1. 직선 $2x - y + 3 = 0$을 원점에 대하여 대칭이동시킨 직선의 방정식을 구하면?

① $2x + y + 3 = 0$　② $2x - y - 3 = 0$　③ $2x + y - 3 = 0$
④ $x - 2y - 3 = 0$　⑤ $x - 2y + 3 = 0$

해설
원점대칭은 x, y 부호를 각각 반대로 해주면 된다.
따라서 $x \to -x,\ \ y \to -y$를 대입한다.

2. 좌표평면 위의 점 $(-1,\ 3)$ 을 점 $(a,\ b)$ 에 대하여 대칭이동 시킨 점이 $(3,\ 5)$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$(-1,3),(3,5)$ 의 중점이 (a,b) 이다.

$\Rightarrow \left(\dfrac{-1+3}{2}, \dfrac{3+5}{2}\right) = (a,b)$

$\Rightarrow a+b=5$

3. 점 $(-1, 2)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동시킨 후, 다시 y 축에 대하여 대칭이동시켰다. 이것을 x 축으로 a, y 축으로 b 만큼 평행이동시킨 후 다시 원점에 대하여 대칭이동시켰더니 점 $(1, 2)$ 가 되었다. $a+b$ 의 값은?

① -3　② -2　③ -1　④ 0　⑤ 1

해설

점$(-1,\ 2)$ 를 x 축에 대하여
대칭이동하면 $(-1, -2)$
이것을 y 축에 대하여 대칭이동하면 $(1, -2)$
이것을 다시 x 축으로 a,
y 축으로 b 만큼 평행이동하면
$(1+a,\ -2+b)$
원점에 대하여 대칭이동하면 $(-1-a,\ 2-b)$
이것이 점 $(1, 2)$ 가 되려면 $a=-2,\ b=0$
$\therefore a+b=-2$

4. 원 $x^2+y^2-4x-2y+4=0$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 후 다시 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 원의 방정식은?

① $x^2+y^2=1$
② $(x-2)^2+(y+1)^2=1$
③ $(x+2)^2+(y-1)^2=1$
④ $x^2+(y+2)^2=1$
⑤ $(x-2)^2+y^2=1$

해설

$x^2+y^2-4x-2y+4=0$ 에서
$(x-2)^2+(y-1)^2=1 \cdots\cdots$ ㉠
㉠을 y 축에 대하여 대칭이동하면
$(x+2)^2+(y-1)^2=1 \cdots\cdots$ ㉡
㉡을 x 축의 방향으로 2 만큼 평행이동하면
$x^2+(y-1)^2=1 \cdots\cdots$ ㉢
㉢을 y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동하면
$x^2+(y+2)^2=1$

5. 점$(1,3)$을 점$(-1,2)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하면?

① $(3,\ -1)$ ② $(-3,\ 1)$ ③ $(1,\ -3)$
④ $(-1,\ 3)$ ⑤ $(-1,\ -3)$

해설

대칭이동한 점을 (a,b)라고 하면
점 (a,b)와 점 $(1,3)$의 중점이
점 $(-1,2)$이므로
$\frac{a+1}{2}=-1, \frac{b+3}{2}=2$에서
$a=-3, b=1$
$\therefore (-3,\ 1)$

6. 점 $(2,\ -1)$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 다음 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하면?

① $(2,\ -1)$　　② $(-1,\ -2)$　　③ $(1,\ 2)$

④ $(-2,\ 4)$　　⑤ $(-1,\ 3)$

해설

점 $(2,\ -1)$ 을 y 축에 대하여
대칭이동한 점의 좌표는 $(-2,\ -1)$
이 점을 다시 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하면
구하는 점의 좌표는 $(-1,\ -2)$

7. 좌표평면 위에서 원 $(x-1)^2+(y-3)^2=4$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 중심거리는?

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ 3 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

해설

원 $(x-1)^2+(y-3)^2=4$를
직선 $y=x$에 대하여
대칭이동 시킨 원의 방정식은
$(x-3)^2+(y-1)^2=4$ 이고,
이 원의 중심은 $(3,1)$ 이다.
두 원의 중심거리는
두 점 $(1,3)$, $(3,1)$ 사이의 거리와 같으므로
$\sqrt{(1-3)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{2}$

8. 원 $x^2+y^2-6x+4y+9=0$ 을 y 축에 대하여 대칭이동하면 직선 $y=mx$ 에 접한다고 한다. 이때, 이를 만족하는 모든 상수 m 의 값의 합은?

① $-\frac{12}{5}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $\frac{6}{5}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{12}{5}$

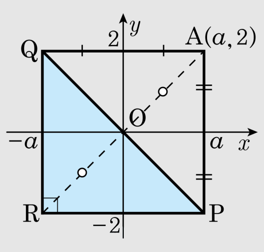
해설

원 $x^2+y^2-6x+4y+9=0$ 을 y 축에 대하여 대칭이동하면 $(-x)^2+y^2-6(-x)+4y+9=0$,
$x^2+y^2+6x+4y+9=0$
$\therefore (x+3)^2+(y+2)^2=4$
이 원이 직선 $y=mx$ 에 접하므로 원의 중심 $(-3,-2)$ 에서 직선 $mx-y=0$ 에 이르는 거리는 반지름 2 와 같다.
즉, $\frac{|-3m+2|}{\sqrt{m^2+1}}=2$
이것을 정리하여 풀면 $m=0$ 또는 $m=\frac{12}{5}$
따라서 모든 상수 m 의 합은 $\frac{12}{5}$

9. 점 A $(a, 2)$ 를 x 축, y 축, 원점에 대하여 대칭이동한 점을 각각 P, Q, R 라고 할 때, 삼각형 PQR 의 넓이는 20 이다. 이 때, 양수 a 의 값은?

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

해설

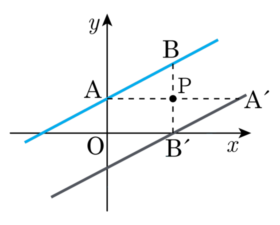


다음 그림에서 점 A $(a, 2)$ 를 x 축에 대하여
대칭이동한 점은 P $(a, -2)$
점 A $(a, 2)$ 를 y 축에 대하여 대칭이동한 점은 Q $(-a, 2)$
점 A $(a, 2)$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 점은 R $(-a, -2)$
따라서, 삼각형 PQR 는 $\angle R = 90°$ 인 직각삼각형이다.
이때, $\overline{PR} = 2a, \overline{QR} = 4$ 이고
삼각형 PQR 의 넓이는 20이므로

$$\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 4 = 20$$

$\therefore a = 5$

10. 다음 그림과 같이 좌표평면 위의 한 점 P 에 대한 두 점 A, B 의 대칭점은 각각 A′, B′ 이고, 직선 AB 의 방정식은 $x-2y+4=0$ 이라 한다. 점 A′ 의 좌표가 $(3, 1)$, 직선 A′B′ 의 방정식이 $y=ax+b$ 일 때, 두 상수 a, b 의 곱은?



① $-\frac{1}{2}$　　② $-\frac{1}{3}$　　③ $-\frac{1}{4}$　　④ $\frac{1}{4}$　　⑤ $\frac{1}{3}$

해설

두 점 A′, B′ 은 각각 점 P 에 대한 두 점 A, B 의 대칭점이므로 직선 A′B′ 은 직선 AB 의 점대칭도형이다.
즉, $\triangle APB \equiv \triangle A'PB'$ 에서
$\angle ABP = \angle A'B'P$ (엇각) 이므로
$\overleftrightarrow{AB} \,/\!/\, \overleftrightarrow{A'B'}$
따라서, 직선 A′B′ 의 기울기는 직선 AB 의 기울기인 $\frac{1}{2}$ 과 같다.
또, 직선 A′B′ 은 점 A′ $(3, 1)$ 을 지나므로 직선 A′B′ 의 방정식은
$y-1=\frac{1}{2}(x-3)$
$\therefore y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$
따라서, $a=\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{2}$ 이므로
$ab=-\frac{1}{4}$

11. 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동시키는 것을 A, y축에 대하여 대칭 이동시키는 것을 B, 원점에 대하여 대칭 이동시키는 것을 C, 직선 $y=x$에 대하여 대칭 이동시키는 것을 D라 하자. 직선 $2x+y+1=0$ 을 $A \to B \to C \to D \to C \to B \to A$의 순서로 대칭 이동시킨 도형의 방정식은? (단, $A \to B$는 A에 의하여 대칭 이동시킨 후 다시 B에 의하여 대칭 이동시키는 것을 뜻한다.)

① $2x+y+1=0$　② $2x+y-1=0$　③ $x+2y-1=0$
④ $x+2y+1=0$　⑤ $x-2y-1=0$

해설

$2x+y+1=0$을 A(x축 대칭) 하면 $2x-y+1=0$
B(y축 대칭) 하면 $-2x-y+1=0$
C(원점 대칭) 하면 $2x+y+1=0$이므로
$A \to B \to C$, $C \to B \to A$에 의하여 도형은 자기 자신으로 옮겨진다.
$2x+y+1=0$을 D(직선 $y=x$ 대칭) 하면 $2y+x+1=0$
$\therefore x+2y+1=0$

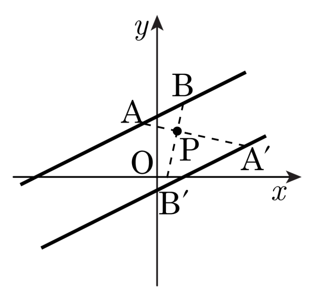
12. 직선 $y = kx+1$ 을 x 축에 대하여 대칭이동하면 원 $x^2+y^2+6x-4y+9 = 0$ 의 넓이를 이등분한다고 할 때 k 의 값을 구하면?

① -2　② -1　③ 1　④ 2　⑤ $\frac{1}{2}$

해설

먼저 $y = kx + 1$ 를 x 축 대칭시킨 직선은
$y = -kx - 1 \cdots$ ㉠
이제 원의 방정식을 정리하면,
$(x + 3) + (y - 2)^2 = 4$
직선이 원의 넓이를
이등분하려면 직선이 원의 중심을 지나면 된다.
중심이 $(-3, 2)$ 이므로 ㉠ 에 대입하면,
$2 = 3k - 1 \Rightarrow \quad k = 1$

13. 좌표평면 위의 정점 P 에 대한 두 점 A, B 의 대칭점은 각각 A′, B′ 이고, 직선 AB 의 방정식은 $x-2y+4=0$ 이라 한다. 점 A′ 의 좌표가 $(3, 1)$, 직선 A′B′ 의 방정식이 $y=ax+b$ 일 때, 두 상수 a, b 의 곱 ab 의 값은?



① $-\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $-\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{2}$

해설

두 점 A′, B′ 은 점 P 에 대한 두 점 A, B 의 대칭점이므로, 직선 A′B′ 은 직선 AB 의 점대칭도형이다

$\triangle APB \equiv \triangle A'PB'$ 에서

$\angle ABP = \angle A'B'P$ (엇각) 이므로

$\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{A'B'}$ 이다.

따라서 직선 A′B′ 의 기울기는 직선 AB 의 기울기인 $\frac{1}{2}$ 과 같다.

또한, 직선 A′B′ 은 A′$(3, 1)$ 을 지나므로

직선 A′B′ 의 방정식은

$y-1=\frac{1}{2}(x-3)$

$\therefore\ y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

따라서 $a=\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{2}$ 이다.

$\therefore\ ab=-\frac{1}{4}$

14. 두 점 A$(a,\ b)$, B$(c,\ d)$ 가 직선 $y=mx$ 에 대하여 대칭일 때, 다음 중 m 의 값에 관계 없이 항상 성립하는 것은?

① $a+b=c+d$ ② $a+c=b+d$

③ $ab=cd$ ④ $ac=bd$

⑤ $a^2+b^2=c^2+d^2$

해설

$\overline{\mathrm{AB}}$ 는 $y=mx$ 에 수직한다.

$\Rightarrow \dfrac{d-b}{c-a}\times m=-1$

$\Rightarrow (a-c)=m(d-b)\cdots$①

그리고 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 중점은 $y=mx$ 위에 있다.

$\Rightarrow \dfrac{b+d}{2}=m\left(\dfrac{a+c}{2}\right)$

$\Rightarrow b+d=\ \ m(a+c)\cdots$②

②를 ①에 대입하면

$a-c=\dfrac{b+d}{a+c}(d-a)$

$\Rightarrow a^2+b^2=c^2+d^2$

15. 두 변환 f, g가 다음과 같이 주어졌을 때, $(g \circ f)(-2,\ 3)$을 구하면?

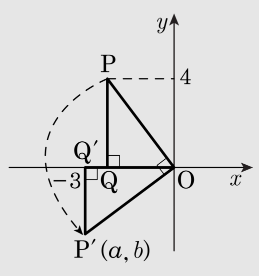
$f : (x, y) \rightarrow (x-1, y+1)$ $g : (x, y)$를 원점을 중심으로 하여 반시계방향으로 90 °회전시킨다.

① $(4,\ 3)$　　② $(3, -4)$　　③ $(-4, -3)$

④ $(-4, -1)$　　⑤ $(4, -3)$

해설

합성변환의 정의에 의해 $(g \circ f)(-2,\ 3)$을 풀면
$(g \circ f)(-2,\ 3) = g(f(-2,\ 3)) = g(-3, 4)$
주어진 정의에 의해 $g(-3,\ 4)$ 는 점 $(-3, 4)$를 원점을 중심으로 하여 반시계방향으로 회전시킨 것이므로
그림에서와 같이 $\mathrm{P}(-3, 4)$에 대해 회전 이동된 점 $\mathrm{P}'(a, b)$를 정하면



$\overline{\mathrm{OP}} = \overline{\mathrm{OP'}}$ (회전축) …… ①
$\angle \mathrm{POQ} = \angle \mathrm{OP'Q'}$ …… ②
$\angle \mathrm{OQP} = \angle \mathrm{OQ'P'}$ …… ③
①, ②, ③에 의해 $\angle \mathrm{OPQ} \equiv \angle \mathrm{P'OQ'}$
따라서, 대응변으로 $\overline{\mathrm{OP}} = \overline{\mathrm{P'Q'}}$ 이고 $\overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{OQ'}}$ 다.
이를 제사분면의 좌표로 나타내면 $\mathrm{P}(-4, -3)$