

1. 이차방정식 $x^2-2x-4=0$ 의 두 근을 각각 α, β 라 할 때, $\alpha^2+\beta^2+4\alpha\beta$ 의 값을 구하면?

① -4 ② -2 ③ 2 ④ 4 ⑤ 12

해설

근과 계수와의 관계에서 $\alpha + \beta = 2$, $\alpha\beta = -4$
 $\therefore \alpha^2 + \beta^2 + 4\alpha\beta = (\alpha + \beta)^2 + 2\alpha\beta = 4 - 8 = -4$

2. 다음 중 이차함수 $y = \frac{1}{4}x^2 + 2$ 의 y 의 값의 범위는?

㉠ $y \geq 2$

㉡ $y \leq 2$

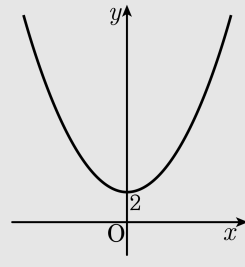
㉢ $y \geq -8$

㉣ $y \leq -8$

㉤ $y \geq 0$

해설

$y = \frac{1}{4}x^2 + 2$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.



따라서 y 의 값의 범위는 $y \geq 2$ 이다.

3. 이차함수 $y = a(x-p)^2 - 1$ 의 그래프가 직선 $x = -1$ 을 축으로 하고 점 $(0, 3)$ 을 지난다고 할 때, a 의 값을 구하면?

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

축의 방정식이 $x = -1$ 이므로 $y = a(x+1)^2 - 1$ 이고, 점 $(0, 3)$ 을 지나므로

$$3 = a(0+1)^2 - 1$$

$$\therefore a = 4$$

4. 다음 이차함수의 그래프에 대한 설명 중 옳지 않은 것은?

- ① $y = ax^2 + q$ ($a \neq 0$) 의 그래프는 $y = ax^2$ 의 그래프를 y 축의 양의 방향으로 q 만큼 평행이동한 것이다.
- ② $y = a(x + p)^2$ 의 그래프는 $y = ax^2$ 의 그래프를 x 축의 양의 방향으로 p 만큼 평행이동한 것이다.
- ③ $y = a(x - p)^2 + q$, $y = -a(x - p)^2 - q$ 의 그래프는 x 축에 대하여 서로 대칭이 된다.
- ④ $y = ax^2$ 의 그래프는 원점을 꼭짓점, y 축을 대칭축으로 하는 포물선이다.
- ⑤ $y = a(x - p)^2$ 의 그래프에서 $a > 0$ 일 때, $p > 0$ 인 x 의 값에 대하여 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

해설

② $y = ax^2$ 의 그래프를 x 축의 양의 방향으로 $-p$ 만큼 평행이동한 것이다.

5. 이차함수 $y = 2(x - 4)^2 - 6$ 의 그래프를 x 축 방향으로 p 만큼, y 축 방향으로 q 만큼 평행이동하여 $y = 2(x + 3)^2 + 3$ 이 되었다. $p + q$ 의 값은?

① -10

② -2

③ 2

④ 6

⑤ 8

해설

$$\begin{aligned} y &= 2(x - 4 - p)^2 - 6 + q \\ &= 2(x + 3)^2 + 3 \end{aligned}$$

$$-4 - p = 3$$

$$\therefore p = -7$$

$$-6 + q = 3$$

$$\therefore q = 9$$

$$p + q = (-7) + 9 = 2$$

6. 다음 보기의 이차함수 중 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나는 것을 모두 골라라.

보기

㉠ $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$

㉡ $y = -3x^2 + 6x + 2$

㉢ $y = x^2 - 2x + 3$

㉣ $y = 2x^2 + 4x + 5$

㉤ $y = -x^2 + 4x$

㉥ $y = -x^2 + 2x + 2$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉡

▷ 정답 : ㉤

▷ 정답 : ㉥

해설

㉠ $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$, 꼭짓점이 $(0, 2)$ 인 위로 볼록한 그래프가 그려진다.

$\therefore x$ 축과 두 점에서 만난다.

㉡ $y = -3(x-1)^2 + 5$, 꼭짓점이 $(1, 5)$ 인 위로 볼록한 그래프가 그려진다.

$\therefore x$ 축과 두 점에서 만난다.

㉢ $y = (x-1)^2 + 2$, 꼭짓점이 $(1, 2)$ 인 아래로 볼록한 그래프가 그려진다.

$\therefore x$ 축과 만나지 않는다.

㉣ $y = 2(x+1)^2 + 3$, 꼭짓점이 $(-1, 3)$ 인 아래로 볼록한 그래프가 그려진다.

$\therefore x$ 축과 만나지 않는다.

㉤ $y = -(x-2)^2 + 4$, 꼭짓점이 $(2, 4)$ 인 위로 볼록한 그래프가 그려진다.

$\therefore x$ 축과 두 점에서 만난다.

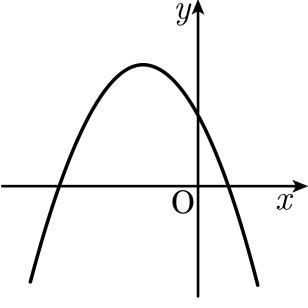
㉥ $y = -(x-1)^2 + 3$, 꼭짓점이 $(1, 3)$ 인 위로 볼록한 그래프가 그려진다.

$\therefore x$ 축과 두 점에서 만난다.

$\therefore x$ 축과 서로 다른 두 점에서 만나는 것은

㉠, ㉡, ㉤, ㉥

7. 다음 그림은 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프이다. 다음 중 옳은 것은?



- ① $a > 0$
- ② $b > 0$
- ③ $ab < 0$
- ④ $c > 0$
- ⑤ $abc < 0$

해설

위로 볼록 $a < 0$
축의 식 $-\frac{b}{2a} < 0, b < 0$
 y 절편 $c > 0$
따라서 $abc > 0$ 이다.

8. 이차방정식 $x^2 - 8x + 15 = 0$ 의 두 근을 a, b 라고 할 때, 다음 중 $a+2, b+2$ 를 두 근으로 갖는 이차항의 계수가 1인 이차방정식은?

① $x^2 - 2x - 35 = 0$

② $x^2 + 2x - 35 = 0$

③ $x^2 - 12x + 35 = 0$

④ $x^2 + 12x + 35 = 0$

⑤ $x^2 - 4x - 30 = 0$

해설

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$(x - 5)(x - 3) = 0$$

$$a = 5, b = 3$$

$$\therefore a + 2 = 7, b + 2 = 5$$

따라서 5, 7을 두 근으로 하는 이차방정식은

$$(x - 7)(x - 5) = 0$$

$$\therefore x^2 - 12x + 35 = 0$$

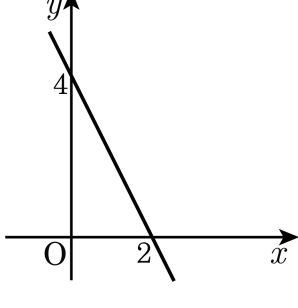
9. 이차방정식 $\frac{1}{3}x^2 - 2x + m = 0$ 을 $\frac{1}{3}(x+n)^2 = -6$ 의 꼴로 나타낼 때, mn 의 값은?

① 21 ② -21 ③ 27 ④ -27 ⑤ -9

해설

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}(x^2 - 6x) &= -m, \frac{1}{3}(x^2 - 6x + 9) - 3 = -m \\ \frac{1}{3}(x-3)^2 &= -m+3 \\ \therefore m &= 9, n = -3 \\ \therefore mn &= -27\end{aligned}$$

10. $y + ax + b = 0$ 의 그래프가 다음 그래프와 같을 때, 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근의 차를 구하면?



- ① 2
- ② -2
- ③ $\sqrt{5}$
- ④ $2\sqrt{5}$
- ⑤ $-2\sqrt{5}$

해설

두 점 $(0, 4)$, $(2, 0)$ 을 $y + ax + b = 0$ 에 각각 대입하면 $a = 2$, $b = -4$
 $\therefore x^2 + 2x - 4 = 0$
두 근의 합은 -2 이고 곱은 -4 이다.
이차방정식의 두 근을 α , β 라고 하면,
두 근의 차 $|\alpha - \beta|$ 는
 $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$ 에서
 $|\alpha - \beta| = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}$ 이므로
두 근의 차는
 $\pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times (-4)} = \pm \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

11. 이차방정식 $2x^2 - 2ax + 12 = 0$ 의 두 근의 비가 $2 : 3$ 이 되는 a 의 값은?

① ± 1

② ± 2

③ ± 3

④ ± 4

⑤ ± 5

해설

두 근을 각각 $2k, 3k(k \neq 0)$ 라고 하면

$$\begin{aligned} 2(x - 2k)(x - 3k) &= 2x^2 - 10kx + 12k^2 \\ &= 2x^2 - 2ax + 12 \end{aligned}$$

$$\therefore k = \pm 1, a = \pm 5$$

12. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 근을 구하는데 소연은 일차항의 계수를 잘못 보고 풀어서 두 근이 $x = 1 \pm \sqrt{2}$ 가 나왔고, 소희는 상수항을 잘못 보고 풀어서 두 근이 $x = 2 \pm \sqrt{6}$ 이 나왔다. 이 때, ab 의 값은?

- ① -4
- ② -2
- ③ 1
- ④ 2
- ⑤ 4

해설

근과 계수와의 관계에 의해 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두근의 합은 $-a$,
두 근의 곱은 b 이다.
소연이는 상수항은 제대로 본 것이므로 소연이가 구한 두 근의 곱은
 $(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = -1 = b$
한편, 소희는 일차항을 제대로 본 것이므로 소희가 구한 두 근의 합은
 $(2 + \sqrt{6}) + (2 - \sqrt{6}) = -a$
 $\therefore a = -4, b = -1$
 $\therefore ab = 4$

해설

소연이 푼 식은
 $\{x - (1 + \sqrt{2})\} \{x - (1 - \sqrt{2})\} = 0$
소연이는 상수항을 제대로 본 것이므로 구하는 상수항 $b =$
 $(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = -1$
소희가 푼 식은
 $\{x - (2 + \sqrt{6})\} \{x - (2 - \sqrt{6})\} = 0$
소희는 일차항의 계수를 제대로 본 것이므로 일차항의 계수는
 $a = -2 + \sqrt{6} - 2 - \sqrt{6} = -4$
따라서, 처음 이차방정식은 $x^2 - 4x - 1 = 0$
 $\therefore ab = 4$

13. $6x^2 - 13xy - 5y^2 = 0$ 일 때, $\frac{y}{x} + \frac{x}{y}$ 의 값은? (단, $xy > 0$)

- ① $\frac{11}{10}$ ② $\frac{13}{10}$ ③ $\frac{17}{10}$ ④ $\frac{23}{10}$ ⑤ $\frac{29}{10}$

해설

등식을 y^2 으로 나누면, $\frac{6x^2}{y^2} - \frac{13x}{y} - 5 = 0$

$\frac{x}{y} = t$ 로 치환하면 $6t^2 - 13t - 5 = 0$

$(2t - 5)(3t + 1) = 0 \quad \therefore t = \frac{5}{2} (\because xy > 0)$

$\therefore \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = \frac{2}{5} + \frac{5}{2} = \frac{29}{10}$

14. 놀이동산의 입장 요금을 $x\%$ 인상하면 입장객은 $0.8x\%$ 줄어든다고 한다. 요금을 올리기 전보다 수입이 10% 가 줄어들 때의 요금 인상률은?

- ① 40% ② 45% ③ 50% ④ 55% ⑤ 60%

해설

인상 전의 입장요금을 A 원, 입장객 수를 B 명, 요금 인상률을 $x\%$ 라 하면

인상 후의 요금은 $A\left(1 + \frac{x}{100}\right)$ 원, 입장객 수는

$B\left(1 - \frac{0.8x}{100}\right)$ 명, 입장 수입은 $A \times B \times \left(1 - \frac{10}{100}\right)$

$$A\left(1 + \frac{x}{100}\right) \times B\left(1 - \frac{0.8x}{100}\right) = A \times B \times \left(1 - \frac{10}{100}\right)$$

$$\left(1 + \frac{x}{100}\right)\left(1 - \frac{0.8x}{100}\right) = \left(1 - \frac{10}{100}\right)$$

$$x^2 - 25x + 1250 = 0$$

$$(x - 50)(x + 25) = 0$$

$x > 0$ 이므로 $x = 50$

15. 이차함수 $y = ax^2$ 의 그래프가 $y = -\frac{1}{2}x^2$ 의 그래프보다 폭이 좁고,
 $y = 2x^2$ 의 그래프보다 폭이 넓다고 할 때, a 의 값으로 옳지 않은
것은?

- ① $-\frac{3}{4}$ ② -1 ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

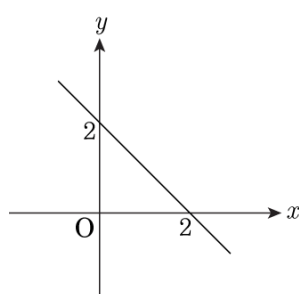
해설

$$|a| > |-\frac{1}{2}|$$

$$|a| < |2|$$

$$\therefore -2 < a < -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} < a < 2$$

16. 다음 그림은 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프이다. 이차함수 $y = \frac{1}{2}ax^2 + bx + 3$ 의 그래프의 최댓값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

기울기 $a = -1$, y 절편 $b = 2$

$$y = \frac{1}{2}ax^2 + bx + 3$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$$

$$= -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 5$$

$x = 2$ 일 때, 최댓값은 5 이다.

17. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 최댓값이 9 이고 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근이 -2, 4 일 때, abc 의 값은? (단, a, b, c 는 상수이다.)

① -10 ② -12 ③ -14 ④ -16 ⑤ -18

해설

$ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근이 -2, 4 이므로

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c \\ &= a(x+2)(x-4) \\ &= a(x^2 - 2x - 8) \\ &= a(x-1)^2 - 9a \end{aligned}$$

최댓값이 9 이므로 $-9a = 9$

$$\therefore a = -1$$

따라서 구하는 이차함수는 $y = -x^2 + 2x + 8$ 이고

$b = 2, c = 8$ 이다.

$$\therefore abc = -1 \times 2 \times 8 = -16$$

18. 좌표평면 위의 두 직선 $y = \frac{3a}{4}x + \frac{a}{4}$, $y = \frac{2a-1}{a}x + \frac{1}{a}$ 이 평행할 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{2}{3}$

해설

$y = \frac{3a}{4}x + \frac{a}{4}$, $y = \frac{2a-1}{a}x + \frac{1}{a}$ 의 두 직선이 평행할 조건은

$$\frac{3a}{4} = \frac{2a-1}{a}, \frac{a}{4} \neq \frac{1}{a}$$

$$\text{i) } \frac{3a}{4} = \frac{2a-1}{a} \text{ 에서 } 3a^2 - 8a + 4 = 0,$$

$$(3a-2)(a-2) = 0$$

$$\therefore a = \frac{2}{3} \text{ 또는 } a = 2$$

$$\text{ii) } \frac{a}{4} \neq \frac{1}{a} \text{ 에서 } a^2 \neq 4$$

$$\therefore a \neq 2 \text{ 이고 } a \neq -2$$

따라서 i), ii) 를 동시에 만족해야 하므로 $a = \frac{2}{3}$ 이다.

19. 방정식 ㉠의 해가 ㉡의 해 사이에 있을 때, 정수 m 의 최솟값과 최댓값의 합을 구하여라.

㉠ $4(x+1)=m+3$

㉡ $4x^2+4x-11=0$

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

㉡ $4x^2+4x-11=0$

$$x^2+x-\frac{11}{4}=0$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=3$$

$$\therefore x=\frac{-1\pm2\sqrt{3}}{2}$$

㉠ $4(x+1)=m+3 \qquad \therefore x=\frac{m-1}{4}$

$$\frac{-1-2\sqrt{3}}{2}<\frac{m-1}{4}<\frac{-1+2\sqrt{3}}{2}$$

$$-2-4\sqrt{3}<m-1<-2+4\sqrt{3}$$

$$-1-4\sqrt{3}<m<-1+4\sqrt{3}$$

정수 m 의 최솟값은 -7, 최댓값은 5 이다.

$$\therefore -7+5=-2$$

20. 이차방정식 $\frac{1}{4}x - \frac{1}{2} = \frac{2}{3x}$ 의 양의 근을 α 라고 할 때, $3\alpha^2 - 3\alpha$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $11 + \sqrt{33}$

해설

$\frac{1}{4}x - \frac{1}{2} = \frac{2}{3x}$ 의 양변에 $12x$ 를 곱하면

$$3x^2 - 6x - 8 = 0$$

$$3(x^2 - 2x + 1) = 8 + 3$$

$$3(x - 1)^2 = 11$$

$$\therefore x = 1 \pm \frac{\sqrt{33}}{3}$$

α 는 양의 근이므로 $\alpha = 1 + \frac{\sqrt{33}}{3}$

$$\therefore 3\alpha^2 - 3\alpha = 11 + \sqrt{33}$$

21. 정수 m, n 에 대하여 이차방정식 $(m+1)x^2 + 2x + n + 3 = 0$ 이 중근을 가질 때, m 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$\frac{D}{4} = 1 - (m+1)(n+3) = 0$$

$$mn + m + n + 2 = 0$$

$$(m+1)(n+1) = -1$$

$$(m+1, n+1) = (1, -1), (-1, 1)$$

$$m = 0, -2$$

따라서 m 의 최댓값은 0 이다.

22. 이차방정식 $\frac{1}{p}x^2 - \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{p}\right)x + \frac{1}{q} + 2 = 0$ 의 두 근의 합이 3, 곱이 -4 일 때, $\frac{p}{q}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

x^2 의 계수가 $\frac{1}{p}$ 이고 두 근의 합이 3, 곱이 -4 인 이차방정식은

$\frac{1}{p}(x^2 + x - 12) = 0$ 이고 주어진 식의 계수와 비교하면

$$-\frac{1}{q} - \frac{1}{p} = \frac{1}{p}$$

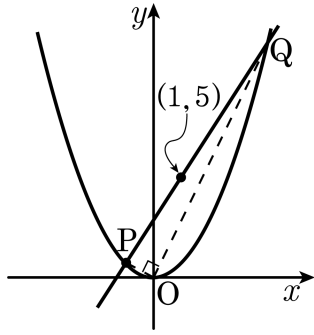
$$\therefore p = -2q \dots \textcircled{A}$$

$$\frac{1}{q} + 2 = -\frac{12}{p} \dots \textcircled{B}$$

$$\text{두 근의 합은 } \frac{\frac{1}{q} + \frac{1}{p}}{\frac{1}{p}} = 3$$

$$\frac{p}{q} + 1 = 3, \frac{p}{q} = 2$$

23. 다음 그림과 같이 점 $(1, 5)$ 를 지나는 직선이 포물선 $y = x^2$ 과 원점이 아닌 두 점 P, Q에서 만난다. $\angle POQ = 90^\circ$ 일 때, 직선 PQ의 방정식은?



- ① $y = x + 4$ ② $y = 2x + 3$ ③ $y = 3x + 2$
 ④ $y = 4x + 1$ ⑤ $y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$

해설

직선 PQ의 기울기를 a 라 하면 점 $(1, 5)$ 를 지나므로 $y - 5 = a(x - 1)$
 $\therefore y = ax - a + 5$
 $y = x^2$, $y = ax - a + 5$ 의 교점의 x 좌표를 α, β 라 할 때,
 α, β 는 방정식 $x^2 = ax - a + 5$, 즉 $x^2 - ax + a - 5 = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$ 의 근이다.
 점 $P(\alpha, \alpha^2)$, $Q(\beta, \beta^2)$ 이고, 직선 PO와 QO의 기울기는 각각
 $\frac{\alpha^2}{\alpha} = \alpha$, $\frac{\beta^2}{\beta} = \beta$ 이고,
 $\overline{PO} \perp \overline{QO}$ 이므로 $\alpha\beta = -1 \cdots \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에 의하여 $a - 5 = -1$ ($\therefore$ 근과 계수관계)
 $\therefore a = 4$
 따라서 구하는 직선의 방정식은 $y = 4x + 1$

24. 이차함수 $y = 2x^2 - ax - b$ 는 $x = -p$ 일 때, 최솟값 -2 를 갖고, 그 그래프는 점 $(1, p^2)$ 을 지난다. 이때, 상수 a, b, p 의 합 $a + b + p$ 의 값을 구하면? (단, $p < 0$)

① 12

② 0

③ -18

④ 42

⑤ -14

해설

$$y = 2(x + p)^2 - 2$$

$$\begin{aligned} p^2 &= 2(1 + p)^2 - 2 \\ &= 2(p^2 + 2p + 1) - 2 \\ &= 2p^2 + 4p \end{aligned}$$

$$p^2 + 4p = 0, p(p + 4) = 0, p = 0, -4$$

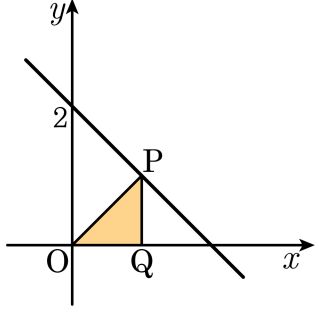
$$\therefore p = -4 (\because p < 0)$$

$$\begin{aligned} y &= 2(x - 4)^2 - 2 \\ &= 2(x^2 - 8x + 16) - 2 \\ &= 2x^2 - 16x + 30 \end{aligned}$$

$$a = 16, b = -30$$

$$\therefore a + b + p = 16 + (-30) + (-4) = -18$$

25. 다음 그림과 같이 직선 $y = -x + 2$ 위의 점 P에서 x 축에 내린 수선의 발을 Q, $\triangle POQ$ 의 넓이의 최댓값을 구하여라. (단, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{2}$

해설

점 P의 좌표는 $(a, -a + 2)$ 라 하고,
 $\triangle POQ$ 의 넓이를 y 라 하면

$$y = \frac{1}{2}a(-a + 2)$$

$$y = -\frac{1}{2}a^2 + a = -\frac{1}{2}(a^2 - 2a)$$

$$= -\frac{1}{2}(a^2 - 2a + 1 - 1)$$

$$= -\frac{1}{2}(a - 1)^2 + \frac{1}{2}$$

따라서 최댓값은 $\frac{1}{2}$ 이다.