1. 원 $(x-4)^2+(y-3)^2=25$ 위의 점 C에서 두 점 A$(6,\ -4)$, B$(10,\ 0)$을 지나는 직선 l에 이르는 거리의 최댓값은?

① $5+4\sqrt{2}$　　② $5+\dfrac{9}{2}\sqrt{2}$　　③ $10+\sqrt{2}$

④ 11　　⑤ 12

해설

직선 AB의 방정식은

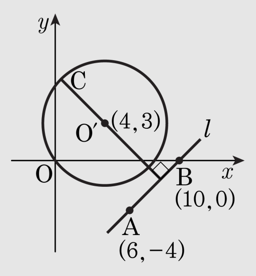
기울기가 $m=\dfrac{-4-0}{6-10}=1$이므로

$y=x-10$　즉, $x-y-10=0$ 이고

원의 중심 $(4,\ 3)$에서 직선 AB에 이르는 거리는

$\dfrac{|4-3-10|}{\sqrt{1+1}}=\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$이므로 원 위의 점 C에서

직선 l에 이르는 거리의 최댓값은 $\dfrac{9\sqrt{2}}{2}+5$이다.



2. 두 점 $\mathrm{A}(3,\ 2)$, $\mathrm{B}(6,\ 5)$에 대하여 $2\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{BP}}$를 만족시키는 점을 P라 할 때, 점 P와 직선 $x+y+3=0$ 사이의 거리의 최솟값은?

① $\sqrt{2}$　② $\sqrt{3}$　③ $2\sqrt{2}$　④ $2\sqrt{3}$　⑤ $3\sqrt{2}$

해설

$2\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{BP}}$에서 $4\overline{\mathrm{AP}}^2 = \overline{\mathrm{BP}}^2$

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$로 놓으면

$4\left\{(x-3)^2+(y-2)^2\right\} = (x-6)^2+(y-5)^2$

$x^2+y^2-4x-2y-3=0$

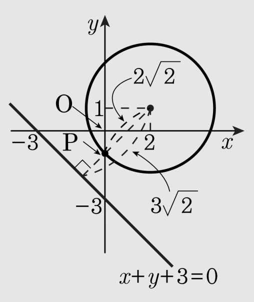
$\therefore (x-2)^2+(y-1)^2=8$

따라서 점 는 중심이 $(2,\ 1)$이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$인 원 위를 움직인다.

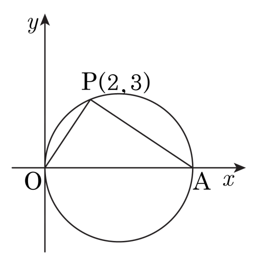
이때, 원의 중심 $(2,\ 1)$과 직선 $x+y+3=0$ 사이의 거리는 $\dfrac{|2+1+3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 3\sqrt{2}$이므로

아래 그림에서 점 P와 직선 $x+y+3=0$ 사이의 거리의 최솟값은

$3\sqrt{2}-2\sqrt{2}= \sqrt{2}$



3. 다음 그림과 같이 선분 OA 를 지름으로 하는 원 위에 한 점 P(2, 3) 이 있다. 이 때, 점 A 의 x 좌표를 구하면?



① $\frac{9}{2}$ ② $\frac{11}{2}$ ③ $\frac{13}{2}$
④ $\frac{15}{2}$ ⑤ $\frac{17}{2}$

해설

점 A 의 x 좌표를 a 라 하면
삼각형 OAP 가 직각삼각형이므로,
$a^2 = (2^2 + 3^2) + (a - 2)^2 + 3^2$
$a^2 = a^2 - 4a + 26$
따라서 $a = \frac{13}{2}$

해설

반원의 원주각은 $90°$ 이므로 $\angle OPA = 90°$
따라서, 직선 OP 와 직선 AP 의 기울기의 곱은 -1 이다.
점 A 좌표를 $(a,\ 0)$ 이라 하면
$\frac{3-0}{2-a} \times \frac{3}{2} = -1,\ 2a - 4 = 9$
따라서 $a = \frac{13}{2}$
A 의 x 좌표는 $\frac{13}{2}$ 이다.

4. 지름의 길이가 15 cm 인 원에 내접하며 둘레의 길이가 42 cm 인 직사각형의 두 변의 길이는?

① 6 cm, 8 cm　　② 6 cm, 10 cm　　③ 6 cm, 12 cm

④ 9 cm, 10 cm　　⑤ 9 cm, 12 cm

해설

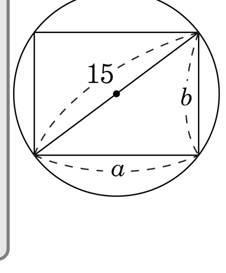
i) $a+b=\dfrac{42}{2}=21$

ii) $a^2+b^2=15^2$

i), ii) 를 연립하면, $a^2+(21-a)^2-225=0$

$\Rightarrow\quad a=12,\ 9$

$\therefore$ 두 변의 길이는 12 cm, 9 cm

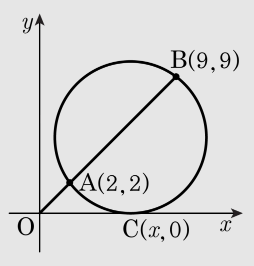


5. 좌표평면 위의 두 점 $(2,\ 2)$, $(9,\ 9)$ 를 지나고 x 축의 양의 부분과 접하는 원 O 의 접점의 x 좌표는 ?

① $\frac{9}{2}$　② 5　③ $\frac{11}{2}$　④ 6　⑤ $\frac{13}{2}$

해설

그림에서 $\overline{OC}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$



$x^2 = \sqrt{2^2+2^2} \cdot \sqrt{9^2+9^2} = 36 \quad x = 6$

6. 좌표평면 위의 두 점 $(1,\ 1)$, $(8,\ 8)$ 를 지나고 x 축의 양의 부분과 접하는 원 O 의 접점의 x좌표는 ?

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 4

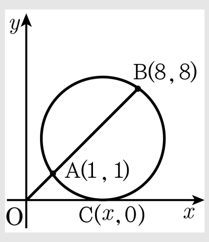
해설

다음 그림에서

$\overline{\mathrm{OC}}^2 = \overline{\mathrm{OA}} \cdot \overline{\mathrm{OB}}$

$\therefore\ x^2 = \sqrt{1^2+1^2} \cdot \sqrt{8^2+8^2} = 16$

$\therefore\ x = 4$

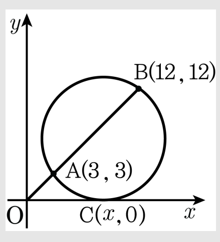


7. 좌표평면 위의 두 점 $(3,\ 3)$, $(12,\ 12)$ 를 지나고 x 축의 양의 부분과 접하는 원 O 의 접점의 x 좌표는 ?

① $\dfrac{3}{2}$ ② 6 ③ $\dfrac{5}{2}$ ④ $6\sqrt{2}$ ⑤ $\dfrac{15}{2}$

해설

그림에서 $\overline{OC}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$



$x^2 = \sqrt{3^2+3^2} \cdot \sqrt{12^2+12^2} = 72 \quad x = 6\sqrt{2}$

8. 원 $x^2+(y-5)^2=4$가 원 $(x-5)^2+y^2=9$의 외부에 있을 때, 두 원 사이의 최단거리는?

① 2　　② 3　　③ 5

④ $5\sqrt{2}-5$　　⑤ $5\sqrt{2}-13$

해설

두 원의 중심의 좌표가 각각 $(0,5)$, $(5,0)$이므로 중심거리는 $\sqrt{5^2+(-5)^2}=5\sqrt{2}$

두 원의 반지름은 각각 2, 3이므로 두 원의 최단거리는 $5\sqrt{2}-2-3=5\sqrt{2}-5$

9. 점 A$(2, 4)$와 원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ 위의 임의의 점 P를 이은 선분 AP의 중점의 자취의 길이는?

① $\frac{\pi}{2}$　② π　③ $\frac{3}{2}\pi$　④ 2π　⑤ 3π

해설

원 위의 점을 P(a, b), 선분 AP의 중점을 Q(x, y)라 하면

$x = \frac{2+a}{2}$, $y = \frac{4+b}{2}$

$\therefore a = 2(x-1)$, $b = 2(y-2)$ $\cdots$ ㉠

이 때 P(a, b)가 원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ 위의 점이므로

$a^2 + b^2 - 4a - 2b + 1 = 0$ $\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$4(x-1)^2 + 4(y-2)^2 - 8(x-1) - 4(y-2) + 1 = 0$

$x^2 + y^2 - 4x - 5y + \frac{37}{4} = 0$

$\therefore (x-2)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right) = 1$

따라서 점 Q의 자취는 중심의 좌표가 $\left(2, \frac{5}{2}\right)$이고, 반지름의 길이가 1인 원이므로 구하는 자취의 길이는

$2\pi \doteq 2\pi$

10. 원 $x^2+(y-4)^2=4$가 원 $(x-4)^2+y^2=9$의 외부에 있을 때, 두 원 사이의 최단거리는?

① 2 ② 3 ③ 5

④ $4\sqrt{2}-5$ ⑤ $4\sqrt{2}-6$

해설

두 원의 중심의 좌표가 각각 $(0,4)$, $(4,0)$이므로 중심거리는 $\sqrt{4^2+(-4)^2}=4\sqrt{2}$

두 원의 반지름은 각각 2, 3이므로 두 원의 최단거리는 $4\sqrt{2}-2-3=4\sqrt{2}-5$

11. 원 $(x-2)^2+y^2=4$ 와 함수 $\sqrt{3}y=|x-2|$ 의 그래프가 만나는 두 점을 A, B 라 하자. 이때, 작은 활꼴 A, B 의 넓이는?

① $\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$　② $\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$　③ $2\pi-\sqrt{3}$
④ $\frac{4}{3}\pi+\sqrt{3}$　⑤ $2\pi+\sqrt{3}$

해설

$\sqrt{3}y=|x-2|$ 의 그래프는

$x<2$: $\sqrt{3}y=-x+2$

$\therefore\ y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{2}{\sqrt{3}}$

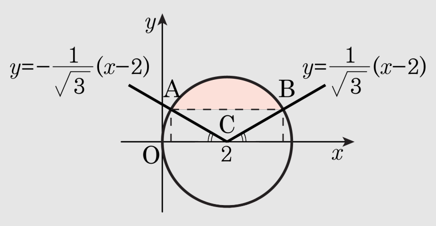
$x\ge 2$: $\sqrt{3}y=x-2$

$\therefore\ y=\frac{1}{\sqrt{3}}x-\frac{2}{\sqrt{3}}$

이고 $\angle\mathrm{ACB}=\frac{2}{3}\pi$ 이므로

색칠된 부분의 넓이S 는

$$S=\frac{1}{2}\times 2^2\times\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}\times 2^2\times\sin\frac{2}{3}\pi$$
$$=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$$

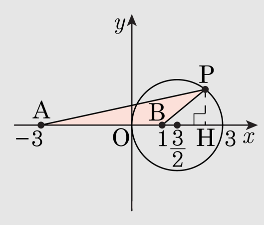


12. 두 점 A$(-3,\ 0)$, B$(1,\ 0)$으로 부터의 거리의 비가 $3 : 1$인 점 P에 대하여 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은?

① 2　② $\frac{5}{2}$　③ 3　④ $\frac{7}{2}$　⑤ 4

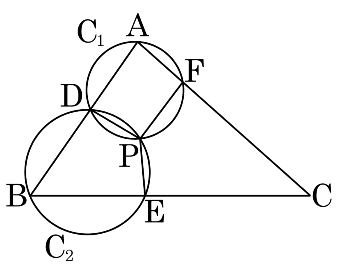
해설

주어진 조건에서 $\overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 1$이므로
$\overline{AP} = 3\overline{BP}$
$\therefore \overline{AP}^2 = 9\overline{BP}^2$
점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 놓으면
$(x+3)^2 + y^2 = 9\left(x-1\right)^2 + y^2\}$
$x^2 + y^2 - 3x = 0 \therefore \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$
따라서 점 P는 중심이 좌표가 $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$이고
반지름의 길이가 $\frac{3}{2}$인 원 위를 움직인다.
그림과 같이 점 P에서 x축에 내린 수선
의 발을
H라 하면



$\triangle PAB = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{PH}$
이 때, $\overline{AB} = 4$이고 $\overline{PH}$
의 길이의 최댓값은 반지름의 길이
$\frac{3}{2}$이므로 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은
$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{3}{2} = 3$

13. 다음은 삼각형 ABC 의 각 꼭짓점을 지나는 원에 대한 어떤 성질을 설명한 것이다.



그림처럼 세 점 A, D, F 를 지나는 원 C_1 과 세 점 B, D, E 를 지나는 원 C_2 의 교점 P 가 삼각형 ABC 의 내부에 존재하도록 세 변 AB, BC, CA 위에 각각 점 D, E, F 를 잡는다.

$\angle DPF + \boxed{\text{가}} = 180°$

$\angle DPE + \boxed{\text{나}} = 180°$

$\angle DPF + \angle DPE = 360 - \left(\boxed{\text{가}} + \boxed{\text{나}}\right)$ 에서

$\angle FPE = \boxed{\text{가}} + \boxed{\text{나}}$

$\therefore\ \angle FPE + \angle C = 180°$

따라서 세 점 C, F, E 를 지나는 원을 C_3 라 할때, $\boxed{\quad\text{다}\quad}$

(가), (나), (다) 에 알맞은 것은?

① (가)$\angle A$, (나)$\angle B$, (다)C_1, C_2, C_3 은 한 점 P 에서 만난다.

② (가)$\angle B$, (나)$\angle A$, (다)C_1, C_2, C_3 은 한 점 P 에서 만난다.

③ (가)$\angle A$, (나)$\angle B$, (다)C_3 의 내부에 점 P 가 존재한다.

④ (가)$\angle B$, (나)$\angle A$, (다)C_3 의 내부에 점 P 가 존재한다.

⑤ (가)$\angle A$, (나)$\angle B$, (다)C_3 의 외부에 점 P 가 존재한다.

해설

□ADPF 에서 $\angle DPF + \angle A = 180°$

□BEPD 에서 $\angle DPE + \angle B = 180°$

따라서 $\angle DPF + \angle DPE = 360° - (\angle A + \angle B)$

$\angle FPE = \angle A + \angle B$

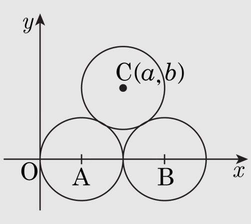
$\therefore\ \angle FPE + \angle C = 180°$

따라서 세 점 C, F, E 를 지나는 원을 C3 라 할 때,
세 원 C1, C2, C3는 한 점 P 에서 만난다.

14. 두 원 $C_1 : (x-1)^2 + y^2 = 1$, $C_2 : (x-3)^2 + y^2 = 1$ 에 동시에 외접하는 제1 사분면 위의 원 C_3 가 있다. 세 원의 중심을 이은 삼각형이 정삼각형이 될 때, 원점에서 원 C_3 의 중심까지의 거리를 d , 원 C_3 의 반지름의 길이를 r 라 하자. 이때, $d \times r$ 의 값은?

① $\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{6}$ ④ $\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

해설



세 원의 중점을 각각 A, B, C 라 하면,
두 원의 중심의 좌표가 A(1, 0), B(3, 0) 이다.
$\overline{\mathrm{AC}} = 2$ 이고 삼각형 ABC 가 정삼각형이므로 $\mathrm{C}(a,\ b)$ 라 하면
$a = 1 + \overline{\mathrm{AC}}\cos 60^\circ$, $b = \overline{\mathrm{AC}}\sin 60^\circ$
$\therefore \mathrm{C}(2,\ \sqrt{3})$
따라서 원 C_3 는 중심이 $(2,\ \sqrt{3})$ 이고 반지름의 길이가 1 인 원이므로, 원점에서 원의 중심 $\mathrm{C}(2,\ \sqrt{3})$ 까지의 거리는

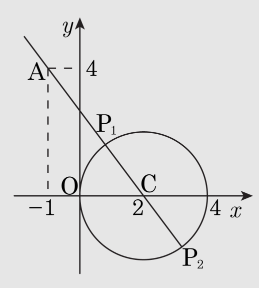
$$d = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{7}$$

$$\therefore d \times r = \sqrt{7}$$

15. 한 점 $A(-1,\ 4)$ 와 원 $(x-2)^2+y^2=4$ 위의 점 P 에 대하여 선분 AP 의 길이가 정수가 되는 점 P 는 모두 몇 개 인가?

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설



그림과 같이 원 위의 점 P_1, P_2 에서 $\overline{AP_1}$ 과 $\overline{AP_2}$ 의 길이가 최솟값, 최댓값 이면
P_1, P_2 는 점 A 와 원의 중심 $C(2,\ 0)$ 을 지나는 직선 위의 점이다.

$\overline{AP_1}=\overline{AC}-2=3$

$\overline{AP_2}=\overline{AC}+2=7$

$\therefore\ 3\le\overline{AP}\le7$

$\overline{AP}$ 가 정수인 점 P 를 조사하면

ⅰ) $\overline{AP}=4,\ 5,\ 6$ 일 때 만족하는 점 P 는 각각 2 개.

ⅱ) $\overline{AP}=3,\ 7$ 일 때 만족하는 점 P 는 각각 1 개.

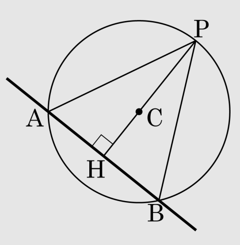
따라서 $(3\times2)+(2\times1)=8$ (개)

16. 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=9$와 직선 $3x+4y-1=0$이 만나는 두 점을 각각 A, B, 원 위의 한 점을 P라 할 때, △PAB의 넓이의 최댓값을 구하면?

① $\sqrt{5}$　② $2\sqrt{5}$　③ $3\sqrt{5}$　④ $4\sqrt{5}$　⑤ $5\sqrt{5}$

해설

원 위의 점 P에서 직선 $3x+4y-1=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면 다음 그림과 같이 $\overline{\mathrm{PH}}$가 원의 중심을 지날 때, △PAB의 넓이가 최대이다.



이 때, 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=9$의 중심 C$(1,2)$에서 직선 $3x+4y-1=0$에 이르는 거리는

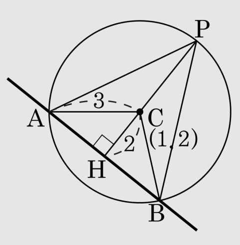
$\overline{\mathrm{CH}}=\dfrac{|3\cdot 1+4\cdot 2-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$

$\therefore \overline{\mathrm{PH}}=3+2=5$

또, 다음 그림에서 △CAH는 직각삼각형이므로 피타고라스정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$

$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AH}}=2\sqrt{5}$



따라서, △PAB의 넓이의 최댓값은

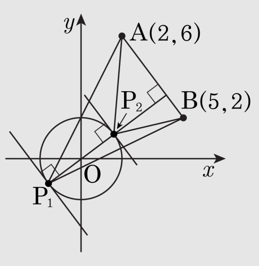
$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{PH}}=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times 5=5\sqrt{5}$

17. 두 점 A(2, 6), B(5, 2) 가 있다. 점 $P(x,y)$ 가 원 $x^2+y^2=4$ 위를 움직일 때, △ABP 의 넓이의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 한다. $M+m$ 의 값은?

① 24 ② 26 ③ 28 ④ 30 ⑤ 32

해설

△ABP 의 넓이는 다음 그림과 같이 P 가 I 일 때 최댓값, II 일 때 최솟값을 가진다.



$\overline{AB}$ 의 방정식이 $y=\dfrac{2-6}{5-2}(x-2)+6$

$\Rightarrow \quad 4x+3y-26=0$

$\therefore \quad \triangle ABP_2=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\left(\dfrac{|-26|}{\sqrt{4^2+3^2}}-2\right)$

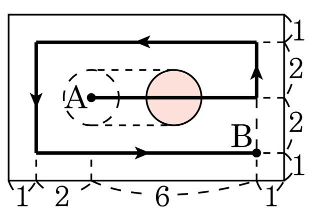
$=\dfrac{1}{2}\times 5\times\left(\dfrac{26}{5}-2\right)$

$\triangle ABP_1=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\left(\dfrac{|-26|}{\sqrt{4^2+3^2}}+2\right)$

$=\dfrac{1}{2}\times 5\times\left(\dfrac{26}{5}+2\right)$

$\Rightarrow \quad M+m=26$

18. 가로의 길이가 10, 세로의 길이가 6 인 오른쪽 그림과 같은 직사각형의 내부에서 반지름의 길이가 1 인 원이 지나간 자리에는 형광 페인트가 칠해진다고 한다. 원의 중심이 그림과 같이 A 부터 B 까지 화살표 방향의 경로를 따라 움직일 때, 직사각형의 영역 중 형광 페인트가 칠해지지 않는 부분의 넓이는? (단, 경로를 구성하는 모든 선분은 직사각형의 변에 평행하거나 수직이다.)



① 0　② $10-\frac{5}{2}\pi$　③ $8-2\pi$
④ $6-\frac{3}{2}\pi$　⑤ $4-\pi$

해설

반지름의 길이가 1 인 원이 화살표 방향을 따라 이동할 때 지나지 않는 부분은 다음 그림에서 어두운 부분이다.
따라서 그 넓이는 한 변의 길이가 2 인 정사각형에서 반지름의 길이가 1 인 원을 제외한 부분의 넓이의 2 배와 같다.
즉 $2(4-\pi)$