

1. 두 점 $A(-1, 4), B(6, 3)$ 에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 $P(a, b)$ 라 할 때, $a + b$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$P = (a, 0)$ 이므로 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 에서
 $(a + 1)^2 + 4^2 = (a - 6)^2 + 9, a = 2$
 $\therefore P = (2, 0)$
 $a + b = 2$

2. 직선 $ax + by + c = 0$ 은 $ab > 0$, $bc < 0$ 일 때, 몇 사분면을 지나지 않는가?

- ① 제 1 사분면
- ② 제 2 사분면
- ③ 제 3 사분면
- ④ 제 4 사분면
- ⑤ 제 1 사분면, 제 2 사분면

해설

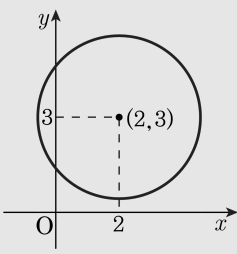
$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ 에서
 $-\frac{a}{b} < 0$ ($\because ab > 0$)
 $-\frac{c}{b} > 0$ ($\because bc < 0$)이므로
제 1 사분면, 제 2 사분면, 제 4 사분면을 지난다.

3. 원 $x^2 + y^2 - 4x - 6y - c = 0$ 이 y 축과 만나고 x 축과는 만나지 않을 때, 정수 c 의 개수는?

- ① 2 개 ② 3 개 ③ 4 개 ④ 5 개 ⑤ 6 개

해설

원의 방정식
 $x^2 + y^2 - 4x - 6y - c = 0$
을 표준형으로 바꾸면
 $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = c + 13$ 이므로
중심이 $(2, 3)$ 반지름의 길이가 $\sqrt{c + 13}$
인 원이 된다.
다음 그림과 같이 y 축과는 만나고,
 x 축과는 만나지 않으므로
 $2 \leq \sqrt{c + 13} < 3$ 에서 $-9 \leq c < -4$
 $\therefore$ 정수 c 의 개수는 $-9, -8, -7, -6, -5$ 의 5 개



4. 두 점 $(1, 2)$, $(2, 1)$ 을 지나고, x 축에 접하는 원은 두 개있다. 두 원의 중심 사이의 거리는?

① 4 ② 5 ③ $4\sqrt{2}$ ④ 6 ⑤ $4\sqrt{3}$

해설

그 원을 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = b^2$ 이라 하면
(1, 2), (2, 1)을 지나므로
 $(1-a)^2 + (2-b)^2 = b^2$, $(2-a)^2 + (1-b)^2 = b^2$
 $1-2a+a^2+4-4b=0 \cdots \textcircled{1}$
 $4-4a+a^2+1-2b=0 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{2} \times 2 - \textcircled{1}$
 $a^2-6a+5=0$, $(a-1)(a-5)=0$
 $\therefore a=1$ 또는 $a=5$
i) $a=1$ 이면 $\textcircled{1}$ 에서 $b=1$
ii) $a=5$ 이면 $\textcircled{1}$ 에서 $b=5$
 $\therefore$ 두 원의 중심은 $(1, 1)$, $(5, 5)$ 이다.
중심거리
 $= \sqrt{(5-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

5. 부등식 $(a - b)x + (b - 2a) > 0$ 의 해가 $x > \frac{3}{2}$ 일 때, 부등식 $ax^2 + (a + 2b)x + (a + 3b) < 0$ 의 해를 구하면?

- ① $3 < x < 7$ ② $-3 < x < 1$ ③ $x < 2, x > 3$
④ $-1 < x < 2$ ⑤ $x < -2, x > 4$

해설

$(a - b)x > 2a - b$ 의 해가 $x > \frac{3}{2}$ 이라면

$a - b > 0, \frac{2a - b}{a - b} = \frac{3}{2}$ 이어야 한다.

$\therefore a = -b, b < 0$

준 부등식 $-bx^2 + bx + 2b < 0$ 에서

$x^2 - x - 2 < 0, (x - 2)(x + 1) < 0$

$\therefore -1 < x < 2$

6. 부등식 $x^2 - 4|x| - 5 < 0$ 을 풀면?

- ① $-5 < x < 5$ ② $-5 < x < 0$ ③ $-5 < x < 1$
④ $-1 < x < 5$ ⑤ $-1 < x < 6$

해설

(i) $x \geq 0$ 일 때, $|x| = x$ 이므로

$$x^2 - 4x - 5 < 0, (x - 5)(x + 1) < 0$$

$$-1 < x < 5$$

이 때 $x \geq 0$ 과의 공통범위는 $0 \leq x < 5$

(ii) $x < 0$ 일 때

$$x^2 + 4x - 5 < 0, (x + 5)(x - 1) < 0$$

$$-5 < x < 1$$

이 때 $x < 0$ 과 공통 범위는 $-5 < x < 0$

(i), (ii)에서 $-5 < x < 5$

7. a 가 실수일 때 두 이차방정식 $x^2 + ax + a = 0$, $x^2 - 2ax + 2a + 3 = 0$ 에서 한 방정식만이 허근을 가질 a 의 범위는 ?

- ① $-1 < a < 4$
② $-1 < a < 0$ 또는 $3 < a < 4$
③ $-1 \leq a \leq 4$
④ $-1 < a \leq 0$ 또는 $3 \leq a < 4$
⑤ $3 \leq x \leq 4$

해설

$$x^2 + ax + a = 0 \quad \cdots \textcircled{A}$$

$$x^2 - 2ax + 2a + 3 = 0 \quad \cdots \textcircled{B}$$

①에서 허근을 가지려면

$$D = a^2 - 4a < 0$$

$$\therefore 0 < a < 4$$

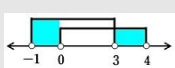
②에서 허근을 가지려면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 2a - 3 < 0$$

$$(a + 1)(a - 3) < 0$$

$$\therefore -1 < a < 3$$

한쪽만이 허근을 가지려면,



$$\therefore -1 < a \leq 0 \text{ 또는 } 3 \leq a < 4$$

8. 이차함수 $y = x^2 - ax + 4$ 의 그래프가 직선 $y = x - 2$ 보다 위쪽에 있는 x 의 값의 범위가 $x < 2$ 또는 $x > 3$ 일 때, 상수 a 의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$x^2 - ax + 4 > x - 2$ 에서 $x^2 - (a + 1)x + 6 > 0$ ㉠
한편, 해가 $x < 2$ 또는 $x > 3$ 이고 이차항의 계수가 1인 이차부
등식은 $(x - 2)(x - 3) > 0$
 $\therefore x^2 - 5x + 6 > 0$ ㉡
따라서 ㉠, ㉡이 일치하므로 $a + 1 = 5$
 $\therefore a = 4$

9. 포물선 $y = x^2 - 2x + 3$ 이 직선 $y = 2x + k$ 보다 위쪽에 있도록 실수 k 의 범위를 구하면?

- ① $k < -1$ ② $-1 < k < 0$ ③ $k > 0$
④ $0 < k < 1$ ⑤ $k > 1$

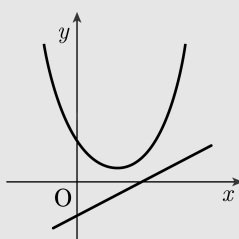
해설

포물선 $y = x^2 - 2x + 3$ 이 직선 $y = 2x + k$ 보다 위쪽에 있으려면
위 그림에서 모든 실수 x 에 대하여
부등식 $x^2 - 4x + 3 - k > 0$ 가 항상 성립
해야 한다.

즉 $x^2 - 4x + 3 - k > 0$ 에서
판별식이 0 보다 작아야 하므로

$$\frac{D}{4} = 4 - (3 - k) < 0$$

$$\therefore k < -1$$



10. 세 변의 길이가 $x-1$, x , $x+1$ 인 삼각형이 둔각삼각형이 되도록 하는 x 의 값의 범위가 $a < x < b$ 라 할 때, 방정식 $ax^2 - 3x + b = 0$ 의 두 근의 곱은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x-1$, x , $x+1$ 은 삼각형의 세 변이므로
 $x-1 > 0$, $x > 0$, $x+1 > 0$, $x-1+x > x+1 \therefore x > 2 \dots\dots ㉠$
한편, 둔각삼각형이 되려면
 $(x-1)^2 + x^2 < (x+1)^2$
 $x^2 - 4x < 0$ 에서 $0 < x < 4 \dots\dots ㉡$
㉠, ㉡에서 $2 < x < 4$
 $\therefore a = 2$, $b = 4$
따라서 $ax^2 - 3x + b = 0$ 의 두 근의 곱은
 $\frac{b}{a} = \frac{4}{2} = 2$

11. 이차방정식 $ax^2 - (a+1)x - 4 = 0$ 의 한 근이 -1 과 0 사이에 있고, 다른 한 근이 1 과 2 사이에 있을 때, 상수 a 의 범위는?

- ㉠ $a > 3$ ㉡ $0 < a < 3$ ㉢ $a \geq \frac{1}{2}$
㉣ $a \geq 1$ ㉤ $-1 < a < 3$

해설

주어진 조건을 만족시키려면 $f(-1) > 0, f(0) < 0, f(1) < 0, f(2) > 0$ 이어야 한다.

따라서 $f(-1) = a + (a+1) - 4 > 0$ 에서

$$2a > 3 \quad \therefore a > \frac{3}{2} \cdots \textcircled{㉠}$$

$$f(2) = 4a - 2a - 2 - 4 > 0 \text{ 에서}$$

$$2a > 6 \quad \therefore a > 3 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 모두 만족해야 하므로

구하는 a 의 값의 범위는 $a > 3$

12. 좌표평면 위의 세 점 A(-1, 2), B(x, 0), C(3, 1)에 대하여 $\angle ABC$ 가 직각일 때, 실수 x 의 값의 합은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$\triangle ABC$ 는 $\angle B$ 가 직각인 직각삼각형이므로

피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$ 이 성립한다.

$$(x+1)^2 + 4 + (x-3)^2 + 1 = 16 + 1$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

$\therefore$ 근과 계수와의 관계에 의하여 실수 x 의 값의 합은 2이다.

13. 두 점 $A(1, 2), B(3, -2)$ 를 이은 $\overline{AB}$ 의 B 방향으로의 연장선 위에 $\overline{AC} : \overline{BC} = 2 : 1$ 을 만족하는 점 C 의 좌표를 (a, b) 라 할 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 61

해설

점 C 는 선분 AB 를 $2 : 1$ 로 외분하는 점이므로 $C(5, -6)$ 이다.
 $\therefore a^2 + b^2 = 5^2 + (-6)^2 = 61$

14. $O(0, 0)$, $A(1, 2)$, $B(3, 2)$ 일 때, 평행사변형 $OABC$ 의 넓이를 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

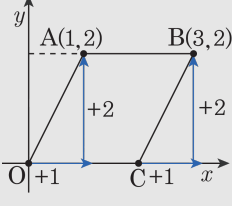
$\overline{OA} \parallel \overline{CB}$, $\overline{OA} = \overline{CB}$ 이

점 A는 점 O를 x 축 방향으로 1만큼, y 축 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로
점 B도 점 C를 x 축 방향으로 1만큼, y 축 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

$\therefore C = (2, 0)$

따라서 밑변이 2, 높이가 2이므로

(넓이) $= 2 \times 2 = 4$



15. 세 점 A(0, 0), B(1, 0), C(1, 2)에 대하여 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 이 최소가 되도록 점 P의 좌표를 정하면?

- ① $P\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ ② $P\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)$ ③ $P\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$
④ $P\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ⑤ $P\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

해설

P(x, y)라 두면

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$$

$$= x^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 + (x-1)^2 + (y-2)^2$$

$$= 3x^2 - 4x + 3y^2 - 4y + 6$$

$$= 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + 3\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{10}{3}$$

∴ $P\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 일 때 최소

※ 점 P는 △ABC의 무게중심이 된다.

$$\left(\frac{0+1+1}{3}, \frac{0+0+2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

16. 직선 $(a-2)x-y-b+1=0$ 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 45° 이고, 점 $(1, 0)$ 을 지날 때, $a+b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$y = (a-2)x - b + 1$ 에서 기울기는

$$a-2 = \tan 45^\circ = 1$$

$$\therefore a = 3$$

직선 $y = x - b + 1$ 이 점 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$0 = 1 - b + 1$$

$$\therefore b = 2$$

$$\therefore a + b = 5$$

17. 세 점 $(0, 2)$, $(3, -3)$, $(-3, a)$ 가 한 직선 위에 있도록 하는 a 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 7$

해설

세 점이 한 직선 위에 있으려면 기울기가 일치해야 한다.

$$\Rightarrow \frac{-3-2}{3-0} = \frac{a-(-3)}{-3-3}$$

$$\Rightarrow a = 7$$

18. 다음 두 직선 $y = (2a + 1)x - a + 2$, $y = (a + 2)x + 2$ 가 서로 수직일 때, a 의 값을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

▷ 정답 : $-\frac{3}{2}$ 또는 -1.5

해설

$$(2a + 1)(a + 2) = -1$$

$$2a^2 + 5a + 3 = 0$$

$$(2a + 3)(a + 1) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } -\frac{3}{2}$$

19. 점 $(2, 1)$ 에서 직선 $x - y + 3 = 0$ 에 내린 수선의 발을 H라 할 때, H의 좌표는?

① $H(3, 0)$

② $H(0, 3)$

③ $H(0, -3)$

④ $H(-3, 0)$

⑤ $H(0, 0)$

해설

점 $P(2, 1)$ 을 지나고
직선 $x - y + 3 = 0 \cdots \textcircled{1}$ 에
수직인 직선 l 의 기울기는 -1 이므로,
 $l : y - 1 = -1 \cdot (x - 2)$,
즉 $l : x + y - 3 = 0 \cdots \textcircled{2}$
점 H는 직선 $\textcircled{1}$ 과 직선 l 의 교점이므로,
 $\textcircled{1}$ 과 $\textcircled{2}$ 를 연립하여 풀면 $x = 0, y = 3$
 $\therefore H(0, 3)$

20. 직선 $kx - (k + 1)y - k + 2 = 0$ 은 k 값에 관계없이 항상 일정한 점 (a, b) 를 지난다. 이때, $a + b$ 값을 구하면?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$kx - (k + 1)y - k + 2 = 0$ 을 k 에 대해 정리하면

$$(x - y - 1)k - y + 2 = 0$$

k 에 관계없이 성립하려면

$$x - y - 1 = 0, \quad -y + 2 = 0$$

$$\therefore y = 2, x = 3 \Rightarrow (a, b) = (3, 2)$$

21. 두 직선 $3x + 4y = 24$ 와 $3x + 4y = 4$ 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

두 직선이 평행하므로 한 직선의 임의의 점과 나머지 직선 사이의 거리를 구하면 된다.

$3x + 4y = 24$ 의 점 $(0, 6)$

$$\frac{|0 \times 3 + 6 \times 4 - 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 4$$

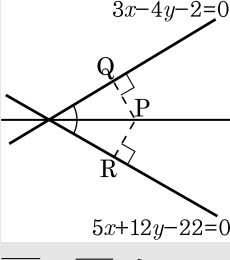
22. 두 직선 $3x-4y-2=0$, $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의 점 $P(X, Y)$ 에 대하여 P에서 두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q,R이라 하면



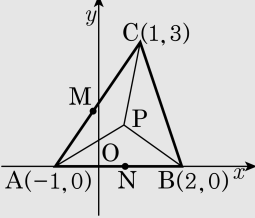
$\overline{PQ} = \overline{PR}$ 이므로
 $\frac{|3X-4Y-2|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|5X+12Y-22|}{\sqrt{25+144}}$
 $13(3X-4Y-2) = \pm 5(5X+12Y-22)$
즉, $13(3X-4Y-2) = 5(5X+12Y-22)$ 또는
 $13(3X-4Y-2) = -5(5X+12Y-22)$ 정리하면
 $x-8y+6=0$ 또는 $8x+y-17=0$ 에서
기울기가 양이므로
 $\therefore x-8y+6=0$
 $\therefore a+b+c=-1$

23. 좌표평면 위에 세 점 $A(-1, 0)$, $B(2, 0)$, $C(1, 3)$ 이 있다. $\triangle ABC$ 의 내부의 점 P 가 $\triangle BPC = \triangle APC + \triangle APB$ 인 관계를 만족시키면서 움직인다. 점 P 가 그리는 도형의 길이는?

- ① $\frac{\sqrt{10}}{2}$ ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $\sqrt{10}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

해설

점 P 가 $\triangle ABC$ 의 내부의 점이고
 $\triangle BPC = \triangle APC + \triangle APB$ 이므로



$$\therefore \triangle BPC = \frac{1}{2} \triangle ABC$$

점 P 는 $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ 의 중점 M , N 을 잇는 선분 위에 있다.

$$\text{그런데 } M\left(0, \frac{3}{2}\right), N\left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$\text{점 } P \text{의 자취 } \overline{MN} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

24. 두 원 $x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$), $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$ 가 외접할 때, r 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

두 원 $x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$), $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$ 의 중심
사이의 거리 $d = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$
두 원이 외접하면 $r + 2 = 5$ 이므로 $r = 3$

25. 실수 a, b 와 두 원
A : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2 + 1$,
B : $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 3$ 에 대하여
원 A 가 원 B 의 둘레를 이등분하면서 지날 때, a, b 사이의 관계식은?
- ① $a + b = -3$ ② $a + b = -2$ ③ $a - b = -1$
④ $a^2 + b^2 = 1$ ⑤ $a^2 + b^2 = 2$

해설

원A 가 원B 의 둘레를 이등분하므로
두 원의 공통현이
원B 의 중심인 $(-1, 1)$ 을 지나야 한다.
공통현의 방정식은
 $(a+1)x - (b+1)y = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$
 $\textcircled{1}$ 이 점 $(-1, 1)$ 을 지나므로
 $(a+1) \times (-1) + (b+1) \times 1 = 0$
 $\therefore a + b = -2$

26. 다음 두 원 $x^2 + y^2 = 3^2$, $(x-9)^2 + y^2 = 2^2$ 의 공통접선의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답 : 4개

해설

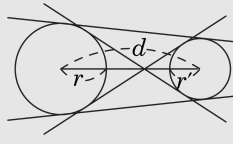
먼저 두 원의 반지름의 길이의
합 $r + r'$, 차 $r \sim r'$, 중심거리 d 를 구하
여

두 원의 위치관계를 파악한다.

두 원의 반지름의 길이를 각각 $r = 3, r' = 2$ 로 놓으면

 $r + r' = 5, r \sim r' = 1 \quad d = 9$ 이므로

$r+r'=5, r \sim r'=1, d=9$ 이므로
 $r+r' < d$ (한 원이 다른 원 밖에 있다.) $\therefore$ 공통접선은 모두
 4 개



27. 원 $x^2 + y^2 = 2$ 와 직선 $y = -x + k$ 이 한점에서 만나도록 하는 k 값은?(단, $k < 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -2$

해설

원이 직선과 한 점에서 만나려면,
즉 겹치려면 원의 중심과 직선사이 거리가
반지름과 같아야 한다.

⇒ 중심 : $(0, 0)$ 직선 : $x + y - k = 0$

$$\frac{|1 \times 0 + 1 \times 0 - k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2}$$

⇒ $k = \pm 2$

∴ $k = -2$ ($\because k < 0$)

28. 직선 $y = \sqrt{3}x + 5$ 에 평행하고, 원 $x^2 + y^2 = 16$ 에 접하는 직선의 방정식을 구하면?

- ① $y = \sqrt{3}x \pm 8$ ② $y = \sqrt{2}x \pm 8$ ③ $y = \sqrt{3}x \pm 7$
- ④ $y = -\sqrt{3}x \pm 8$ ⑤ $y = -\sqrt{2}x \pm 8$

해설

기울기 $\sqrt{3}$ 인 접선을 구하는 문제이다.
공식에서 $y = \sqrt{3}x \pm 4\sqrt{3+1}$,
 $\therefore y = \sqrt{3}x \pm 8$

해설

(다른 풀이1)
기울기 $\sqrt{3}$ 인 직선 $y = \sqrt{3}x + n$ 이라 두면
 $x^2 + y^2 = 16$ 에 접하므로 연립방정식의 해는 중근이다.
 $x^2 + (\sqrt{3}x + n)^2 = 16$, $4x^2 + 2n\sqrt{3}x + n^2 - 16 = 0$,
 $D/4 = (n\sqrt{3})^2 - 4(n^2 - 16) = 0$
 $\therefore n = \pm 8$
구하는 접선은 $y = \sqrt{3}x \pm 8$
(다른 풀이2)
기울기 $\sqrt{3}$ 인 접선 $y = \sqrt{3}x + n$ 에서
 $\sqrt{3}x - y + n = 0$
원의 중심에서 이 직선에
이르는 거리가 반지름과 같으므로
 $\frac{|n|}{\sqrt{3+1}} = 4$,
 $\therefore n = \pm 8$,
따라서 $y = \sqrt{3}x \pm 8$

29. 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ 위의 점에서 직선 $x - y + 3 = 0$ 에 이르는 거리의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{2}$

해설

원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ 을
표준형으로 고치면 $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 8$ 이므로
중심이 $(1, -2)$ 이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 원이다.
원의 중심 $(1, -2)$ 에서 직선 $x - y + 3 = 0$ 에 이르는 거리 d 는
$$\frac{|1 - (-2) + 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

따라서 원 위의 점에서 직선 $x - y + 3 = 0$ 에
이르는 거리의 최솟값은
 $d - (\text{반지름의 길이}) = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$

30. 원 $x^2 + (y - 4)^2 = 4$ 가 원 $(x - 4)^2 + y^2 = 9$ 의 외부에 있을 때, 두 원 사이의 최단거리는?

① 2

② 3

③ 5

④ $4\sqrt{2} - 5$

⑤ $4\sqrt{2} - 6$

해설

두 원의 중심의 좌표가 각각 $(0, 4)$, $(4, 0)$ 이므로 중심거리는 $\sqrt{4^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2}$

두 원의 반지름은 각각 2, 3 이므로 두 원의 최단거리는 $4\sqrt{2} - 2 - 3 = 4\sqrt{2} - 5$

31. $a < 0$ 이고 $a + b = 0$ 일 때, 부등식 $(a - b)x - a - 2b < 0$ 의 해는?

① $x < -\frac{1}{2}$

② $x > -\frac{1}{2}$

③ $x > 2$

④ $x < -2$

⑤ $x > 1$

해설

$a + b = 0$ 에서 $b = -a$ 를 부등식에 대입하면

$(a + a)x - a + 2a < 0, 2ax + a < 0, 2ax < -a$

$\therefore x > -\frac{1}{2} (\because 2a < 0)$

32. 임의의 실수 x, y 에 대하여 $x^2 + y^2 + 2xy + 2x + ay + b > 0$ 이 성립할 a, b 의 조건은? (단, a, b 는 실수)

- ① $a = 1, \quad b > 2$
- ② $a = 1, \quad b < 2$
- ③ $a = 2, \quad b > 1$
- ④ $a = 2, \quad b \geq 1$
- ⑤ $a = 2, \quad b \leq 1$

해설

준식을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면
 $x^2 + 2(1 + y)x + y^2 + ay + b > 0$ 이고
임의의 실수 x 에 대하여 항상 성립하기 위해서는
 $D/4 < 0$ 를 만족해야 한다.
 $D/4 = (1 + y)^2 - (y^2 + ay + b) < 0$
 $\therefore (2 - a)y + 1 - b < 0 \cdots \textcircled{1}$
 $\textcircled{1}$ 식이 모든 실수 y 에 성립할 조건은
 $(2 - a) = 0, \quad 1 - b < 0,$
 $\therefore a = 2, \quad b > 1$

33. 직선 $y = x - 1$ 위에 있고 점 A(1, 0), B(3, 2)에서 같은 거리에 있는 점 P의 좌표가 (a, b) 일 때, $a^2 + b^2$ 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$y = x - 1$ 위에 잇는 점 P는 $(\alpha, \alpha - 1)$ 로 나타낼 수 있다.

$\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$$(\alpha - 1)^2 + (\alpha - 1)^2 = (\alpha - 3)^2 + (\alpha - 3)^2, \alpha = 2$$

$\therefore P(2, 1)$

$$\therefore a^2 + b^2 = 5$$

34. 다음은 서로 다른 세 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 의 넓이 S 가 $S = \frac{1}{2}|(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_2)|$ 임을 보이는 과정이다.

선분 AB의 길이

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \text{이고, 두 점 A, B를 지나는}$$

직선의 기울기가 $\left(\frac{7}{4}\right)$ 이므로, 직선의 방정식은

$$y - y_1 = \left(\frac{7}{4}\right)(x - x_1) \cdots \textcircled{7}$$

이 때, 점 C와 직선 $\textcircled{7}$ 사이의 거리 d 는

$$d = \frac{|(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_2)|}{\left(\frac{7}{4}\right)}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이 S 는

$$S = \frac{1}{2}|(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_2)| \text{이다.}$$

이 과정에서 (가), (나)에 들어갈 내용을 바르게 짝지은 것은?

(가)	(나)
-----	-----

- ① $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \sqrt{(x_1 - y_2)^2 + (x_2 - y_1)^2}$
- ② $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \sqrt{(x_2 - y_2)^2 + (x_1 - y_1)^2}$
- ③ $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- ④ $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- ⑤ $\frac{y_2 - x_1}{x_2 - y_1}, \sqrt{(x_2 - y_2)^2 + (x_1 - y_1)^2}$

11

$$(가) \quad \frac{(y \text{의 증가량})}{(x \text{의 증가량})} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

(나) 점 (x_1, y_1) 에서 직선

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ 이다.

35. 원 $x^2 + y^2 = 5$ 와 점 $P(x_1, y_1)$ 에서 접하는 직선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B 라고 할 때, $\triangle OAB$ 의 넓이의 최솟값을 구하여라. (단, P 는 제1 사분면 위의 점이고, O 는 원점이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x_1y_1 > 0$ 이고 넓이는 $\frac{25}{2x_1y_1}$ 이므로
 x_1y_1 이 최대가 될 때 넓이는 최소가 된다.
그런데 $x_1^2 + y_1^2 = 5$ 이고 $x_1 > 0, y_1 > 0$ 이므로
산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
 $\frac{x_1^2 + y_1^2}{2} \geq \sqrt{x_1^2 \cdot y_1^2} = x_1y_1, x_1y_1 \leq \frac{5}{2}$
 $\therefore \frac{1}{x_1y_1} \geq \frac{2}{5}$
 $\therefore \frac{25}{2x_1y_1} \geq \frac{25}{2} \cdot \frac{2}{5} = 5$ (단, 등호는 $x_1 = y_1$ 일 때 성립)
따라서, 구하는 넓이의 최솟값은 5

36. 점 $(1, -1)$ 에서 원 $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$ 에 그은 접선은 두 개 있다.
이 때, 이 두 직선의 기울기의 합은?

① -3 ② -4 ③ -5 ④ -6 ⑤ -7

해설

점 $(1, -1)$ 을 지나고 기울기가 m 인 접선을
 $y+1=m(x-1)$, 즉 $mx-y-m-1=0$ 이라고 하면
원의 중심 $(-1, 2)$ 에서 접선까지의 거리는
원의 반지름 1과 같아야 한다.

$$\text{따라서 } 1 = \frac{|-2m-3|}{\sqrt{m^2+1}},$$

$$|-2m-3| = \sqrt{m^2+1}$$

$$\text{양변을 제곱하여 정리하면 } 3m^2+12m+8=0$$

따라서 두 기울기의 합은 근과 계수와의 관계에 의하여 -4 이다.

37. a, b, c, d 는 정수이고, $a < 2b, b < 3c, c < 4d, d < 100$ 을 만족시킬 때, a 의 최댓값은?

① 2367 ② 2375 ③ 2391 ④ 2399 ⑤ 2400

해설

a 의 최댓값은 b, c, d 가 각각 최대일 때이다.
 d 의 최댓값은 99이고,
 $c < 4 \cdot 99 = 396$ 이므로 c 의 최댓값은 395,
 $b < 3 \cdot 395 = 1185$ 이므로 b 의 최댓값은 1184,
 $a < 2 \cdot 1184 = 2368$ 이므로 a 의 최댓값은 2367

38. 이차곡선 $x^2 + y^2 + ax + by + 7 = 0$ 이 반지름 1 인 원을 표시한다. 이
원의 중심 a, b 가 변할 때, 이 도형의 자취의 길이를 구하면?

- ① $\sqrt{2}\pi$ ② $2\sqrt{2}\pi$ ③ $3\sqrt{2}\pi$ ④ $4\sqrt{2}\pi$ ⑤ $6\sqrt{2}\pi$

해설

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 28}{4}$$

$\frac{a^2 + b^2 - 28}{4} = 1$ 에서

$$a^2 + b^2 = 32 \cdots \textcircled{1}$$

중심 $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ 에서

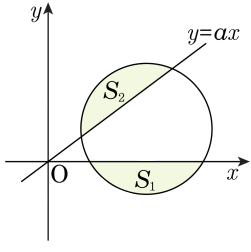
$x = -\frac{a}{2}, y = -\frac{b}{2}$ 이므로

$a = -2x, b = -2y$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$4x^2 + 4y^2 = 32 \quad \therefore x^2 + y^2 = 8$$

$\therefore 2\pi r = 4\sqrt{2}\pi$

39. 아래 그림에서 원 $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1 , 직선 $y = ax$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2 라 하자. $S_1 = S_2$ 일 때, $100a$ 의 값을 구하면?



▶ 답 :

▷ 정답 : 75

해설

$S_1 = S_2$ 이면, 중심 $(3, 1)$ 에서
직선 $y = ax$ 까지 거리는 1 이다.

따라서 $1 = \frac{|3a - 1|}{\sqrt{a^2 + 1}}$ 이고 $a = \frac{3}{4}$ 이다.

$\therefore 100a = 75$

40. 다음 중 원 $(x+1)^2 + y^2 = 1$ 에 접하고 원 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식은?

① $x + \sqrt{3}y = 1$ ② $\sqrt{3}x + y = 1$ ③ $x - \sqrt{3}y = -1$

④ $\sqrt{3}x - y = -3$ ⑤ $x + y = 2$

해설

원 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 의 넓이를 이등분하기 위해서는 중심 $(1,0)$ 을 지나야 한다.
곧, $(1,0)$ 을 지나는 원 $(x+1)^2 + y^2 = 1$ 의 접선을 구하면 된다.
기울기를 m 이라 두면, 구하는 직선은

$$y = m(x-1), mx - y - m = 0$$

중심 $(-1,0)$ 에서 이 직선에 이르는 거리가 반지름 1과 같으면 된다.

$$\frac{|-m-m|}{\sqrt{m^2+1}} = 1$$

$$\therefore m = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

대입하여 정리하면,

$$x + \sqrt{3}y = 1 \text{ 또는 } x - \sqrt{3}y = 1$$