 $y = -\frac{4}{3}x - \frac{11}{3}$

해설

$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 1$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 6x - 4y + 12 = 0$ 이므로
㉡을 이 식에 대입하여 정리하면
$25x^2 + 6(17-4b)x + 9\left(b^2 - 4b + 12\right) = 0$
이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면
$\frac{D}{4} = \left\{3(17-4b)\right\}^2 - 25 \cdot 9\left(b^2 - 4b + 12\right) = 0$
$D = 0$ 에서 $9b^2 + 36b + 11 = 0,$
$(3b+1)(3b+11) = 0$
$\therefore b = -\frac{1}{3}$ 또는 $b = -\frac{11}{3}$ 이것을 ㉡ 에 대입하면
구하는 접선의 방정식은
$y = -\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$ 또는 $y = -\frac{4}{3}x - \frac{11}{3}$

17. 평행이동 $f\ :\ (x,\ y) \rightarrow (x+2,\ y-3)$에 의하여 직선 $x+2y-3=0$을 이동한 결과는 $x+2y+a=0$이다. 이 때, a의 값은?

① -2　　② -1　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

f는 x축의 방향으로 $+2$, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동 하는 변환이므로 $(x-2)+2(y+3)-3=0$ 으로 이동한다. 따라서 $a=1$

18. 방정식 $2x^4-5x^3+x^2-5x+2=0$의 모든 실근의 합을 a, 모든 허근의 곱을 b라 할 때, $a+b$의 값은?

① 5　　② 3　　③ $\frac{3}{2}$　　④ -2　　⑤ 4

해설

$2x^4-5x^3+x^2-5x+2=0$ 양변을
x^2 으로 나누고 정리하면

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0$$

$$2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$$

$$2t^2-5t-3=(2t+1)(t-3)=0$$

$$\left(2x+\frac{2}{x}+1\right)\left(x+\frac{1}{x}-3\right)=0$$

$\therefore (2x^2+x+2)(x^2-3x+1)=0$
이 때, $2x^2+x+2=0$은 허근을 갖고,
$x^2-3x+1=0$은 실근을 가지므로
실근의 합 $a=3$, 허근의 곱 $b=1$이다.
$\therefore a+b=4$

19. 계수가 실수인 사차방정식 $x^4+ax^3+bx^2+14x+15=0$의 한근이 $1+2i$일 때, 두 실수 $a,\ b$의 합 $a+b$의 값은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

한 근이 $1+2i$이면 $x=1+2i,\ \ x^2=-3+4i,\ \ x^3=-11-2i,\ \ x^4=-7-24i,$
$x^4+ax^3+bx^2+14x+15$
$=(-7-24i)+a(-11-2i)+b(-3+4i)+14(1+2i)+15=0,$
$(-11a-3b-7+14+15)+(-24-2a+4b+28)i$
$\therefore\ 11a+3b=22,\ -2a+4b=-4$
연립하여 풀면 $a=2, b=0$

해설

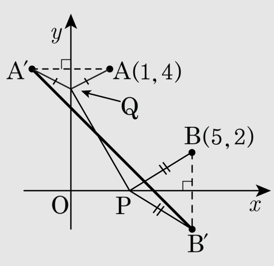
$x=1+2i$에서 $x^2-2x+5=0$
$x^4+ax^3+bx^2+14x+15=(x^2-2x+5)(x^2+kx+3)$
좌변을 전개하여 우변과 계수비교하면
$a=k-2,\ b=8-2k,\ 14=5k-6$
$\therefore\ \ k=4,\ a=2,\ b=0$

20. 두 점 $A(1, 4), B(5, 2)$ 에 대하여 점 P는 x축 위를 움직이고 점 Q는 y축 위를 움직일 때, $\overline{AQ}+\overline{PQ}+\overline{BP}$ 의 최솟값을 구하면?

① $2\sqrt{2}$ ② $3\sqrt{2}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ $5\sqrt{2}$ ⑤ $6\sqrt{2}$

해설

다음 그림과 같이 점 A를 y축에 대하여
대칭이동한 점을 A′, 점 B를
x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′ 이라고 하면



$A'(-1, 4), B'(5, -2)$

$$\therefore \overline{AQ}+\overline{PQ}+\overline{BP} = \overline{A'Q}+\overline{PQ}+\overline{B'P}$$
$$\geq \overline{A'B'}$$
$$= \sqrt{(5+1)^2+(-2-4)^2}$$
$$= \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

따라서 구하는 최솟값은 $6\sqrt{2}$이다.

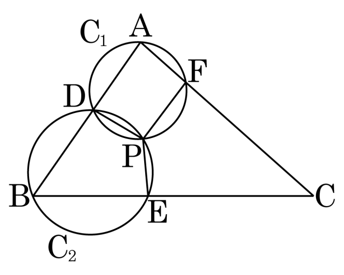
21. 점 $\mathrm{P(a,\ b)}$ 가 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위를 움직일 때, 점 $\mathrm{P(a,b)}$, $\mathrm{Q(a,0)}$, $\mathrm{O(0,0)}$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 최대 넓이는?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

해설

$a,\ b$ 의 부호와 상관 없으므로
$a > 0,\ b > 0$ 이라 하면
$\triangle \mathrm{POQ}$ 의 넓이 : $\frac{1}{2} \times a \times b = \frac{1}{2}ab$
P 가 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점 이므로 $a^2 + b^2 = 1$
산술기하조건을 이용하면,
$a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2 \times b^2} = 2ab$
$ab \leq \frac{1}{2}$
$\therefore$ 넓이의 최댓값 : $\frac{1}{4}$

22. 다음은 삼각형 ABC 의 각 꼭짓점을 지나는 원에 대한 어떤 성질을 설명한 것이다.



그림처럼 세 점 A, D, F 를 지나는 원 C_1 과 세 점 B, D, E 를 지나는 원 C_2 의 교점 P 가 삼각형 ABC 의 내부에 존재하도록 세 변 AB, BC, CA 위에 각각 점 D, E, F 를 잡는다.

$\angle DPF + \boxed{\text{가}} = 180°$

$\angle DPE + \boxed{\text{나}} = 180°$

$\angle DPF + \angle DPE = 360 - \left(\boxed{\text{가}} + \boxed{\text{나}}\right)$ 에서

$\angle FPE = \boxed{\text{가}} + \boxed{\text{나}}$

$\therefore\ \angle FPE + \angle C = 180°$

따라서 세 점 C, F, E 를 지나는 원을 C_3 라 할때, $\boxed{\quad\text{다}\quad}$

(가), (나), (다) 에 알맞은 것은?

① (가)$\angle A$, (나)$\angle B$, (다)C_1, C_2, C_3 은 한 점 P 에서 만난다.

② (가)$\angle B$, (나)$\angle A$, (다)C_1, C_2, C_3 은 한 점 P 에서 만난다.

③ (가)$\angle A$, (나)$\angle B$, (다)C_3 의 내부에 점 P 가 존재한다.

④ (가)$\angle B$, (나)$\angle A$, (다)C_3 의 내부에 점 P 가 존재한다.

⑤ (가)$\angle A$, (나)$\angle B$, (다)C_3 의 외부에 점 P 가 존재한다.

해설

□ADPF 에서 $\angle DPF + \angle A = 180°$

□BEPD 에서 $\angle DPE + \angle B = 180°$

따라서 $\angle DPF + \angle DPE = 360° - (\angle A + \angle B)$

$\angle FPE = \angle A + \angle B$

$\therefore\ \angle FPE + \angle C = 180°$

따라서 세 점 C, F, E 를 지나는 원을 C3 라 할 때,

세 원 C1, C2, C3는 한 점 P 에서 만난다.

23. 두 부등식 $x^2-15x+36<0$, $|8-x| \geq a$을 만족하는 정수의 개수가 3개일 때,
a의 값의 범위를 구하면?

① $1 \leq a \leq 2$　② $2 \leq a < 3$　③ $3 \leq a < 4$
④ $2 < a \leq 3$　⑤ $3 < a \leq 4$

해설

$x^2-15x+36<0$에서
$(x-3)(x-12)<0$이므로 $3<x<12$
$|8-x| \geq a$에서
$8-x \geq a$ 또는 $8-x \leq -a$
$\therefore x \leq 8-a,\ x \geq 8+a$
공통부분의 정수의 개수가 3개이므로
$3<x \leq 8-a$에서 2개
$8+a \leq x < 12$에서 1개
$\left(\because \dfrac{8-a+8+a}{2} > \dfrac{3+12}{2}\right)$
$\therefore 5 \leq 8-a < 6,\ 10 < 8+a \leq 11$
$\therefore -3 \leq -a < -2,\ 2 < a \leq 3$
$\therefore 2 < a \leq 3$

24. 두 직선 $2x-y-1=0$, $x+2y-1=0$ 이 이루는 각을이등분하는 직선이 점 $(a,-1)$ 를 지날 때, a 의 값의 합은?

① -8　② -6　③ -4　④ -2　⑤ 0

해설

두 직선이 이루는 각의 이등분선 위의 점을 $\mathrm{P}(a,\ -1)$ 라 하면
점 P 에서 두 직선 $2x-y-1=0$, $x+2y-1=0$ 까지의 거리가 같으므로

$$d=\frac{|2a+1-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|a-2-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}$$

$|2a|=|a-3|$

$\therefore\ 2a=a-3$ 또는 $2a=-(a-3)$ 이므로

$a=-3$ 또는 $a=1$

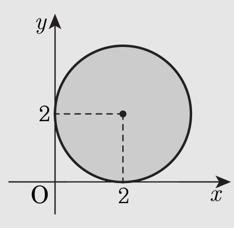
따라서 a 의 값의 합은 $-3+1=-2$

25. 부등식 $(x-2)^2+(y-2)^2 \le 4$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 x^2+y^2의 최댓값을 M , 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값은?

① 1　　② 2　　③ 8　　④ 16　　⑤ 17

해설

부등식 $(x-2)^2+(y-2)^2 \le 4$ 의 영역은 다음 그림의 색칠한 부분과 같다.



$x^2+y^2=k$ 라 하면 $x^2+y^2=k$와 $(x-2)^2+(y-2)^2=4$ 가 접할 때

k 는 최댓값과 최솟값을 갖는다.

따라서 $M=(2\sqrt{2}+2)^2,\ m=(2\sqrt{2}-2)^2$ 이므로

$Mm=16$