

1. $x^2 + y^2 + 8x - 6y - 1 = 0$ 과 중심이 같고, 원점을 지나는 원의 반지름의 길이를 구하면?

① 4

② 5

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + 8x - 6y - 1 &= 0 \\ \Rightarrow (x + 4)^2 + (y - 3)^2 &= 26 \\ \text{중심 : } (-4, 3) \\ \therefore (x + 4)^2 + (y - 3)^2 &= r^2, \\ (0, 0) \text{을 지나므로} \\ r &= 5 (\because r > 0)\end{aligned}$$

2. 이차방정식 $x^2 - ay^2 - 4x + 2y + k = 0$ 이 원을 나타낼 때 두 괄호에 들어갈 알맞은 값의 합을 구하여라.

$a = (\quad \quad \quad), k < (\quad \quad \quad)$

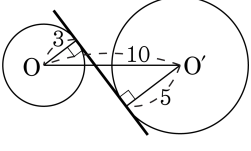
▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

원의 방정식이 되기 위해서는 x^2 의 계수와 y^2 의 계수가 같아야 하므로 $a = -1$
또한, 준식을 표준형으로 나타내면,
 $x^2 - 4x + y^2 + 2y + k = 0$ 에서
 $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5 - k$
여기서, $5 - k > 0$ 이어야 하므로 $k < 5$

4. 다음 그림의 두 원 O와 O'에서 공통내접선의 길이를 구하여라.



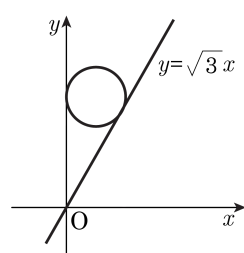
▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

공통내접선의 길이는 $\sqrt{10^2 - (3 + 5)^2} = 6$

5. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에서 중심이 1 사분면 위에 있고, 반지름의 길이가 1 인 원이 y 축과 직선 $y = \sqrt{3}x$ 에 동시에 접한다. 이 원의 중심의 좌표를 (a, b) 라고 할 때, $a + b$ 의 값은?



- ① 2 ② $2 + \sqrt{2}$
 ③ $3 + \sqrt{3}$ ④ 5

- ⑤ $5 + \sqrt{5}$

해설

y 축에 접하고 반지름이 1 이므로
 주어진 원의 방정식은
 $(x - 1)^2 + (y - b)^2 = 1$ 이라 하면
 $y = \sqrt{3}x$ 가 이원에 접하므로
 $(x - 1)^2 + (\sqrt{3}x - b)^2 = 1$
 $x^2 - 2x + 1 + 3x^2 - 2\sqrt{3}bx + b^2 = 1$
 $4x^2 - 2(1 + \sqrt{3}b)x + b^2 = 0$
 이 방정식이 중근을 가지므로
 $(1 + \sqrt{3}b)^2 - 4b^2 = 0$
 $3b^2 + 2\sqrt{3}b + 1 - 4b^2 = 0, b^2 - 2\sqrt{3}b - 1 = 0$
 $\therefore b = \sqrt{3} \pm \sqrt{3+1} = \sqrt{3} \pm 2$
 그런데 $b > 0$ 이므로 $b = \sqrt{3} + 2$
 $\therefore a = 1, b = 2 + \sqrt{3}$ 이므로 $a + b = 3 + \sqrt{3}$

6. 두 원 $x^2 + y^2 - 5 = 0$, $x^2 + y^2 - 3x - y - 4 = 0$ 의 교점과 점(1,1)을 지나는 원의 방정식이 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 일 때, $A + B - C$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$$x^2 + y^2 - 5 = 0, x^2 + y^2 - 3x - y - 4 = 0$$

교점을 지나는 원의 방정식은

$$(x^2 + y^2 - 5)m + x^2 + y^2 - 3x - y - 4 = 0$$

의 꼴이고, 이 원이 점 (1,1)을지나므로

$$(1 + 1 - 5)m + 1 + 1 - 3 - 1 - 4 = 0$$

$$\therefore m = -2$$

이 값을 대입하고 정리하면

$$x^2 + y^2 + 3x + y - 6 = 0 \text{ 이다.}$$

$$\therefore A = 3, B = 1, C = -6$$

$$\text{그러므로 } A + B - C = 10$$

7. 원 $x^2 + y^2 + 2ax + 2y - 6 = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 + 2x - 2ay - 2 = 0$ 의 둘레를 이등분할 때, a^2 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 9

해설

원 $x^2 + y^2 + 2ax + 2y - 6 = 0$ 이
원 $x^2 + y^2 + 2x - 2ay - 2 = 0$ 의
둘레를 이등분하려면
두 원의 교점을 지나는 직선이
원 $x^2 + y^2 + 2x - 2ay - 2 = 0$ 의 중심을 지나야
한다. 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은
 $(x^2 + y^2 + 2ax + 2y - 6) - (x^2 + y^2 + 2x - 2ay - 2) = 0$
 $2(a - 1)x + 2(a + 1)y - 4 = 0$
 $\therefore (a - 1)x + (a + 1)y - 2 = 0 \dots \textcircled{1}$
또, 원 $x^2 + y^2 + 2x - 2ay - 2 = 0$ 을
표준형으로 바꾸면,
 $(x + 1)^2 + (y - a)^2 = a^2 + 3$ 이므로
중심의 좌표는 $(-1, a)$ 이다. 이 때, 직선 $\textcircled{1}$ 이
점 $(-1, a)$ 를 지나야 하므로 $-(a - 1) + a(a + 1) - 2 = 0$
 $a^2 - 1 = 0,$
 $\therefore a^2 = 1$