

1. 원의 중심이 $(1, -2)$ 이고, 반지름이 3 인 원을 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 일 때, $A + B + C$ 의 값은?

① 4

② 2

③ 0

④ -2

⑤ -4

해설

원의 중심이 $(1, -2)$ 이고, 반지름이 3 인 원은
 $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 3^2$ 으로 나타낼 수 있다.

이 식을 전개하면

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 9$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

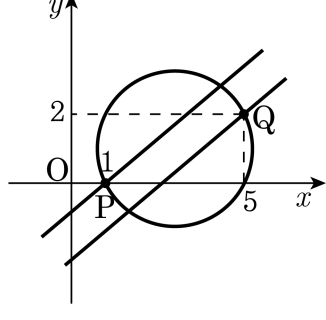
$$\text{따라서 } A + B + C = -2 + 4 - 4 = -2$$

2. 원 $x^2 + y^2 - 2kx - 4 = 0$ (k 는 임의의 실수)에 대하여 다음 중 반드시 옳은 것은?
- ① 반지름의 길이가 2 인 원이다.
 - ② 원의 중심은 y 축 위에 있다.
 - ③ 원은 두 점 $(0, -2), (0, 2)$ 를 지난다.
 - ④ 원의 중심은 직선 $y = x$ 위에 존재한다.
 - ⑤ 원은 점 $(1, 0)$ 을 지난다.

해설

$x^2 + y^2 - 2kx - 4 = 0$ 을 변형하면
 $(x - k)^2 + y^2 = 4 + k^2$ 이므로
 $x = 0$ 일 때, k 에 관계없이 $y^2 = 4$
 $\therefore y = \pm 2$
따라서 주어진 원은
 $(0, -2), (0, 2)$ 의 두 점을 지난다.
또한, 원의 중심은 x 축 위에 있다

3. 다음 그림과 같이 좌표평면에서 평행한 두 직선에 의해 원의 넓이가 3등분되었다. 원과 직선의 교점 P, Q의 좌표가 각각 (1, 0), (5, 2)이고, 원의 반지름의 길이가 r 일 때, r^2 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

평행한 두 직선에 의하여 원의 넓이가 3등분되었으므로
그림에서 두 점 P, Q는 원의 지름의 양 끝점이다.

따라서 구하는 원의 중심은 $\overline{PQ}$ 의 중점 C(3, 1)이므로,

$$r^2 = \overline{PC}^2 = (3 - 1)^2 + (1 - 0)^2 = 5 \text{ 이다.}$$

4. 세 점 P(1, 0), Q(0, -1), R(2, 2)을 지나는 원의 방정식은 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 이다. 이때, $a + c$ 의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ 2 ⑤ 3

해설

P, Q, R의 좌표를 원의 방정식에 각각 대입하면

$$\begin{cases} 1 + a + c = 0 \cdots \textcircled{A} \\ 1 - b + c = 0 \cdots \textcircled{B} \\ 2a + 2b + c + 8 = 0 \cdots \textcircled{C} \end{cases}$$

$\therefore \textcircled{A}$ 에서 $a + c = -1$

5. 방정식 $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ 으로 나타내어지는 원이 y 축에 접할 조건은?

① $b^2 = c$

② $c^2 = b$

③ $a^2 = c$

④ $c^2 = a$

⑤ $b = 2c$

해설

y 축과의 공유점을 구하는 식은
 $x = 0$ 으로부터 $y^2 + 2by + c = 0$
 y 축에 접할 조건은 $D/4 = b^2 - c = 0$

6. $x^2 + y^2 = 10$ 위의 점 $(-3, 1)$ 에서 접하는 직선이 있다. 이 직선의 기울기를 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

원 $x^2 + y^2 = 10$ 위의 점 $(-3, 1)$ 에서의
접선의 방정식은 $-3 \cdot x + 1 \cdot y = 10$
따라서 이 직선의 기울기는 3

7. 원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ 과 중심이 같고 점 $(5, -3)$ 을 지나는 원의 방정식을 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ 이라고 할 때, $a + b + r$ 의 값은?
(단, a, b, r 은 상수)

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$
 $\Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$
 $\therefore$ 중심은 $(2, 1)$ 이다.
 $\Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = r^2$
 $(5, -3)$ 을 지나므로 대입하면,
 $(5 - 2)^2 + (-3 - 1)^2 = r^2 \quad r = 5$
 $\therefore a + b + r = 2 + 1 + 5 = 8$

8. $x^2 + y^2 + x - y + k = 0$ 의 그래프가 원을 나타내도록 하는 상수 k 의 값의 범위는?

- ① $k \leq \frac{1}{2}$ ② $k < \frac{1}{2}$ ③ $k > \frac{1}{2}$ ④ $k \geq \frac{1}{2}$ ⑤ $k < \frac{1}{3}$

해설

주어진 방정식을 정리하면,

$$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - k$$

$\therefore$ 원이 되려면, $\frac{1}{2} - k > 0 \rightarrow k < \frac{1}{2}$

9. 점(2, 1)을 중심으로 하고, 직선 $x + y - 5 = 0$ 에 접하는 원의 반지름은?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 4 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

원의 반지름 r 은 점 (2, 1)에서
직선 $x + y - 5 = 0$ 까지의 거리이므로

$$r = \frac{|2 + 1 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

10. 다음 원 $x^2 + y^2 = 9$ 와 직선 $y = x + 5$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 0개

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면,

$$\frac{|5|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} > 3$$

반지름보다 크므로 원과 직선은 만나지 않는다.

11. 직선 $x + 3y - k = 0$ 이 원 $(x - 5)^2 + y^2 = 3$ 의 넓이를 이등분할 때, k 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

직선이 원의 넓이를 이등분하려면 직선이 원의 중심을 지나면 된다.

따라서 원의 중심 (5, 0)이 직선 위에 있으므로 $5 - k = 0$

$\therefore k = 5$

12. 원 $x^2 + y^2 = 6$ 에 접하고 기울기가 2인 접선의 방정식을 구하면?

① $y = 2x \pm \sqrt{10}$ ② $y = 2x \pm 3\sqrt{2}$ ③ $y = 2x \pm 2\sqrt{5}$

④ $y = 2x \pm 2\sqrt{6}$ ⑤ $y = 2x \pm \sqrt{30}$

해설

기울기가 2 인 직선의 방정식은

$y = 2x + k$ 직선이 원에 접하므로 직선과 원의

중심 사이 거리는 반지름과 같다.

$$\therefore \frac{|2 \times 0 + (-1) \times 0 + k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow |k| = \sqrt{30}$$

$$\Rightarrow k = \pm \sqrt{30}$$

$$\therefore \text{접선의 방정식은 } y = 2x \pm \sqrt{30}$$

13. 원 $x^2 + y^2 - 4ax + 2ay + 30a - 48 = 0$ 의 넓이가 최소일 때, 이 원의 중심의 좌표가 (p, q) 이다. 이 때 $p + q$ 의 값은?

① -9 ② -6 ③ -3 ④ 3 ⑤ 6

해설

$x^2 + y^2 - 4ax + 2ay + 30a - 48 = 0$ 을

표준형으로 고치면

$$(x - 2a)^2 + (y + a)^2 = 5a^2 - 30a + 48$$

이 원의 넓이는

$$\pi(5a^2 - 30a + 48) = 5\pi(a - 3)^2 + 3\pi$$

따라서 $a = 3$ 일 때 넓이가 최소.

중심은 $(6, -3)$

$$\therefore p = 6, q = -3$$

$$\therefore p + q = 3$$

14. 중심이 직선 $3x + y = 12$ 의 제 1 사분면 위에 있고, x 축과 y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 중심이 (a, b) 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

구하는 원의 반지름의 길이를 r 라 하면

중심의 좌표는 (r, r) 이다.

따라서, 구하는 원의 방정식을

$$(x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

한편, 점 (r, r) 는 직선 $3x + y = 12$ 위에 있으므로 $3r + r = 12$

$$\therefore r = 3$$

따라서, 구하는 원의 방정식은 $\textcircled{1}$ 에서 $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 3^2$

15. 다음 원과 직선의 교점의 개수를 구하여라.

$x^2 + y^2 = 4, \quad y = x + 3$

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 0 개

해설

원의 중심 $(0, 0)$ 에서 직선 $y = x + 3$ 까지의 거리를 d 라 하면,

$$d = \frac{|3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

이때, $d = \frac{3\sqrt{2}}{2} > 2 = r$

이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

∴ 교점의 개수 : 0 개

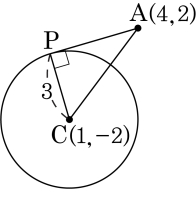
16. 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ 이 주어졌을 때, 점 A(4, 2) 에서 그은 접선의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

주어진 원의 방정식을 표준형으로 고치면
 $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$ 이다.
다음 그림에서 접선의 길이는
 $\overline{AP} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CP}^2}$
한편, $\overline{AC} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ 이고 $\overline{CP} = 3$
 $\therefore \overline{AP} = 4$



17. 점 $(3, -1)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 5$ 에 그은 접선의 방정식 중 기울기가 음수인 것의 y 절편을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $(3, -1)$ 을 지나고 접선의 기울기를 m 이라고 하면

접선은 $y + 1 = m(x - 3) \cdots \textcircled{1}$

따라서 원의 중심 $(0, 0)$ 에서 직선

$mx - y - 3m - 1 = 0$ 과의 거리가

원의 반지름 $\sqrt{5}$ 와 같다.

$\frac{|-3m - 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5}, | -3m - 1 | = \sqrt{5} \sqrt{m^2 + 1}$

양변을 제곱하면

$9m^2 + 6m + 1 = 5m^2 + 5, 4m^2 + 6m - 4 = 0$

따라서, 기울기 $m = \frac{1}{2}, -2$

여기서 기울기가 음수인 -2 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$y = -2x + 5$

따라서 y 절편은 5이다.

18. 두 점 A(1, 0), B(4, 0) 에서의 거리의 비가 2 : 1 이 되도록 움직이는 점 P 의 자취는 원이다. 이 원의 둘레의 길이는?

① 2π ② $2\sqrt{3}\pi$ ③ 4π ④ $2\sqrt{5}\pi$ ⑤ 8π

해설

점 P 의 자취는 점 A, B 의 내분점, 외분점을
지름의 양끝으로 하는 원과 같다.

$$\Rightarrow \text{내분점은 } \left(\frac{2 \times 4 + 1 \times 1}{2 + 1}, 0 \right) = (3, 0)$$

$$\Rightarrow \text{외분점은 } \left(\frac{2 \times 4 - 1 \times 1}{2 - 1}, 0 \right) = (7, 0)$$

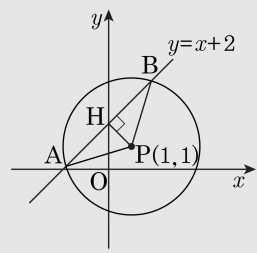
$\therefore$ 중심은 (5, 0) 이고, 반지름은 2 인 원

$$\Rightarrow \text{둘레의 길이는 } 2 \times 2 \times \pi = 4\pi$$

19. 중심이 (1, 1) 이고, 반지름이 3 인 원과 직선 $y = x + 2$ 가 두 점 A, B 에서 만난다. 이 때, 두 점 A, B 사이의 거리를 구하면?

① $2\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $2\sqrt{6}$ ④ $2\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{10}$

해설



그림에서 원의 중심을 P, 점 P 에서
선분 AB 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$\overline{PH} = \frac{|1 - 1 + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2}$$

$$\overline{AH} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{7}$$

$$\text{따라서 } \overline{AB} = 2 \cdot \overline{AH} = 2\sqrt{7}$$

20. 다음 두 원의 공통접선의 방정식을 구하면?

$x^2 + y^2 = 4 \text{ , } (x - 5)^2 + y^2 = 25$

- ① $y = \pm \frac{3}{4}x \pm \frac{5}{2}$ (복부호 동순)
- ② $y = \pm \frac{4}{5}x \pm 2$ (복부호 동순)
- ③ $y = \pm \frac{5}{6}x \pm \frac{7}{5}$ (복부호 동순)
- ④ $y = \pm \frac{9}{10}x \pm \frac{11}{8}$ (복부호 동순)
- ⑤ $y = \pm \frac{10}{11}x \pm \frac{4}{3}$ (복부호 동순)

해설

$x^2 + y^2 = 4 \cdots \cdots \textcircled{\tiny{\Gamma}}$

$(x - 5)^2 + y^2 = 25 \cdots \cdots \textcircled{\tiny{\Delta}}$

공통접선의 방정식을 $y = ax + b$

$\cdots \cdots \textcircled{\tiny{\Theta}}$ 로 놓으면

원 $\textcircled{\tiny{\Gamma}}$ 과 직선 $\textcircled{\tiny{\Theta}}$, 즉 $ax - y + b = 0$ 이 접하므로

$\frac{|b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 2$

$\therefore |b| = 2\sqrt{a^2 + 1} \cdots \cdots \textcircled{\tiny{\text{A}}}$

또, 원 $\textcircled{\tiny{\Delta}}$ 도 직선 $\textcircled{\tiny{\Theta}}$, 즉 $ax - y + b = 0$ 과 접하므로

$\frac{|5a + b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 5$

$\therefore |5a + b| = 5\sqrt{a^2 + 1} \cdots \cdots \textcircled{\tiny{\text{B}}}$

그런데 $b \neq 0$ 이므로 $\textcircled{\tiny{\text{A}}} \div \textcircled{\tiny{\text{B}}}$ 을 하면

$\frac{|5a + b|}{|b|} = \frac{5}{2}$

$2|5a + b| = 5|b|, 2(5a + b) = \pm 5b$

$\therefore b = -\frac{10}{7}a$ 또는 $b = \frac{10}{3}a$

(i) $b = -\frac{10}{7}a$ 일 때, $\textcircled{\tiny{\text{A}}}$ 에서

$\frac{10}{7}|a| = 2\sqrt{a^2 + 1}, 5|a| = 7\sqrt{a^2 + 1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$24a^2 + 49 = 0$

이것을 만족하는 실수 a 는 없다.

(ii) $b = \frac{10}{3}a$ 일 때, $\textcircled{\tiny{\text{A}}}$ 에서

$\frac{10}{3}|a| = 2\sqrt{a^2 + 1}, 5|a| = 3\sqrt{a^2 + 1}$

양변을 제곱하여 정리하면 $16a^2 = 9, a^2 = \frac{9}{16}$

$\therefore a = \pm \frac{3}{4}, b = \pm \frac{5}{2}$ (복부호 동순)

(i), (ii)로부터 구하는 공통접선의 방정식은

$y = \pm \frac{3}{4}x \pm \frac{5}{2}$ (복부호 동순)

