

1. 원 $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$ 위의 점 C에서 두 점 A(6, -4), B(10, 0)을 지나는 직선 l 에 이르는 거리의 최댓값은?

① $5 + 4\sqrt{2}$

② $5 + \frac{9}{2}\sqrt{2}$

③ $10 + \sqrt{2}$

④ 11

⑤ 12

해설

직선 AB의 방정식은

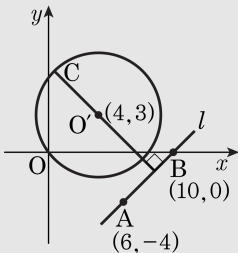
기울기가 $m = \frac{-4-0}{6-10} = 1$ 이므로

$y = x - 10$ 즉, $x - y - 10 = 0$ 이고

원의 중심 (4, 3)에서 직선 AB에 이르는 거리는

$\frac{|4-3-10|}{\sqrt{1+1}} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$ 이므로 원 위의 점 C에서

직선 l 에 이르는 거리의 최댓값은 $\frac{9\sqrt{2}}{2} + 5$ 이다.



2. 두 점 A(3, 2), B(6, 5)에 대하여 $2\overline{AP} = \overline{BP}$ 를 만족시키는 점을 P라 할 때, 점 P와 직선 $x + y + 3 = 0$ 사이의 거리의 최솟값은?

- ① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

해설

$$2\overline{AP} = \overline{BP} \text{에서 } 4\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$$

점 P의 좌표를 (x, y) 로 놓으면

$$4\{(x-3)^2 + (y-2)^2\} = (x-6)^2 + (y-5)^2$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 3 = 0$$

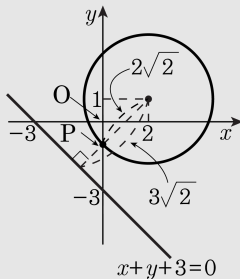
$$\therefore (x-2)^2 + (y-1)^2 = 8$$

따라서 점 P는 중심이 (2, 1)이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 원위를 움직인다.

이때, 원의 중심 (2, 1)과 직선 $x + y + 3 = 0$

$$\text{사이의 거리는 } \frac{|2 + 1 + 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 3\sqrt{2} \text{이므로}$$

아래 그림에서 점 P와 직선 $x + y + 3 = 0$ 사이의 거리의 최솟값은 $3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$

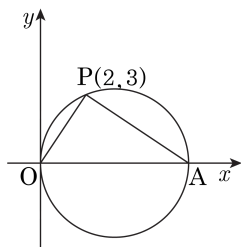


3. 다음 그림과 같이 선분 OA 를 지름으로 하는 원 위에 한 점 P(2, 3) 이 있다. 이 때, 점 A 의 x 좌표를 구하면?

① $\frac{9}{2}$
④ $\frac{15}{2}$

② $\frac{11}{2}$
⑤ $\frac{17}{2}$

③ $\frac{13}{2}$



해설

점 A 의 x 좌표를 a 라 하면

삼각형 OAP 가 직각삼각형이므로,

$$a^2 = (2^2 + 3^2) + (a - 2)^2 + 3^2$$

$$a^2 = a^2 - 4a + 26$$

$$\text{따라서 } a = \frac{13}{2}$$

해설

반원의 원주각은 90° 이므로 $\angle OPA = 90^\circ$

따라서, 직선 OP 와 직선 AP 의 기울기의 곱은 -1 이다.

점 A 좌표를 $(a, 0)$ 이라 하면

$$\frac{3-0}{2-a} \times \frac{3}{2} = -1, 2a - 4 = 9$$

$$\text{따라서 } a = \frac{13}{2}$$

A 의 x 좌표는 $\frac{13}{2}$ 이다.

4. 지름의 길이가 15 cm 인 원에 내접하며 둘레의 길이가 42 cm 인 직사각형의 두 변의 길이는?

① 6 cm, 8 cm

② 6 cm, 10 cm

③ 6 cm, 12 cm

④ 9 cm, 10 cm

⑤ 9 cm, 12 cm

해설

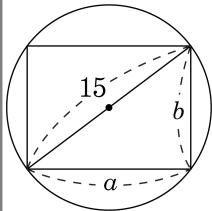
$$\text{i) } a + b = \frac{42}{2} = 21$$

$$\text{ii) } a^2 + b^2 = 15^2$$

$$\text{i), ii) 를 연립하면, } a^2 + (21-a)^2 - 225 = 0$$

$$\Rightarrow a = 12, 9$$

$\therefore$ 두 변의 길이는 12 cm, 9 cm



5. 좌표평면 위의 두 점 $(2, 2)$, $(9, 9)$ 를 지나고 x 축의 양의 부분과 접하는 원 O 의 점점의 x 좌표는 ?

① $\frac{9}{2}$

② 5

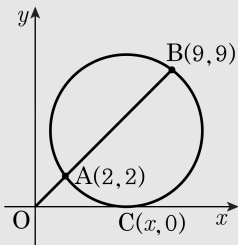
③ $\frac{11}{2}$

④ 6

⑤ $\frac{13}{2}$

해설

그림에서 $\overline{OC}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$



$$x^2 = \sqrt{2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{9^2 + 9^2} = 36 \quad x = 6$$

6. 좌표평면 위의 두 점 $(1, 1)$, $(8, 8)$ 를 지나고 x 축의 양의 부분과 접하는 원 O 의 점점의 x 좌표는 ?

① $\frac{5}{2}$

② 3

③ $\frac{7}{2}$

④ $\frac{11}{2}$

⑤ 4

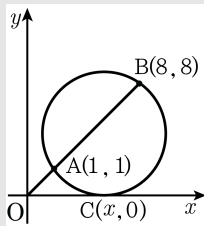
해설

다음 그림에서

$$\overline{OC}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$$

$$\therefore x^2 = \sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{8^2 + 8^2} = 16$$

$$\therefore x = 4$$



7. 좌표평면 위의 두 점 $(3, 3)$, $(12, 12)$ 를 지나고 x 축의 양의 부분과 접하는 원 O 의 접점의 x 좌표는 ?

① $\frac{3}{2}$

② 6

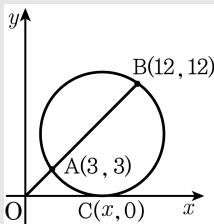
③ $\frac{5}{2}$

④ $6\sqrt{2}$

⑤ $\frac{15}{2}$

해설

그림에서 $\overline{OC}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$



$$x^2 = \sqrt{3^2 + 3^2} \cdot \sqrt{12^2 + 12^2} = 72 \quad x = 6\sqrt{2}$$

8. 원 $x^2 + (y - 5)^2 = 4$ 가 원 $(x - 5)^2 + y^2 = 9$ 의 외부에 있을 때, 두 원 사이의 최단거리는?

① 2

② 3

③ 5

④ $5\sqrt{2} - 5$

⑤ $5\sqrt{2} - 13$

해설

두 원의 중심의 좌표가 각각 $(0, 5)$, $(5, 0)$ 이므로 중심거리는

$$\sqrt{5^2 + (-5)^2} = 5\sqrt{2}$$

두 원의 반지름은 각각 2, 3 이므로 두 원의 최단거리는 $5\sqrt{2} -$

$$2 - 3 = 5\sqrt{2} - 5$$

9. 점 A(2, 4)와 원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ 위의 임의의 점 P를 이은 선분 AP의 중점의 자취의 길이는?

① $\frac{\pi}{2}$

② π

③ $\frac{3}{2}\pi$

④ 2π

⑤ 3π

해설

원 위의 점을 $P(a, b)$, 선분 AP의 중점을 $Q(x, y)$ 라 하면

$$x = \frac{2+a}{2}, y = \frac{4+b}{2}$$

$$\therefore a = 2(x-1), b = 2(y-2) \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

이 때 $P(a, b)$ 가 원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ 위의 점이므로

$$a^2 + b^2 - 4a - 2b + 1 = 0 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$4(x-1)^2 + 4(y-2)^2 - 8(x-1) - 4(y-2) + 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 5y + \frac{37}{4} = 0$$

$$\therefore (x-2)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = 1$$

따라서 점 Q의 자취는 중심의 좌표가 $\left(2, \frac{5}{2}\right)$ 이고, 반지름의

길이가 1인 원이므로 구하는 자취의 길이는

$$2\pi \div 2\pi$$

10. 원 $x^2 + (y - 4)^2 = 4$ 가 원 $(x - 4)^2 + y^2 = 9$ 의 외부에 있을 때, 두 원 사이의 최단거리는?

① 2

② 3

③ 5

④ $4\sqrt{2} - 5$

⑤ $4\sqrt{2} - 6$

해설

두 원의 중심의 좌표가 각각 $(0, 4)$, $(4, 0)$ 이므로 중심거리는

$$\sqrt{4^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2}$$

두 원의 반지름은 각각 2, 3 이므로 두 원의 최단거리는 $4\sqrt{2} -$

$$2 - 3 = 4\sqrt{2} - 5$$

11. 원 $(x-2)^2 + y^2 = 4$ 와 함수 $\sqrt{3}y = |x-2|$ 의 그래프가 만나는 두 점을 A, B 라 하자. 이때, 작은 활꼴 A, B 의 넓이는?

① $\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$

② $\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3}$

③ $2\pi - \sqrt{3}$

④ $\frac{4}{3}\pi + \sqrt{3}$

⑤ $2\pi + \sqrt{3}$

해설

$\sqrt{3}y = |x-2|$ 의 그래프는

$x < 2 : \sqrt{3}y = -x + 2$

$\therefore y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{2}{\sqrt{3}}$

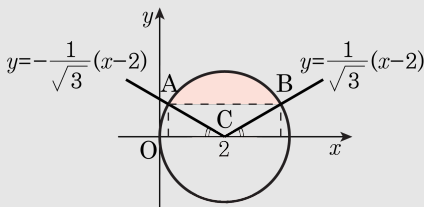
$x \geq 2 : \sqrt{3}y = x - 2$

$\therefore y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{2}{\sqrt{3}}$

이고 $\angle ACB = \frac{2}{3}\pi$ 이므로

색칠된 부분의 넓이 S 는

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times 2^2 \times \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2} \times 2^2 \times \sin \frac{2}{3}\pi \\ &= \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3} \end{aligned}$$



12. 두 점 A(-3, 0), B(1, 0)으로 부터의 거리의 비가 3 : 1인 점 P에 대하여 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은?

- ① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

해설

주어진 조건에서 $\overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 1$ 이므로

$$\overline{AP} = 3\overline{BP}$$

$$\therefore \overline{AP}^2 = 9\overline{BP}^2$$

점 P의 좌표를 (x, y)라 놓으면

$$(x+3)^2 + y^2 = 9(x-1)^2 + y^2$$

$$x^2 + y^2 - 3x = 0 \therefore \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$$

따라서 점 P는 중심이 좌표가 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ 이고

반지름의 길이가 $\frac{3}{2}$ 인 원 위를 움직인다.

그림과 같이 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을

H라 하면

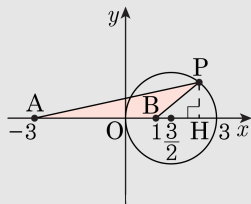
$$\Delta PAB = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{PH}$$

이 때, $\overline{AB} = 4$ 이고 $\overline{PH}$

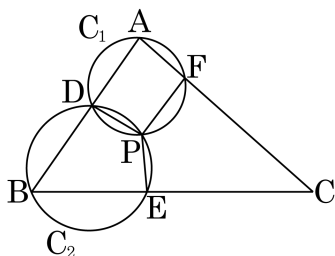
의 길이의 최댓값은 반지름의 길이

$\frac{3}{2}$ 이므로 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{3}{2} = 3$$



13. 다음은 삼각형 ABC 의 각 꼭짓점을 지나는 원에 대한 어떤 성질을 설명한 것이다.



그림처럼 세 점 A, D, F 를 지나는 원 C_1 과 세 점 B, D, E 를 지나는 원 C_2 의 교점 P 가 삼각형 ABC 의 내부에 존재하도록 세 변 AB, BC, CA 위에 각각 점 D, E, F 를 잡는다.

$$\angle DPF + \boxed{\text{가}} = 180^\circ$$

$$\angle DPE + \boxed{\text{나}} = 180^\circ$$

$$\angle DPF + \angle DPE = 360 - (\boxed{\text{가}} + \boxed{\text{나}}) \text{ 에서}$$

$$\angle FPE = \boxed{\text{가}} + \boxed{\text{나}}$$

$$\therefore \angle FPE + \angle C = 180^\circ$$

따라서 세 점 C, F, E 를 지나는 원을 C_3 라 할때, 다

(가), (나), (다)에 알맞은 것은?

- ① (가) $\angle A$, (나) $\angle B$, (다) C_1, C_2, C_3 은 한 점 P 에서 만난다.
 ② (가) $\angle B$, (나) $\angle A$, (다) C_1, C_2, C_3 은 한 점 P 에서 만난다.
 ③ (가) $\angle A$, (나) $\angle B$, (다) C_3 의 내부에 점 P 가 존재한다.
 ④ (가) $\angle B$, (나) $\angle A$, (다) C_3 의 내부에 점 P 가 존재한다.
 ⑤ (가) $\angle A$, (나) $\angle B$, (다) C_3 의 외부에 점 P 가 존재한다.

해설

$$\square ADPF \text{ 에서 } \angle DPF + \angle A = 180^\circ$$

$$\square BEPD \text{ 에서 } \angle DPE + \angle B = 180^\circ$$

$$\text{따라서 } \angle DPF + \angle DPE = 360^\circ - (\angle A + \angle B)$$

$$\angle FPE = \angle A + \angle B$$

$$\therefore \angle FPE + \angle C = 180^\circ$$

따라서 세 점 C, F, E 를 지나는 원을 C_3 라 할 때,
 세 원 C_1, C_2, C_3 는 한 점 P 에서 만난다.

14. 두 원 $C_1 : (x-1)^2 + y^2 = 1$, $C_2 : (x-3)^2 + y^2 = 1$ 에 동시에 외접하는 제1 사분면 위의 원 C_3 가 있다. 세 원의 중심을 이은 삼각형이 정삼각형이 될 때, 원점에서 원 C_3 의 중심까지의 거리를 d , 원 C_3 의 반지름의 길이를 r 라 하자. 이때, $d \times r$ 의 값은?

① $\sqrt{3}$

② $2\sqrt{3}$

③ $\sqrt{6}$

④ $\sqrt{7}$

⑤ $2\sqrt{2}$

해설

세 원의 중심을 각각 A, B, C 라 하면,
두 원의 중심의 좌표가 A(1, 0), B(3, 0)
이다.

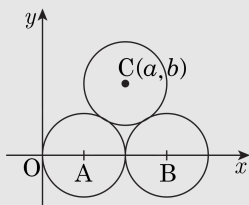
$\overline{AC} = 2$ 이고 삼각형 ABC 가
정삼각형이므로 C(a, b) 라 하면
 $a = 1 + \overline{AC} \cos 60^\circ$, $b = \overline{AC} \sin 60^\circ$

$$\therefore C(2, \sqrt{3})$$

따라서 원 C_3 는 중심이 $(2, \sqrt{3})$ 이고
반지름의 길이가 1 인 원이므로, 원점에서
원의 중심 C(2, $\sqrt{3}$) 까지의 거리는

$$d = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{7}$$

$$\therefore d \times r = \sqrt{7}$$



15. 한 점 $A(-1, 4)$ 와 원 $(x-2)^2 + y^2 = 4$ 위의 점 P 에 대하여 선분 AP 의 길이가 정수가 되는 점 P 는 모두 몇 개 인가?

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

그림과 같이 원 위의 점 P_1, P_2 에서 $\overline{AP_1}$ 과 $\overline{AP_2}$ 의 길이가 최솟값, 최댓값이면

P_1, P_2 는 점 A 와 원의 중심 $C(2, 0)$ 을 지나는 직선 위의 점이다.

$$\overline{AP_1} = \overline{AC} - 2 = 3$$

$$\overline{AP_2} = \overline{AC} + 2 = 7$$

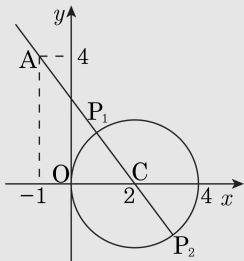
$$\therefore 3 \leq \overline{AP} \leq 7$$

$\overline{AP}$ 가 정수인 점 P 를 조사하면

i) $\overline{AP} = 4, 5, 6$ 일 때 만족하는 점 P 는 각각 2 개.

ii) $\overline{AP} = 3, 7$ 일 때 만족하는 점 P 는 각각 1 개.

따라서 $(3 \times 2) + (2 \times 1) = 8$ (개)



16. 원 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$ 와 직선 $3x + 4y - 1 = 0$ 이 만나는 두 점을 각각 A, B, 원 위의 한 점을 P라 할 때, $\triangle PAB$ 의 넓이의 최댓값을 구하면?

① $\sqrt{5}$

② $2\sqrt{5}$

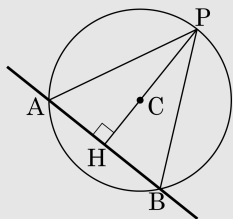
③ $3\sqrt{5}$

④ $4\sqrt{5}$

⑤ $5\sqrt{5}$

해설

원 위의 점 P에서 직선 $3x + 4y - 1 = 0$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면 다음 그림과 같이 $\overline{PH}$ 가 원의 중심을 지날 때, $\triangle PAB$ 의 넓이가 최대이다.



이 때, 원 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$ 의 중심 $C(1,2)$ 에서 직선 $3x + 4y - 1 = 0$ 에 이르는 거리는

$$\overline{CH} = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$$

$$\therefore \overline{PH} = 3 + 2 = 5$$

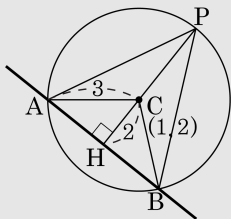
또, 다음 그림에서 $\triangle CAH$ 는 직각삼각형
이므로 피타고라스정리에 의하여

$$\overline{AH} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\therefore \overline{AB} = 2\overline{AH} = 2\sqrt{5}$$

따라서, $\triangle PAB$ 의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{PH} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times 5 = 5\sqrt{5}$$



17. 두 점 $A(2, 6)$, $B(5, 2)$ 가 있다. 점 $P(x, y)$ 가 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위를 움직일 때, $\triangle ABP$ 의 넓이의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 한다. $M + m$ 의 값은?

① 24

② 26

③ 28

④ 30

⑤ 32

해설

$\triangle ABP$ 의 넓이는 다음 그림과 같이 P 가 I 일 때 최댓값, II 일 때 최솟값을 가진다.

$$\overline{AB} \text{ 의 방정식이 } y = \frac{2-6}{5-2}(x-2) + 6$$

$$\Rightarrow 4x + 3y - 26 = 0$$

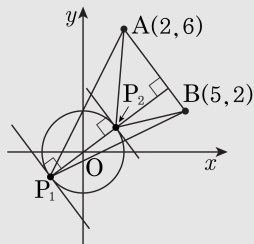
$$\therefore \triangle ABP_2 = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \left(\frac{|-26|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} - 2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \times 5 \times \left(\frac{26}{5} - 2 \right)$$

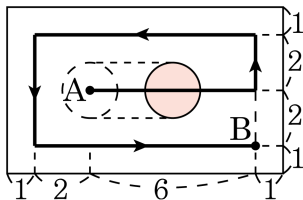
$$\triangle ABP_1 = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \left(\frac{|-26|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} + 2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \times 5 \times \left(\frac{26}{5} + 2 \right)$$

$$\Rightarrow M + m = 26$$



18. 가로 길이가 10, 세로 길이가 6 인 오른쪽 그림과 같은 직사각형의 내부에서 반지름의 길이가 1 인 원이 지나간 자리에는 형광 페인트가 칠해진다고 한다. 원의 중심이 그림과 같이 A 부터 B 까지 화살표 방향의 경로를 따라 움직일 때, 직사각형의 영역 중 형광 페인트가 칠해지지 않는 부분의 넓이는? (단, 경로를 구성하는 모든 선분은 직사각형의 변에 평행하거나 수직이다.)



- ① 0 ② $10 - \frac{5}{2}\pi$ ③ $8 - 2\pi$
 ④ $6 - \frac{3}{2}\pi$ ⑤ $4 - \pi$

해설

반지름의 길이가 1 인 원이 화살표 방향을 따라 이동할 때 지나지 않는 부분은 다음 그림에서 어두운 부분이다.

따라서 그 넓이는 한 변의 길이가 2 인 정사각형에서 반지름의 길이가 1 인 원을 제외한 부분의 넓이의 2 배와 같다.

즉 $2(4 - \pi)$

