1. 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점 (a, b) 에서의 접선이 점 $(6, 6)$ 을 지날 때, ab 의 값은?

① $-\frac{27}{8}$ ② $-\frac{15}{8}$ ③ $-\frac{7}{8}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{15}{8}$

해설

원 위의 점 (a, b) 에서의 접선의 방정식은

$ax+by=9$ 이고

이 접선이 점 $(6,\ 6)$ 을 지나므로

$$6a+6b=9 \qquad \therefore a+b=\frac{3}{2}$$

또, 점 (a, b) 는 원 위의 점이므로

$a^2+b^2=9$

이때, $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ 에서

$$9=\frac{9}{4}-2ab \qquad \therefore ab=-\frac{27}{8}$$

2. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점 $(1,\ \sqrt{3})$ 에 접하는 접선의 방정식은?

① $x + \sqrt{2}y = 4$ ② $x + \sqrt{3}y = 4$ ③ $\sqrt{2}x + y = 4$

④ $\sqrt{3}x + y = 4$ ⑤ $x - \sqrt{3} = 4$

해설

$(1,\ \sqrt{3})$ 이 원 위의 점이므로

$1 \cdot x + \sqrt{3} \cdot y = 4$

$\therefore x + \sqrt{3}y = 4$

3. 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $\mathrm{A}(1,2)$에서 그은 접선의 방정식은?

① $-2x+y+5=0$ ② $-2x+y-3=0$

③ $x-y+5=0$ ④ $x+2y+5=0$

⑤ $x+2y-5=0$

해설

접점이 주어졌을 때 접선의 방정식 구하는 공식

$x_1x+y_1y=r^2$을 이용하면,

$1\cdot x+2\cdot y=5 \quad \therefore\ x+2y-5=0$

4. 원 $x^2+y^2=4$ 에 접하고 기울기가 $-\sqrt{3}$ 인 직선의 방정식을 구하면?

① $y=-\sqrt{2}x\pm 1$　② $y=-\sqrt{2}x\pm 5$　③ $y=-\sqrt{3}x\pm 4$

④ $y=-\sqrt{3}x\pm 9$　⑤ $y=-\sqrt{5}x\pm 6$

해설

구하는 접선의 방정식은

$$y=\left(-\sqrt{3}\right)x\pm 2\sqrt{1+\left(-\sqrt{3}\right)^2}$$

$$\therefore y=-\sqrt{3}x\pm 4$$

5. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 접하고 기울기가 1 인 접선의 방정식은 $y = x \pm$ (   )이다. (   )안의 값을 구하면?

① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

직선과 원이 접하면 원의 중심에서 직선에 이르는 거리는 반지름과 같다.

$y = x + k$ 라 하면

$$\frac{|k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2,\ \ k = \pm 2\sqrt{2}$$

$\therefore\ \ y = x \pm 2\sqrt{2}$

6. 직선 $3x-y-1=0$ 에 평행하고 원 $x^2+y^2=10$ 에 접하는 접선의 방정식을 $y=mx\pm n$ 이라고 할 때, mn의 값은?

① $3\sqrt{10}$ ② $-3\sqrt{10}$ ③ 30

④ -30 ⑤ $\dfrac{10}{3}$

해설

접선이 직선 $3x-y-1=0$, 즉 $y=3x-1$에 평행하므로 접선의 기울기는 3이다.

공식을 이용하면 접선의 방정식은

$y=3x\pm\sqrt{10}\sqrt{1+3^2}$, $y=3x\pm 10$ 이므로

$m=3,\ n=10\ \therefore mn=30$

7. 원 $x^2+y^2=1$을 x축의 방향으로 2 만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행 이동하였더니 직선 $ax+y+1=0$과 접하였다. 이 때, 양수 a의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ④ 1 ⑤ $\sqrt{3}$

해설

원 $x^2+y^2=1$ 을
x축의 방향으로 2, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면,
$(x-2)^2+(y+1)^2=1$
이 원이 직선 $ax+y+1=0$과 접하므로
원의 중심 $(2,\ -1)$에서 직선까지의 거리는 원의 반지름의 길이와 같다.

즉, $\frac{|2a-1+1|}{\sqrt{a^2+1}}=1$ 에서 $|2a|=\sqrt{a^2+1}$,

$4a^2=a^2+1,\ a^2=\frac{1}{3}$

$\therefore\ a=\frac{\sqrt{3}}{3}\ (\because a>0)$

8. 점 (0, 2)를 지나고, 원 $x^2+y^2=1$에 접하는 직선의 방정식을 구하면?

① $y=-\sqrt{3}x+2,\ y=\sqrt{3}x+2$

② $y=-\sqrt{3}x-2,\ y=\sqrt{3}x+2$

③ $y=-\sqrt{3}x+2,\ y=\sqrt{3}x+3$

④ $y=-\sqrt{3}x+2,\ y=\sqrt{3}x-2$

⑤ $y=-\sqrt{3}x+4,\ y=\sqrt{3}x+2$

해설

$x^2+y^2=1\cdots$ ㉠
점 $(0,2)$를 지나는 직선의 기울기를 m이라 하면
$y-2=m(x-0)$
$\therefore\ y=mx+2\cdots$ ㉡
㉡을 ㉠에 대입하고 정리하면
$(m^2+1)x^2+4mx+3=0\cdots$ ㉢
㉡이 ㉠에 접하려면 방정식 ㉢이 중근을 가져야 하므로
$D/4=(2m)^2-3(m^2+1)=0$
$\therefore\ m^2=3$
$\therefore\ m=\pm\sqrt{3}$
이것을 ㉡에 대입하면 $y=\pm\sqrt{3}x+2$

해설

(다른 풀이1) 접점을 $(x_1,\ y_1)$ 이라면
접선방정식은 $x_1x+y_1y=1\cdots$ ㉣
점 (0, 2) 는 ㉣ 위의 점이므로
$2y_1=1\cdots$ ㉤
한편, $(x_1,\ y_1)$ 은 원 ㉠위의 점이므로
$x_1^2+y_1^2=1\cdots$ ㉥
㉥, ㉤에서 $(x_1,\ y_1)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right),\ \left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$
㉣에 대입하여 정리하면
$y=-\sqrt{3}x+2,\ y=\sqrt{3}x+2$
(다른 풀이2) 점 $(0,2)$를 지나는 직선의
기울기를 m이라 하면 $y-2=m(x-0)$
$\therefore\ mx-y+2=0\cdots$ ㉦
원 ㉠의 중심에서 ㉦까지의 거리가
원의 반지름과 같으므로 $\frac{2}{\sqrt{m^2+1}}=1$
$\therefore\ \sqrt{m^2+1}=2$
$\therefore\ m=\pm\sqrt{3}$
이것을 ㉦에 대입하면 $y=\pm\sqrt{3}x+2$

9. 점 A(0, a)에서 원 $x^2+(y-3)^2=8$에 그은 두 접선이 서로 수직 일 때, 양수 a의 값은?

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 10

해설

점 A(0, a)을 지나고 기울기가 m인 접선을
$y=mx+a$로 놓으면 원의 중심 (0, 3)에서
접선 $mx-y+a=0$ 까지의 거리는

$$\frac{|a-3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$$

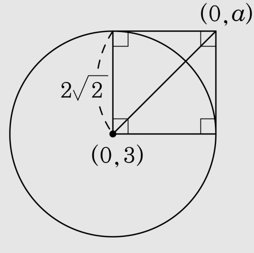
← 반지름 이 식의 양변을 제곱하면,
$(a-3)^2=8(m^2+1)$
$8m^2-a^2+6a-1=0$
m에 관한 이차방정식의 두 근을 α, β라 하면,
두 접선이 직교하기 위해서는 $\alpha\beta=-1$ 이어야 하므로

$$\frac{-a^2+6a-1}{8}=-1$$

$a^2-6a-7=0$, $(a-7)(a+1)=0$
$\therefore\ a=7\ (\because a>0)$

해설

원의 중심 (0, 3)에서 A(0, a)까지의 거리는
반지름을 한 변으로 하는 정사각형의 대각선의 길이와 같다. $\sqrt{0+(a-3)^2}=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$



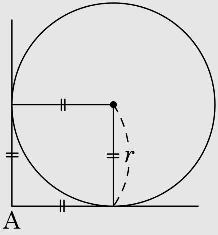
$a-3=\pm4$
$\therefore\ a=7$ 또는 $a=-1$
그런데 $a>0$ 에서 $a=7$

10. 좌표평면 위에 원 $(x-5)^2+(y-4)^2=r^2$과 원 밖의 점 A(2, 1)이 있다. 점 A에서 원에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 반지름의 길이 r의 값은?

① 3　② $\sqrt{10}$　③ $\sqrt{11}$　④ $\sqrt{13}$　⑤ $\sqrt{14}$

해설

두 접선이 서로 수직이면 그림처럼 한 변이 r인 정사각형이 된다.
따라서 원 중심에서 A까지의 거리는 $\sqrt{2}r$이 된다.



$\therefore \sqrt{(5-2)^2+(4-1)^2}=\sqrt{2}r$

$\therefore r=3$

11. 다음 두 원의 공통접선의 방정식을 구하면?

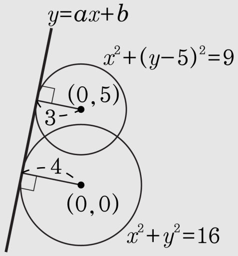
$$x^2 + y^2 = 16, \quad x^2 + (y-5)^2 = 9$$

① $y = \pm\sqrt{6}x + 10$　　② $y = \pm 2\sqrt{6}x + 20$

③ $y = \pm 3\sqrt{6}x + 30$　　④ $y = \pm 4\sqrt{6}x + 40$

⑤ $y = \pm 5\sqrt{6}x + 50$

해설



$x^2 + y^2 = 16 \cdots\cdots$ ㉠,

$x^2 + (y-5)^2 = 9 \cdots\cdots$ ㉡

공통접선의 방정식을

$y = ax + b \cdots\cdots$ ㉢ 로 놓는다.

이때, 원 ㉠과 직선 ㉢이 접하므로

$$\frac{|b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 4$$

$\therefore |b| = 4\sqrt{a^2+1} \cdots\cdots$ ㉣

또, 원 ㉡과 직선 ㉢도 접하므로

$$\frac{|-5+b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 3$$

$\therefore |b-5| = 3\sqrt{a^2+1} \cdots\cdots$ ㉤

그런데 $b \neq 0$ 이므로 ㉤ ÷ ㉣을 하면

$$\frac{|b-5|}{b} = \frac{3}{4}$$

$4|b-5| = 3|b|,\ 4(b-5) = \pm 3b$

$\therefore b = 20$ 또는 $b = \dfrac{20}{7}$

(i) $b = 20$ 일 때, ㉣에서 $\sqrt{a^2+1} = 5$

$\therefore a = \pm 2\sqrt{6}$

(ii) $b = \dfrac{20}{7}$ 일 때, ㉣에서

$\sqrt{a^2+1} = \dfrac{5}{7}$ 이고,

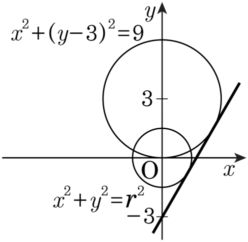
이것을 만족하는 실수 a 는 없다.

(i), (ii) 로부터 $a = \pm 2\sqrt{6}, b = 20$ 이므로

구하는 공통접선의 방정식은

$y = \pm 2\sqrt{6}x + 20$

12. 다음 그림과 같이 두 원 $x^2+y^2=r^2$, $x^2+(y-3)^2=9$ 의 공통 외접선 l의 y절편이 -3이다. 직선 l의 기울기를 m이라고 하면 $\frac{m^2}{r}$의 값은?(단, $0<r<3$)



① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{\frac{3}{2}}$

④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

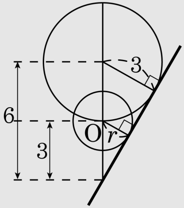
해설

y 절편이 -3 인 직선의 방정식을 $y=mx-3$ 이라 하면

$x^2+(y-3)^2=9$와 l 이 접하므로,

$$\frac{|-3-3|}{\sqrt{m^2+1^2}}=3, \quad m^2=3$$

그리고 원만 따로 떼어내어 생각해 보면, 그림과 같이 두 직각삼각형은 닮음으로 닮음비가 $2:1$ 이다.



$$6:3=3:r \quad \therefore\ r=\frac{3}{2}$$

$$\therefore\ \frac{m^2}{r}=2$$

13. $(k,\ 0)$에서 $x^2+y^2-2y=0$에 그은 두 접선이 이루는 각의 크기가 $45°$일 때, 양수 k의 값을 구하면?

① $k=-\sqrt{2}+1$ ② $k=\sqrt{2}+1$ ③ $k=\sqrt{2}-1$

④ $k=2\sqrt{2}+1$ ⑤ $k=\sqrt{2}+2$

해설

$x^2+y^2-2y=0$에서 $x^2+(y-1)^2=1$이므로
두 접선 중 하나는 x축이고,
두 접선이 이루는 각의 크기가 $45°$이므로
다른 하나의 접선의 기울기는 -1이다. $(\because\ k>0)$
따라서 접선의 방정식을 $y=-x+b$로 놓으면 $x+y-b=0$
이 때, 원의 중심 $(0,1)$에서 이 직선까지의 거리가
원의 반지름과 같으므로

$$\frac{|0+1-b|}{\sqrt{1^2+1^2}}=1$$

$\therefore |1-b|=\sqrt{2}$

$b>1$이므로 $b-1=\sqrt{2}$

$\therefore b=\sqrt{2}+1$

따라서 접선의 방정식은 $y=-x+\sqrt{2}+1$이고
점 $(k,0)$을 지나므로

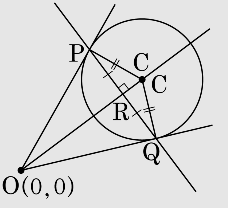
$0=-k+\sqrt{2}+1$ $\quad\therefore k=\sqrt{2}+1$

14. 중심이 C(4, 3) 이고 반지름의 길이가 2인 원이 있다. 원점에서 이 원에 그은 두 접선의 접점을 각각 P, Q 라 할 때, 직선 PQ 의 방정식을 구하면?

① $4x+3y=25$　② $4x+3y=21$　③ $3x+4y=16$
④ $3x+4y=25$　⑤ $3x+4y=21$

해설

구하고자 하는 직선
$y=ax+b$ 는 원점과
원의 중심인 (4, 3) 을 잇는 직선에 대해서
수직이므로,

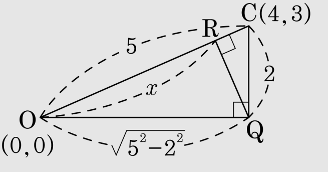


$a\times\frac{3}{4}=-1$

$\therefore a=-\frac{4}{3}$

$\therefore\ y=-\frac{4}{3}x+b,\ 4x+3y-3b=0$

직선 OC와 직선 PQ의 교점을 R
이라 하면
$\triangle$OCQ 와 $\triangle$OQR 은 서로 닮음이
므로,



$5\ :\ \sqrt{21}=\sqrt{21}\ :\ x$

$\therefore\ x=\frac{21}{5}$

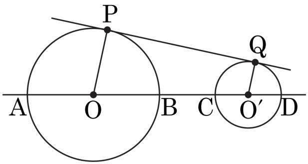
직선 PQ와 원점간의 거리가 $\frac{21}{5}$ 이므로

$$\frac{|-3b|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{21}{5}$$

$|3b|=21,\ b>0$ 이므로 $3b=21$

$\therefore\ 4x+3y=21$

15. 다음 그림과 같이 두 개의 원과 두 원의 중점 O, O′ 을 지나는 직선과의 교점을 A, B, C, D 라 하고, 1 개의 공통외접선이 두 원에 접하는 점을 P, Q 라 하자. $\overline{OO'} = p$, $\overline{PQ} = q$ 라 할 때, $\overline{AC}$ 와 $\overline{BD}$ 를 두 근으로 하는 이차방정식은?



① $x^2 + 2px + q^2 = 0$

② $x^2 - 2px + q^2 = 0$

③ $x^2 - px + q = 0$

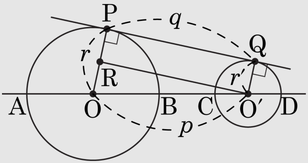
④ $x^2 - p^2x + q^2 = 0$

⑤ $x^2 - px + q^2 = 0$

해설

다음 그림에서 $\overline{OP} = r$, $\overline{O'Q} = r'$ 라 하고

점 O′ 에서 $\overline{PQ}$ 와 평행한 직선과 $\overline{OP}$ 와의 교점을 R 이라 하자.



$\overline{OR} = r - r'$, $\overline{AC} = p + r - r'$,

$\overline{BD} = p - r + r'$

$\therefore\ \overline{AC} + \overline{BD} = 2p$

$\therefore\ \overline{AC} \cdot \overline{BD} = p^2 - (r - r')^2 = \overline{O'R}^2 = q^2$

따라서 $x^2 - 2px + q^2 = 0$