1. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{P}(a,\ 3)$, $\mathrm{Q}(1,\ a)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{2}$ 일 때, a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{(1-a)^2 + (a-3)^2} = \sqrt{2a^2 - 8a + 10}$

$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{2}$ 이므로 $\sqrt{2a^2 - 8a + 10} = \sqrt{2}$

양변을 제곱하면 $2a^2 - 8a + 10 = 2$

$2a^2 - 8a + 8 = 0,\ a^2 - 4a + 4 = 0\ ,\ (a-2)^2 = 0$

$\therefore\ a = 2$

2. 세 점 A $(-1, 1)$, B $(-3, -2)$, C $(2, -1)$에 대하여 사각형 ABCD가 평행사변형이 되도록 D의 좌표를 정하면?

① $(4, 2)$ ② $(2, 4)$ ③ $(3, 5)$

④ $(5, 3)$ ⑤ $(1, -5)$

해설

D (a, b)라 두면 평행사변형의 성질로부터
대각선 $\overline{AD}$의 중점과 $\overline{BC}$의 중점은 일치한다.

$$\therefore \left(\frac{1}{2}, 0\right) = \left(\frac{a-3}{2}, \frac{b-2}{2}\right)$$

$$\therefore a = 4, b = 2$$

3. 일차함수 $\sqrt{3}x-y=1$ 의 기울기와 y 절편, x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 : $\underline{\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad {}^{\circ}}$

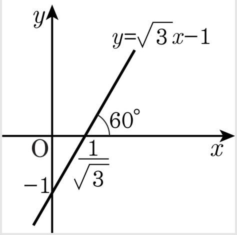
▷ 정답 : 기울기 $\sqrt{3}$

▷ 정답 : y절편 -1

▷ 정답 : $60\ \underline{^{\circ}}$

해설

$y=\sqrt{3}x-1$ 에서
기울기 $\sqrt{3}$, y 절편 -1, x 축의 양의 방향과 이루는 각 60°



4. 세 점 $A(1,4)$, $B(-1,2)$, $C(5,a)$가 일직선 위에 있을 때, 상수 a의 값을 구하면?

① 2 ② 8 ③ 10 ④ −2 ⑤ −4

해설

A, B를 지나는 직선의 방정식은

기울기 $= \dfrac{4-2}{1-(-1)} = 1$

$y = 1 \cdot (x-1) + 4 = x + 3$

위에 $C(5,\ a)$가 존재하므로 대입하면,

$\therefore\ a = 5 + 3 = 8$

5. 원점에서 직선 $3x-4y-5=0$에 이르는 거리를 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

점과 직선 사이의 거리 구하는 공식을 이용하면,

$$\frac{|0\times 3+0\times(-4)-5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$$

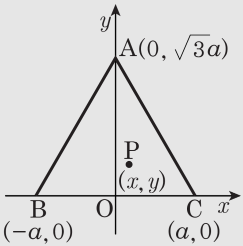
6. 좌표평면 위의 정삼각형 ABC에 대하여 $2\overline{\mathrm{PA}}^2 = \overline{\mathrm{PB}}^2 + \overline{\mathrm{PC}}^2$ 을 만족시키는 점 P의 자취는 어떤 도형을 그리는가?

① 삼각형 ② 직선 ③ 선분

④ 원 ⑤ 원 아닌 곡선

해설

그림과 같이 변 BC의 중점을 원점으로 하는 좌표축을 설정하고 점 C의 좌표를 $\mathrm{C}(a, 0)$ 이라고 두면, $\mathrm{B}(-a, 0)$, $\mathrm{A}(0, \sqrt{3}a)$ 이다.



이 때, 점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(x, y)$ 라 하면

$2\overline{\mathrm{PA}}^2 = \overline{\mathrm{PB}}^2 + \overline{\mathrm{PC}}^2$ 이므로

$$2\left\{x^2 + 2(y - \sqrt{3}a)^2\right\}$$

$$= (x+a)^2 + y^2 + (x-a)^2 + y^2$$

정리하여 간단히 하면, $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$

$\therefore$ 직선

7. 이차방정식 $x^2 - ay^2 - 4x + 2y + k = 0$ 이 원을 나타낼 때 두 괄호에 들어갈 알맞은 값의 합을 구하여라.

$a = (\qquad\quad), k < (\qquad\quad)$

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

원의 방정식이 되기 위해서는 x^2 의 계수와 y^2 의 계수가 같아야 하므로 $a = -1$

또한, 준식을 표준형으로 나타내면,

$x^2 - 4x + y^2 + 2y + k = 0$ 에서

$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5 - k$

여기서, $5 - k > 0$ 이어야 하므로 $k < 5$

8. 방정식 $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$ 으로 나타내어지는 원이 y 축에 접할 조건은?

① $b^2=c$ ② $c^2=b$ ③ $a^2=c$

④ $c^2=a$ ⑤ $b=2c$

해설

y 축과의 공유점을 구하는 식은 $x=0$ 으로부터

$y^2+2by+c=0$

y 축에 접할 조건은 $D/4=b^2-c=0$

9. 서로 다른 두 점에서 만나는 두 원 O, O′ 이 있다. 이 두 원의 반지름을 각각 r, r' 이라 하고 두 원의 중심 간의 거리를 d 라 할 때, 이 두 원의 성질을 옳게 나타낸 것은?

① $d > r + r'$

② $d < |r - r'|$

③ 공통외접선은 1개이다.

④ 공통내접선은 2개이다.

⑤ 두 원의 공통현은 1개이다.

해설

① $d < r + r'$
② $d > |r - r'|$
③ 공통외접선은 2개이다.
④ 공통내접선은 없다.

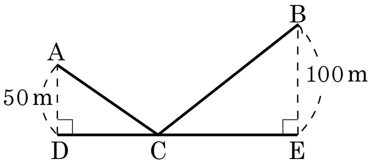
10. 두 원 $(x+1)^2+y^2=1$, $x^2+y^2-6x-6y+2=0$ 의 공통접선의 개수는?

① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$(x+1)^2+y^2=1$ 에서 이 원의 중심을 C_1 이라 하면 점 C_1 의 좌표는 $(-1,\ 0)$ 이고 반지름의 길이는 1 이다.
$x^2+y^2-6x-6y+2=0$ 에서 $(x-3)^2+(y-3)^2=16$ 이므로 이 원의 중심을 C_2 이라 하면 점 C_2 의 좌표는 $(3,\ 3)$ 이고 반지름의 길이는 4 이다.
$\overline{C_1C_2}=5$ 이고 두 원의 반지름의 길이는 1, 4 이므로 두 원은 서로 외접하게 된다.
따라서 공통접선은 3 개이다.

11. 다음 그림과 같이 고압 전선 $\overline{DE}$가 지나는 곳으로부터 각각 $50\,m$, $100\,m$ 떨어진 두 지점에 빌딩 A, B가 위치하고 있다. 변압기를 D와 E 사이의 한 지점에 설치하여 빌딩 A, B에 전력을 공급하려고 한다. D와 E 사이의 거리가 $200\,m$일 때, 전체 전선의 길이 $\overline{AC}+\overline{BC}$의 최솟값을 구하여라.



▶ 답 : ______ m

▷ 정답 : 250 m

해설

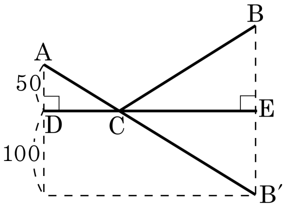
B를 $\overline{DE}$에 대해 대칭이동한 점을 B′이라 하면

$\overline{BC}=\overline{CB'}$이므로

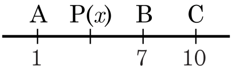
$\overline{AC}+\overline{BC}=\overline{AC}+\overline{CB'}\geq\overline{AB'}$

따라서 $\overline{AC}+\overline{BC}$의 최솟값은

$\overline{AB'}=\sqrt{200^2+150^2}=250(\,m)$



12. 수직선 위의 세 점 A(1), B(7), C(10)과 동점 P(x)에 대하여 $\overline{\text{AP}}^2 + \overline{\text{BP}}^2 + \overline{\text{CP}}^2$이 최소가 되는 점 P의 좌표를 구하면?



① P(5)　② P(6)　③ P(7)　④ P(8)　⑤ P(9)

해설

$\overline{\text{AP}}^2 + \overline{\text{BP}}^2 + \overline{\text{CP}}^2$

$= (x-1)^2 + (x-7)^2 + (x-10)^2$

$= 3(x-6)^2 + 42$

따라서 $x=6$일 때 최소가 된다.

13. 두 점 $(4, -2), (2, -3)$을 지나는 직선의 x절편을 A, y절편을 B, 원점을 O라 할 때, $\triangle$OAB의 면적을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$(4, -2), (2, -3)$를 지나는 직선은

$$y = \frac{-2-(-3)}{4-2}(x-2) - 3 = \frac{1}{2}x - 4$$

$\Rightarrow$ x절편은 8이고, y절편은 -4이다.

$\therefore$ $\triangle$OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 8 \times 4 = 16$$ 이다.

14. 직선 $x+ay-1=0$ 이 직선 $bx-2y+1=0$ 과는 평행이고, 직선 $3x+(b-1)y-2=0$ 과는 수직이다. 이때, $a+b$ 의 값은?

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

두 직선이 평행하면 기울기가 일치하고 수직이면 기울기의 곱이 -1 이다.

$\Rightarrow$ ⅰ) $-\dfrac{1}{a}=\dfrac{b}{2}$　ⅱ) $-\dfrac{1}{a}\times\dfrac{-3}{b-1}=-1$

ⅰ), ⅱ) 를 연립하면,

$a=1$　$b=-2$

$\therefore\ a+b=-1$

15. 서로 평행한 두 직선 $3x-y+5=0,\ 3x-y-5=0$사이의 거리는?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{5}$ ④ $\sqrt{7}$ ⑤ $\sqrt{10}$

해설

서로 평행한 두 직선
$3x-y+5=0,\ 3x-y-5=0$사이의 거리는
직선 $3x-y+5=0$ 위의 점 $(0,5)$ 와
직선 $3x-y-5=0$ 사이의 거리와 같으므로
구하는 거리는

$$\frac{|0-5-5|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$$

16. 원 $x^2+y^2+2ax-4ay+20a-25=0$ 의 넓이가 최소일 때, 이 원의 중심의 좌표가 (p, q) 이다. 이 때 $p-q$ 의 값은?

① -6 ② -4 ③ -2 ④ 2 ⑤ 4

해설

$x^2+y^2+2ax-4ay+20a-25=0$ 을
표준형으로 고치면
$(x+a)^2+(y-2a)^2=5a^2-20a+25$
이 원의 넓이는
$\pi(5a^2-20a+25)=5\pi(a-2)^2+5\pi$
따라서 $a=2$ 일 때 넓이가 최소.
중심은 $(-2, 4)$
$\therefore p=-2,\ q=4$
$\therefore p-q=-6$

17. 두 점 $A(0,\ -1)$, $B(0,\ 2)$ 에 이르는 거리의 비가 $1:2$ 인 점 $P(x,\ y)$ 가 나타내는 도형의 길이를 구하면?

① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ 2π ④ 4π ⑤ 6π

해설

$\overline{AP}:\overline{BP}=1:2$
$\Rightarrow\ \overline{BP}=2\overline{AP}$
$\Rightarrow\ \overline{BP}^2=4\overline{AP}^2$
$\Rightarrow\ x^2+(y-2)^2=4\left\{x^2+(y+1)^2\right\}$
$\Rightarrow\ x^2+y^2+4y=0$
$\Rightarrow\ x^2+(y+2)^2=4$
반지름이 2 인 원이므로 도형의 길이는 4π

18. 점 A(4, 0)과 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점을 이은 선분의 중점의 자취의 넓이는?

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ $\frac{\pi}{3}$ ④ $\frac{\pi}{4}$ ⑤ π

해설

$x^2+y^2=4$ 위의 점을 $P(a,b)$ 라 하면

$A(4,0), P(a,b)$ 의 중점의 좌표 $M(x,y)$는

$M\left(\frac{a+4}{2},\frac{b}{2}\right)$ 이다.

$\therefore\ x=\frac{a+4}{2},\ \ y=\frac{b}{2}$

$\therefore\ \ a=2x-4,\ b=2y$

이 때, 점 P는 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로 $a^2+b^2=4$가 성립한다.

$(2x-4)^2+(2y)^2=4, (x-2)^2+y^2=1$

따라서 구하는 중점의 자취는 중심이 $(2,0)$,

반지름의 길이가 1인 원이므로

원이 넓이 S는 $S=\pi\cdot 1^2=\pi$

19. 원 $x^2 + y^2 = 5$ 와 직선 $y = 2x + k$ 가 만나지 않도록 k 의 값의 범위를 구하면?

① $-5 < k < 5$ ② $k > 5,\ k < -5$ ③ $-5 \le k \le 5$

④ $k \ge 5,\ k \ge -5$ ⑤ $0 < k \le 5$

해설

원과 직선이 만나지 않으려면, 원 중심과 직선사이 거리가 원 반지름보다 커야 한다.

$$\therefore \quad \frac{|k|}{\sqrt{2^2+1}} > \sqrt{5}$$

$\Rightarrow \quad k > 5$ 또는 $k < -5$

20. 원 $x^2+y^2-4x-6y+3=0$ 위의 점 $(3,\ 0)$ 에서의 접선의 방정식을 구하면 $ax+by=3$이 될 때, $a-b$의 값은?

① -2　② -1　③ 1　④ 3　⑤ 4

해설

공식 $x_1x+y_1y-4\cdot\dfrac{(x_1+x)}{2}-6\cdot\dfrac{(y_1+y)}{2}+3=0$에 의해

$3x+0-2x-6-3y+3=0$

$\rightarrow x-3y=3$이 된다.

$\therefore a=1,\quad b=-3$

21. 직선 $3x+4y+a=0$ 이 원 $x^2+y^2-2x+2y=2$ 에 접할 때, 양수 a 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=11$

해설

원의 방정식을 표준형으로 나타내면

$(x-1)^2+(y+1)^2=2^2$

직선이 원에 접하므로 원의 중심

$(1,\ -1)$ 에서 직선까지의 거리가

원의 반지름의 길이2 와 같다.

따라서, $\dfrac{|3\cdot 1+4\cdot(-1)+a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$

$|a-1|=10$

$a-1=\pm 10$

$a>0$ 이므로 $a=11$

22. 원 $x^2+y^2-2x+4y-3=0$ 위의 점에서 직선 $x-y+3=0$ 에 이르는 거리의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{2}$

해설

원 $x^2+y^2-2x+4y-3=0$ 을
표준형으로 고치면 $(x-1)^2+(y+2)^2=8$ 이므로
중심이 $(1,\ -2)$ 이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 원이다.
원의 중심 $(1,\ -2)$ 에서 직선 $x-y+3=0$ 에 이르는 거리 d 는

$$\frac{|1-(-2)+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$$

따라서 원 위의 점에서 직선 $x-y+3=0$ 에
이르는 거리의 최솟값은
$d-$ (반지름의 길이)$=3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}$

23. 원 $x^2+y^2=\frac{13}{4}$ 과 함수 $y=\frac{3}{2x}$ 의 그래프가 만나는 모든 교점의 x 좌표를 $a,\ b,\ c\ ,d$ 라 할 때, $4abcd$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$y=\frac{3}{2x}$ 을 $x^2+y^2=\frac{13}{4}$ 에 대입하면

$$x^2+\frac{9}{4x^2}=\frac{13}{4}$$

$x \neq 0$ 이므로 양변에 $4x^2$ 을 곱하고 정리하면

$$4x^4-13x^2+9=(x^2-1)(4x^2-9)=0$$

$$\therefore\ \ x=\pm 1,\ \ \pm\frac{3}{2}$$

따라서 구하는 답은

$$4\times(-1)\times 1\times\frac{3}{2}\times\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}\times 4=9$$

24. 세 점 $A(6, 2)$ $B(0, -6)$, $C(7, -5)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 외심의 좌표를 (a, b) 라 할 때, $3ab$ 의 값을 구하면?

① -24 ② -18 ③ -12 ④ 9 ⑤ 21

해설

$\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{AB}^2$ 이므로 $\angle C = 90°$인 직각삼각형이다.

$\therefore$ 빗변 $\overline{AB}$의 중점이 외심이다.

$$\left(\frac{6+0}{2}, \frac{2+(-6)}{2}\right) = (3, -2)$$

$\therefore\ 3ab = -18$

25. 세 직선 $2x+y+1=0$, $x-y+2=0$, $ax-y=0$ 이 삼각형을 만들지 못할 때, 상수 a 의 값을 구하면? (단, $a>0$)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

삼각형을 만들지 못하게 하려면
$ax-y=0$ 이 나머지 두직선과 평행하거나, 세 직선이 한 점에서 만나야 한다.

ⅰ) $ax-y=0$ 이 다른 두 직선과 평행할 때
두 직선의 기울기가 각각 -2, 1 이므로
$a=-2$ 또는 1 　$\therefore$ $a=1$ $(\because a>0)$

ⅱ) 세 직선이 한 점에서 만날 때
$2x+y+1=0$ 와 $x-y+2=0$ 의 교점은 $(-1,\ 1)$
$ax-y=0$ 이 이 점을 지나려면
$a=-1$ (부적당)

ⅰ), ⅱ) 에서 $a=1$

26. 두 점 A(3, 2), B(a, b)를 지나는 직선의 기울기가 2이고, 이 직선과 직선 $x+2y-3=0$의 교점은 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점이다. 이 때, $3a+b$의 값은?

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 10

해설

직선 AB의 기울기는 2이므로

$\dfrac{b-2}{a-3}=2$, $b-2=2(a-3)$, $b=2a-4\cdots$㉠

$\overline{\text{AB}}$를 2 : 1로 내분하는 점은

$\left(\dfrac{2a+1\cdot 3}{2+1}, \dfrac{2b+1\cdot 2}{2+1}\right)=\left(\dfrac{2a+3}{3}, \dfrac{2b+2}{3}\right)$ 이고

이 점은 직선 $x+2y-3=0$ 위에 있으므로

$\dfrac{2a+3}{3}+2\cdot\dfrac{2b+2}{3}-3=0$

$\therefore a+2b-1=0\cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\dfrac{9}{5}$, $b=-\dfrac{2}{5}$ 이다.

$\therefore\ 3a+b=5$

27. 점 $(1, 2)$ 와 직선 $x + 2y - 1 + k(2x - y) = 0$ 사이의 거리를 $f(k)$ 라 할 때, $f(k)$ 의 최댓값은?

① $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ ③ $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ ④ $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\sqrt{5}$

해설

점과 직선사이 거리 구하는 공식을 이용한다.

$$\frac{|2k + 1 + 2(2 - k) - 1|}{\sqrt{(2k + 1)^2 + (2 - k)^2}} = \frac{4}{\sqrt{5k^2 + 5}}$$

$\therefore$ 최솟값은 $k = 0$ 일 때, 분모는 $\sqrt{5}$, 즉 $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$ 이므로 $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ 이다.

28. 두 원 $(x-1)^2+y^2=9$와 $(x+2)^2+y^2=24$의 공통현의 길이를 구하면?

① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

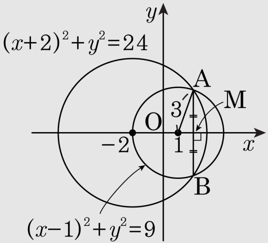
해설

두 원 $(x-1)^2+y^2=9$, $(x+2)^2+y^2=24$

즉, $x^2+y^2-2x-8=0$, $x^2+y^2+4x-20=0$의 공통현의 방정식은

$(x^2+y^2-2x-8)-(x^2+y^2+4x-20)=0$

$-6x+12=0 \quad \therefore x=2$



$(x-1)^2+y^2=9$의 중심 $(1,\ 0)$과 $x=2$와의 거리 $d=1$

따라서, 다음 그림에서 원의 공통현은 $\overline{AB}$이고,

$\overline{AM}=\overline{BM}$이므로 공통현의 길이는

$\overline{AB}=2\overline{AM}=2\sqrt{3^2-1}=4\sqrt{2}$

29. 두 점 $A(-1,3)$, $B(2,a)$를
지나는 직선이 원 $x^2+y^2=1$과 접할 때, a의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

두 점 $A(-1,3)$, $B(2,a)$를

지나는 직선의 방정식은, $y-3=\frac{a-3}{3}(x+1)$

$\therefore\ (a-3)x-3y+a+6=0 \quad \cdots\cdots ㉠$

직선 ㉠이 원 $x^2+y^2=1$과 접하므로

원의 중심 $(0,0)$에서 직선 ㉠에 이르는 거리가

원의 반지름의 길이인 1과 같다.

$$\therefore\ \frac{|a+6|}{\sqrt{(a-3)^2+9}}=1$$

$\therefore\ |a+6|=\sqrt{(a-3)^2+9} \quad \cdots\cdots ㉡$

㉡의 양변을 제곱하면 $a^2+12a+36=a^2-6a+9+9$, $18a=-18$

$\therefore\ a=-1$

30. 원 밖의 한 점 $(3,-1)$에서 원 $x^2+y^2=4$에 그은 두 접선의 기울기를 $p,\ q$라 할 때, $p-q$의 값은? (단, $p>q$)

① $\dfrac{\sqrt{6}}{5}$ ② $\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$ ③ $\dfrac{3\sqrt{6}}{5}$ ④ $\dfrac{4\sqrt{6}}{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

해설

점 $(3,\ -1)$을 지나고 기울기가 m인 접선을
$y+1=m(x-3)$ 즉, $mx-y-3m-1=0$이라고 하면
원의 중심 $(0,0)$에서 접선까지의 거리는 원의 반지름 2와 같아야 한다. 따라서

$$2=\frac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+1}},\ |-3m-1|=2\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱을 하여 정리를 하면,
$5m^2+6m-3=0$이다.
이때, 두 기울기 p,q은 이차방정식의 두근이므로
근과 계수와의 관계에 의하여
두근의 합 $p+q=-\dfrac{6}{5}$, 두근의 곱 $pq=-\dfrac{3}{5}$

따라서 $(p-q)^2=(p+q)^2-4pq=\dfrac{36}{25}+\dfrac{12}{5}=\dfrac{96}{25}$

따라서 $p-q=\dfrac{4\sqrt{6}}{5}$

31. 좌표평면 위의 세 점 A(3, 4), B(0, 0), C(8, −8)에 대하여 ∠BAC의 이등분선이 선분 BC와 만나는 교점의 좌표는?

① $\left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}\right)$ ② $\left(\frac{20}{9}, -\frac{20}{9}\right)$ ③ $\left(\frac{15}{11}, -\frac{15}{11}\right)$
④ $\left(\frac{25}{13}, -\frac{25}{13}\right)$ ⑤ $\left(\frac{28}{17}, -\frac{28}{17}\right)$

해설

$\overline{AB} = \sqrt{3^2+4^2} = 5$
$\overline{AC} = \sqrt{(8-3)^2+(-8-4)^2} = \sqrt{5^2+12^2} = 13$
∠BAC 의 이등 분선이 선분 BC 와 만나는 교점을 D(x, y) 라 하면 각의 이등분선의 성질에 의하여
$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC} = 5 : 13$
따라서, 점 D(x, y)는 선분 BC 를 5 : 13 으로 내분하는 점이므로

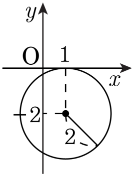
$$x = \frac{5\cdot 8 + 13\cdot 0}{5+13} = \frac{20}{9},$$

$$y = \frac{5\cdot(-8) + 13\cdot 0}{5+13} = -\frac{40}{18} = -\frac{20}{9}$$

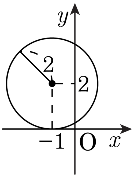
$$\therefore \ \mathrm{D}\left(\frac{20}{9}, -\frac{20}{9}\right)$$

32. 원 $x^2+y^2-2x+4y+3=0$ 의 그래프로 옳은 것은?

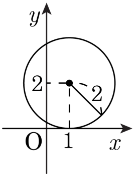
①



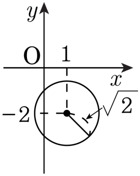
②



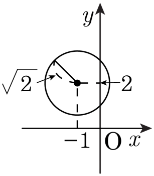
③



④



⑤



해설

$x^2+y^2-2x+4y+3=0$

$\therefore$ 중심은 $(1,-2)$ 이고, 반지름은 $\sqrt{2}$

33. 점 O 를 지나는 직선이 좌표평면 위의 원 C 와 두 점 A, B 에서 만날 때, $\overline{OA} \cdot \overline{OB}$ 의 값이 일정함을 다음과 같이 증명하였다.
㉮, ㉯, ㉰에 알맞은 것을 차례로 적으면?

증명

원점 O을 지나는 직선의 방정식을
$y = mx \cdots\cdots$ ㉠
원 C의 방정식을 $(x-a)^2 + y^2 = r^2$
$(a > O, r > O) \cdots\cdots$ ㉡ 라 하자
㉠, ㉡에서 $(1+m^2)x^2 - 2ax + a^2 - r^2 = 0 \cdots\cdots$ ㉢
㉢ 의 두 실근을 α, β라 하면 $\alpha\beta =$ (㉮)
따라서 $\overline{OA} \cdot \overline{OB} =$ (㉯) $\cdot\, |\alpha\beta| =$ (㉰)
그러므로 m에 관계없이 $\overline{OA} \cdot \overline{OB}$의 값은 일정하다.

① $\dfrac{a^2 - r^2}{1 - m^2}$, $1 - m^2$, $|a^2 - r^2|$
② $\dfrac{a^2 - r^2}{1 + m^2}$, $1 + m^2$, $|a^2 - r^2|$
③ $\dfrac{a^2 - r^2}{1 - m^2}$, $2(1 - m^2)$, $2|a^2 - r^2|$
④ $\dfrac{a^2 - r^2}{1 + m^2}$, $2(1 + m^2)$, $2|a^2 - r^2|$
⑤ $\dfrac{a^2 - r^2}{1 + m^2}$, $r(1 + m^2)$, $r|a^2 - r^2|$

해설

㉢에서 근과 계수와의 관계에서

$$\alpha\beta = \frac{a^2 - r^2}{1 + m^2}$$

$A(\alpha, m\alpha)$, $B(\beta, m\beta)$ 이므로
$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = \sqrt{\alpha^2 + (m\alpha)^2} \cdot \sqrt{\beta^2 + (m\beta)^2}$
$= (1 + m^2)|\alpha\beta| = |a^2 - r^2|$