1. 직선 $x+3y-k=0$이 원 $(x-5)^2+y^2=3$의 넓이를 이등분할 때, k의 값은?

① -1　　② 0　　③ 1　　④ 3　　⑤ 5

해설

직선이 원의 넓이를 이등분하려면 직선이 원의 중심을 지나면 된다.
따라서 원의 중심 $(5,\ 0)$이 직선 위에 있으므로 $5-k=0$
$\therefore\ k=5$

2. 원 $x^2+y^2+2y=0$과 직선 $y=mx-3$이 만나지 않을 때, 상수 m 의 범위를 구하면?

① $-\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$　　② $-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$

③ $-1<m<1$　　④ $-2<m<2$

⑤ $-3<m<3$

해설

$$\begin{cases} x^2+y^2+2y=0 & \cdots ㉠ \\ y=mx-3 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$\left(m^2+1\right)x^2-4mx+3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$\frac{D}{4}=(-2m)^2-3\left(m^2+1\right)=m^2-3$

원과 직선이 만나지 않으려면 $\frac{D}{4}=m^2-3<0$

$\therefore -\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$

해설

㉠, ㉡을 변형하면

각각 $x^2+(y+1)^2=1, mx-y-3=0$

이 때, 원의 중심 $(0,-1)$ 에서

직선 $y=mx-3$ 에 이르는 거리를 d 라고 하면

$d=\frac{|1-3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{m^2+1}}$

원과 직선이 만나지 않으려면

$\frac{2}{\sqrt{m^2+1}}>1$ 이어야 하므로

$\sqrt{m^2+1}<2, m^2<3$

$\therefore -\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$

3. 원 $(x-2a)^2+y^2=4a^2$ 과 직선 $y=x+2$ 가 만나지 않을 때, 상수 a 의 범위를 구하면?

① $1-\sqrt{2}<a<1+\sqrt{2}$ ② $2-\sqrt{2}<a<2+\sqrt{2}$
③ $3-\sqrt{2}<a<3+\sqrt{2}$ ④ $4-\sqrt{2}<a<4+\sqrt{2}$
⑤ $5-\sqrt{2}<a<5+\sqrt{2}$

해설

$(x-2a)^2+y^2=4a^2 \cdots\cdots$ ㉠
$y=x+2 \cdots\cdots$ ㉡
에서 ㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면
$2x^2+4(1-a)x+4=0$
$\therefore x^2+2(1-a)x+2=0$
이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면
$\frac{D}{4}=(1-a)^2-2=a^2-2a-1$
㉠, ㉡이 만나지 않으려면
$\frac{D}{4}=a^2-2a-1<0$
$\therefore 1-\sqrt{2}<a<1+\sqrt{2}$
(다른해설) 원의 중심 $(2a,0)$ 에서
직선 $x-y+2=0$ 에 이르는 거리를 d 라고 하면
$d=\frac{|2a-0+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|2a+2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}|a+1|$
원과 직선이 만나지 않으려면
$\sqrt{2}|a+1|=|2a|$
양변을 제곱하여 정리하면
$a^2-2a-1<0 \quad \therefore 1-\sqrt{2}<a<1+\sqrt{2}$

4. 직선 $y = mx + 3$ 이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 와 서로 만나지 않을 때, m 값의 범위를 구하면?

① $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$

② $-2\sqrt{2} \le m \le 2\sqrt{2}$

③ $-2\sqrt{3} < m < 2\sqrt{3}$

④ $m \le -2\sqrt{2},\ m \ge 2\sqrt{2}$

⑤ $m < -3\sqrt{2},\ m > 3\sqrt{2}$

해설

원과 직선이 서로 만나지 않으려면 원의 중심부터 직선까지 거리가 반지름보다 커야 한다.

$\therefore \quad \dfrac{|m \times 0 + (-1) \times 0 + 3|}{\sqrt{m^2 + 1}} > 1$

$\Rightarrow \quad m^2 + 1 < 9$

$\Rightarrow \quad -2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$

5. 좌표평면에서 점 $(2, -3)$ 을 중심으로 하고 직선 $3x + 4y - 9 = 0$ 에 접하는 원의 넓이는?

① 4π ② 6π ③ 8π ④ 9π ⑤ 12π

해설

점$(2, -3)$ 에서 직선 $3x + 4y - 9 = 0$ 까지의 거리가 구하는 원의 반지름이므로

$$r = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) - 9|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-15|}{5} = 3$$

따라서 원의 넓이는 9π

6. 중심이 C(1, 2) 이고, 직선 L : $x+2y=0$ 에 접하는 원의 방정식을 구하면?

① $(x-1)^2+(y-2)^2=5$
② $(x-1)^2+(y-2)^2=6$
③ $(x-1)^2+(y-2)^2=7$
④ $(x-1)^2+(y-2)^2=8$
⑤ $(x-1)^2+(y-2)^2=9$

해설

중심에서 접선까지의 거리가
원의 반지름과 같으므로
반지름은 $\frac{|1+4|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$
$\therefore$ 구하는 원의 방정식은
$(x-1)^2+(y-2)^2=5$

7. 원 $(x-1)^2+(y+1)^2=1$ 과 직선 $3x+4y+a=0$ 이 서로 다른 두 점에서 만날 때, a 의 값 중 정수들의 총합을 구하면?

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

해설

원과 직선이 두 점에서 만나려면 원 중심에서 직선까지 거리가 반지름보다 작아야 한다.

$$\Rightarrow \quad \frac{|3\times 1+4\times(-1)+a|}{\sqrt{3^2+4^2}}<1$$

$\Rightarrow \quad (a-1)^2-25<0$

$\Rightarrow \quad -4<a<6$

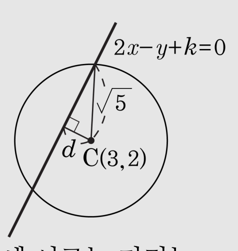
$\therefore$ 정수 $a=-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

모두 합하면 9

8. 점 A(5, 3), B(1, 1)을 지름의 양 끝점으로 하는 원과 직선 $y = 2x + k$가 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 k의 값의 범위는?

① $-12 < k < -2$　② $-11 < k < -1$　③ $-10 < k < 0$
④ $-9 < k < 1$　⑤ $-8 < k < 3$

해설



두 점 A(5, 3), B(1, 1)의 중점이 (3, 2)이므로 원의 중심의 좌표는(3, 2) 점B와 중심 사이의 거리는 $\sqrt{(3-1)^2+(2-1)^2} = \sqrt{5}$

따라서 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$

원의 방정식은$(x-3)^2+(y-2)^2 = (\sqrt{5})^2$

원의 중심 C(3, 2)에서 직선 $2x-y+k=0$에 이르는 거리는

$$d = \frac{|2\cdot 3 - 2 + k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{|k+4|}{\sqrt{5}} < \sqrt{5}$$

$|k+4| < 5$, $-5 < k+4 < 5$

$\therefore\ -9 < k < 1$

9. 반지름의 길이가 2 이고, 중심이 $(4,\ 4)$ 인 원이 있다. 원점 O 와 중심을 잇는 선분이 원과 만나는 점을 $(a,\ b)$ 라고 할 때, a 의 값은?

① 3　　② $4-\sqrt{2}$　　③ $1+\sqrt{2}$

④ $2+\sqrt{2}$　　⑤ $3-\sqrt{2}$

해설

원의 방정식을 구해보면

$(x-4)^2+(y-4)^2=2^2\ \cdots$ ①

원점과 $(4,\ 4)$ 를 잇는 선분의 방정식 :

$y=x\ \cdots$ ②

①, ② 를 연립하면,

$x=4\pm\sqrt{2},\ y=4\pm\sqrt{2}$

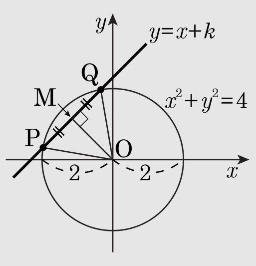
$\therefore (a,b)=(4-\sqrt{2},\ 4-\sqrt{2})$

$(\because\ 0<a<4,\ 0<b<4)$

10. 직선 $y = x + k$가 원 $x^2 + y^2 = 4$에 의하여 잘린 현 $\overline{PQ}$의 길이가 2일 때, k의 값은?

① $\pm\sqrt{5}$　② $\pm\sqrt{6}$　③ $\pm\sqrt{7}$
④ $\pm 2\sqrt{2}$　⑤ ± 3

해설



$\overline{PQ} = 2$이므로 $\overline{PQ}$의 중점을 M이라 할 때, $\overline{PM} = 1$
원의 반지름의 길이가 2이므로 $\overline{OP} = 2$
따라서 $\overline{OM} = \sqrt{OP^2 - PM^2}$
$= \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$
이때 원과 직선 $x - y + k = 0$
사이의 거리는 $\overline{OM}$의 길이와 같으므로
$\dfrac{|k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{3},\ |k| = \sqrt{6}, k = \pm\sqrt{6}$

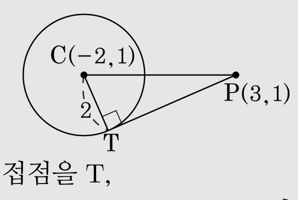
11. 원 $x^2+y^2+4x-2y+1=0$ 밖의 한 점 $\mathrm{P}(3,1)$ 에서 이 원에 그은 접선의 길이를 구하면?

① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $\sqrt{11}$ ④ $\sqrt{17}$ ⑤ $\sqrt{21}$

해설

원 $x^2+y^2+4x-2y+1=0$ 을 표준형으로 고치면

$(x+2)^2+(y-1)^2=4$



아래 그림과 같이 원 밖의 한 점 $\mathrm{P}(3,1)$ 에서 이 원에 접선을 그어 그 접점을 T, 원의 중심을 $\mathrm{C}(-2,1)$ 이라고 하면 $\triangle\mathrm{PTC}$ 는 $\angle\mathrm{PTC}=90°$ 인 직각삼각형이므로 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{PT}}^2=\overline{\mathrm{PC}}^2-\overline{\mathrm{CT}}^2$

$=\left\{\sqrt{(3+2)^2+(1-1)^2}\right\}^2-2^2=21$

$\therefore \overline{\mathrm{PT}}=\sqrt{21}$

12. 직선 $(a+2)x+(a-1)y-3=0$ 이 원 $2x^2+2y^2-4x+8y+3=0$ 의 넓이를 이등분할 때, a 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

직선이 원의 넓이를 이등분하려면 직선이 원의 중심을 지나면 된다.

$2x^2+2y^2-4x+8y+3=0$

$2(x-1)^2+2(y+2)^2=7$

$(x-1)^2+(y+2)^2=\frac{7}{2}$

따라서 원의 중심 $(1,-2)$ 가 직선 위에 있으므로 $(a+2)\times1+(a-1)\times(-2)-3=0$

$\therefore\ a=1$

13. 원 $x^2 + y^2 = 1$과 직선$ax + by + c = 0$에 대하여 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, a, b, c 는 모두 양수이고 $b \geq a$)

보기

㉠ $c = b$이면 두 점에서 만난다.

㉡ $c = 2b$이면 만나지 않는다.

㉢ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$이면 한 점에서 만난다.

① ㉠　　② ㉠, ㉡　　③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

원의 중심이 $(0,\ 0)$이므로 원의 중심에서 직선 $ax + by + c = 0$ 에 이르는 거리를 d라 하면

$d = \dfrac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

㉠ $d = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} < 1$ 그러므로 교점은 2개다.

즉, $n(A \cap B) = 2$

㉡ $d = \dfrac{2b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \geq \dfrac{2b}{\sqrt{2}b} > 1$ ($\because\ b \geq a$)

그러므로 교점은 없다.

㉢ $d = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 1$

그러므로 교점은 1 개다.

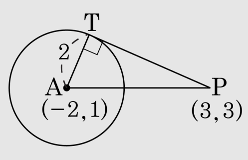
따라서 ㉠, ㉡, ㉢ 모두 참이다.

14. 점 (3, 3) 에서 원 $x^2+y^2+4x-2y+1=0$ 에 그은 접선의 길이는?

① 5　② $\sqrt{26}$　③ 6　④ $\sqrt{37}$　⑤ 7

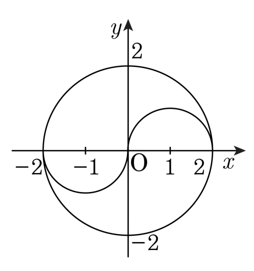
해설

준식에서 $(x+2)^2+(y-1)^2=2^2$ 이므로
중심이 (−2, 1) 반지름의 길이가 2 인 원이다.



$$\overline{PT}^2=\overline{PA}^2-\overline{AT}^2$$
$$=(3+2)^2+(3-1)^2-2^2$$
$$=25$$
$\therefore\ \overline{PT}=5$

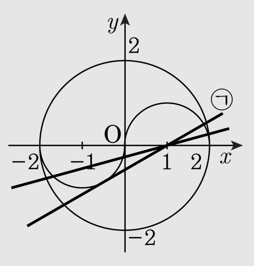
15. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 원과 반원으로 이루어진 태극문양이 있다. 태극문양과 직선 $y = a(x-1)$이 서로 다른 다섯 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값의 범위는?



① $0 < a < \frac{\sqrt{2}}{3}$　② $0 < a < \frac{\sqrt{3}}{3}$
③ $0 < a < \frac{2}{3}$　④ $0 < a < \frac{\sqrt{5}}{3}$
⑤ $0 < a < \frac{\sqrt{6}}{3}$

해설

직선 $y = a(x-1)$의 그래프는 실수 a의 값에
관계없이 항상 점 $(1, 0)$을 지나므로
직선이 태극문양과 서로 다른 다섯 점에서 만나는 경우는 다음 그림과 같이 x축과 직선 ㉠사이를 움직이는 직선일 때이다.



이때, 직선의 기울기는 양수이므로 $a > 0$
직선과 제3사분면의 반원이 접하는 경우,
점 $(-1, 0)$과 직선 $y = a(x-1)$,
즉 $ax - y - a = 0$사이의 거리가 원의 반지름의 길이 1과 같으므로

$\frac{|-a-0-a|}{\sqrt{a^2+1}} = 1, |2a| = \sqrt{a^2+1}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$4a^2 = a^2 + 1, a^2 = \frac{1}{3}$

$\therefore a = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

그런데 $a > 0$이므로 $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$

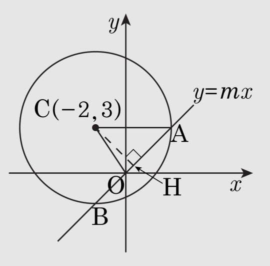
따라서, 직선과 태극문양이 서로 다른 다섯 점에서 만나기 위한 실수 a의 값의 범위는

$0 < a < \frac{\sqrt{3}}{3}$이다.

16. 직선 $y = mx$ 와 원 $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$ 의 두 교점을 A, B 라 할 때, 현 AB 의 길이가 최소가 되도록 하는 상수 m 의 값은?

① $-\frac{3}{2}$　② $-\frac{2}{3}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{3}{2}$

해설



그림과 같이 원의 중심 C(−2, 3) 에서
직선 $y = mx$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$\triangle \mathrm{CAH} \text{ 에서 } \overline{\mathrm{AH}}^2 = \overline{\mathrm{CA}}^2 - \overline{\mathrm{CH}}^2 = 25 - \overline{\mathrm{CH}}^2$$

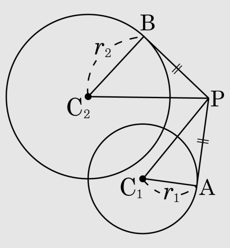
따라서 $\overline{\mathrm{CH}}$ 가 최대일 때, $\overline{\mathrm{AH}}$가 최소이다.
$\triangle \mathrm{COH}$ 에서 $\overline{\mathrm{CH}}^2 = \overline{\mathrm{CO}}^2 - \overline{\mathrm{OH}}^2$
$\overline{\mathrm{CH}}$가 최대가 되기 위해서는
$\overline{\mathrm{CH}} = \overline{\mathrm{CO}}$ $(\overline{\mathrm{OH}} = 0)$ 일 때이므로
$\overline{\mathrm{CO}} \perp \overline{\mathrm{AB}}$
직선 OC 의 기울기는 $-\frac{3}{2}$ 이므로 $m = \frac{2}{3}$

17. 한 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$ 에서 두 원 $(x-4)^2+(y+1)^2=4$ 와 $(x-2)^2+(y-2)^2=9$ 에 그은 각각의 접선과 두 원과의 접점을 A, B 라 할 때, $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}$ 인 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$ 의 자취를 구하면?

① $2a-3b-7=0$ ② $2a-3b+7=0$
③ $a^2+b^2=3$ ④ $a^2+b^2=4$
⑤ $a^2+b^2=5$

해설

$(x-4)^2+(y+1)^2=4,\ (x-2)^2+(y-2)^2=9$
문제의 조건에서
$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}$이므로 $(\overline{\mathrm{PA}})^2=(\overline{\mathrm{PB}})^2$
$\Rightarrow\ (\overline{\mathrm{PC}_1})^2-{r_1}^2=(\overline{\mathrm{PC}_2})^2-{r_2}^2$



원의 중심 $\mathrm{C}_1=(4,\ -1),\ \mathrm{C}_2=(2,\ 2)$,
반지름 $r_1=2,\ r_2=3$
$\therefore\ (a-4)^2+(b+1)^2-4=(a-2)^2+(b-2)^2-9$
$\therefore$ 위를 정리하면 $2a-3b-7=0$

18. 다음 중 원 $(x+1)^2+y^2=1$에 접하고 원 $(x-1)^2+y^2=1$의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식은?

① $x+\sqrt{3}y=1$ ② $\sqrt{3}x+y=1$ ③ $x-\sqrt{3}y=-1$
④ $\sqrt{3}x-y=-3$ ⑤ $x+y=2$

해설

원 $(x-1)^2+y^2=1$ 의 넓이를 이등분하기
위해서는 중심 $(1,0)$을 지나야 한다.
곧, $(1,0)$을 지나는 원 $(x+1)^2+y^2=1$의 접선을 구하면 된다.
기울기를 m 이라 두면, 구하는 직선은
$y=m(x-1)$, $mx-y-m=0$
중심$(-1,0)$에서 이 직선에 이르는 거리가
반지름 1과 같으면 된다.

$$\frac{|-m-m|}{\sqrt{m^2+1}}=1$$

$$\therefore\ m=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

대입하여 정리하면,
$x+\sqrt{3}y=1$ 또는 $x-\sqrt{3}y=1$