

1. 수직선 위의 두 점 A(5), B(-2) 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$\overline{AB} = \overline{BA} = |5 - (-2)| = |7| = 7$$

2. $x^2 - 2ax + 2a + 3 < 3$ 을 만족하는 x 가 없도록 하는 정수 a 의 개수는?

- ① 1개 ② 3개 ③ 5개 ④ 7개 ⑤ 9개

해설

$x^2 - 2ax + 2a + 3 < 0$ 의 해가 존재하지 않으려면

모든 실수 x 에 대하여

$x^2 - 2ax + 2a + 3 \geq 0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = a^2 - (2a + 3) \leq 0, (a - 3)(a + 1) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq a \leq 3$$

따라서, 구하는 정수 a 의 개수는

-1, 0, 1, 2, 3의 5개이다.

3. 모든 실수 x, y 에 대하여 $x^2 + pxy + qy^2 \geq 0$ 이 항상 성립하려면 다음 중 어떤 조건을 만족해야 하는가?

① $p < q$

② $p^2 \leq q$

③ $p \leq q^2$

④ $p^2 \leq 4q$

⑤ $p^2 \geq 4q^2$

해설

모든 실수 x, y 에 대하여 $x^2 + pxy + qy^2 \geq 0$ 이 항상 성립하려면 x 에 대한 이차방정식 $x^2 + pxy + qy^2 = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때
 $D = (py)^2 - 4qy^2 \leq 0$
 $(p^2 - 4q)y^2 \leq 0 \cdots \textcircled{1}$
 $\textcircled{1}$ 이 모든 실수 y 에 대하여 성립하려면
 $p^2 - 4q \leq 0$ 이어야 한다.
 $\therefore p^2 \leq 4q$

4. 세 점 A(2, 1), B(4, 3), C(a, 0)에 대하여 $\overline{AC} = \overline{BC}$ 가 성립할 때, 상수 a의 값은 얼마인가?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\overline{AC} = \sqrt{(a-2)^2 + 1^2}, \overline{BC} = \sqrt{(a-4)^2 + 3^2}$$

$$\overline{AC} = \overline{BC} \text{에서 } \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$$

$$(a-2)^2 + 1 = (a-4)^2 + 9$$

$$4a = 20$$

$$\therefore a = 5$$

5. 두 점 $A(5, -11)$, $B(-4, 7)$ 일 때, 선분 AB 를 2 : 1 로 내분하는 점의 좌표는 $P(a, b)$, 선분 AB를 2 : 1 로 외분하는 점의 좌표는 $Q(c, d)$ 이다. 이때, $a + b + c + d$ 의 값을 구하면?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$$\begin{aligned} P(a, b) &= \left(\frac{2 \cdot (-4) + 1 \cdot (5)}{2 + 1}, \frac{2 \cdot 7 + 1 \cdot (-11)}{2 + 1} \right) \\ &= (-1, 1) \\ Q(c, d) &= \left(\frac{2 \cdot (-4) - 1 \cdot (5)}{2 - 1}, \frac{2 \cdot 7 - 1 \cdot (-11)}{2 - 1} \right) \\ &= (-13, 25) \\ \therefore a + b + c + d &= -1 + 1 - 13 + 25 = 12 \end{aligned}$$

6. 곡선 $y = x^3$ 위의 서로 다른 세 점 A, B, C의 x 좌표를 각각 a, b, c 라고 한다. 세 점 A, B, C가 일직선 위에 있을 때, 다음 중 항상 성립하는 것은?

- ① $a + b + c = 0$ ② $a + b + c = 1$ ③ $abc = 1$
④ $a + c = 2b$ ⑤ $ac = b^2$

해설

서로 다른 세 점 $A(a, a^3)$, $B(b, b^3)$, $C(c, c^3)$ 이 일직선 위에 있으므로 직선 AB의 기울기와 직선 AC의 기울기는 같다.

$$\therefore \frac{b^3 - a^3}{b - a} = \frac{c^3 - a^3}{c - a}$$

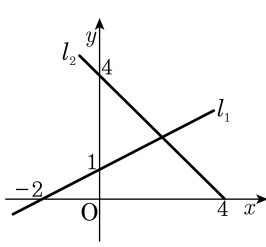
$$\text{즉, } b^2 + ab + a^2 = c^2 + ac + a^2$$

$$(b - c)(a + b + c) = 0 \text{ 에서 } b \neq c \text{ 이므로}$$

$$a + b + c = 0$$

7. 다음 그림과 같은 좌표평면 위의 두 직선 l_1, l_2 의 교점과 원점을 지나는 직선의 방정식은 $y = ax$ 이다. 이때, a 의 값은?

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{3}{2}$



해설

직선 l_1 은 x 절편이 -2 이고,
 y 절편이 1 이므로 $\frac{x}{-2} + \frac{y}{1} = 1$ 에서
 $x - 2y = -2 \dots\dots \textcircled{1}$
 직선 l_2 는 x 절편이 4 이고, y 절편이 4 이므로
 $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$ 에서
 $x + y = 4 \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하면 풀면 $x = 2, y = 2$
 따라서, 구하는 직선의 방정식은 $y = x$
 $\therefore a = 1$

8. 원점을 지나고, 점 (2, 1)에서의 거리가 1인 직선의 방정식은? (단, x 축은 제외)

① $y = \frac{2}{3}x$

② $y = -\frac{2}{3}x$

③ $y = \frac{1}{3}x$

④ $y = -\frac{4}{3}x$

⑤ $y = \frac{4}{3}x$

해설

원점을 지나는 직선을

$y = kx (k \neq 0)$ 이라 하면,

(2, 1)에서의 거리가 1 이므로

$$\frac{|2k - 1|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1, |2k - 1| = \sqrt{k^2 + 1}, k(3k - 4) = 0$$

$$k = \frac{4}{3} (\because k \neq 0)$$

$$\therefore y = \frac{4}{3}x$$

9. 이차방정식 $x^2 - ay^2 - 4x + 2y + k = 0$ 이 원을 나타낼 때 두 괄호에 들어갈 알맞은 값의 합을 구하여라.

$a = (\quad \quad \quad), k < (\quad \quad \quad)$

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

원의 방정식이 되기 위해서는 x^2 의 계수와 y^2 의 계수가 같아야 하므로 $a = -1$
또한, 준식을 표준형으로 나타내면,
 $x^2 - 4x + y^2 + 2y + k = 0$ 에서
 $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5 - k$
여기서, $5 - k > 0$ 이어야 하므로 $k < 5$

10. 중심이 직선 $y = x + 2$ 위에 있고, 점 $(4, 4)$ 를 지나며, y 축에 접하는 원 중 반지름의 크기가 작은 원의 방정식을 구하면?
- ① $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 4$
 - ② $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 9$
 - ③ $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 4$
 - ④ $(x - 10)^2 + (y - 12)^2 = 100$
 - ⑤ $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 100$

해설

원의 방정식을 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2$ 으로 놓으면
중심 (a, b) 가 $y = x + 2$ 위에 있으므로
 $b = a + 2$ ㉠
점 $(4, 4)$ 를 지나므로
 $(4 - a)^2 + (4 - b)^2 = a^2$ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $(4 - a)^2 + (4 - a - 2)^2 = a^2$
 $a^2 - 12a + 20 = 0 \quad \therefore a = 2, 10$
 $\therefore a = 2$ 일 때 $b = 4$, $a = 10$ 일 때 $b = 12$
따라서 구하는 방정식은
 $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 4$,
 $(x - 10)^2 + (y - 12)^2 = 100$

11. 두 원 $x^2 - 2x + y^2 + 3 = 0$ 과 $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 3 = 0$ 에 대하여 공통현의 방정식을 구하면?

① $2x - y - 3 = 0$

② $2x - 2y + 3 = 0$

③ $2x - 2y - 3 = 0$

④ $2x + 2y - 3 = 0$

⑤ $2x + 2y + 3 = 0$

해설

$$\begin{aligned}(x^2 - 2x + y^2 + 3) - (x^2 + y^2 + 2x - 4y - 3) &= 0 \\ -4x + 4y + 6 &= 0 \\ \therefore 2x - 2y - 3 &= 0\end{aligned}$$

12. 중심이 원점이고, 직선 $2x - y + 5 = 0$ 에 접하는 원의 반지름의 길이는?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

원의 반지름의 길이 r 는 원의 중심 $(0,0)$ 과 직선 $2x - y + 5 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$r = \frac{|0 + 0 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}$$

13. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 접하고 기울기가 1인 접선의 방정식은 $y = x \pm$ ()이다. ()안의 값을 구하면?

① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

직선과 원이 접하면 원의 중심에서 직선에 이르는 거리는 반지름과 같다.

$y = x + k$ 라 하면

$$\frac{|k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2, \quad k = \pm 2\sqrt{2}$$

$$\therefore y = x \pm 2\sqrt{2}$$

14. 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① $a > b, b > c, c > d$ 이면 $a > d$
- ② $a > b > 0, c > d > 0$ 이면 $ac > bd$
- ③ $a > b > 0$ 이면 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
- ④ $ac > bc$ 이면 $a > b$
- ⑤ $a > b > 0, c > 0$ 이면 $\frac{a}{b} > \frac{a+b}{b+c}$

해설

- ① $a > b, b > c$ 이면 $a > c$
 $a > c, c > d$ 이면 $a > d$ ∴ 참
- ② $c > d$ 이고 $a > 0$ 이므로 $ac > ad$ ㉠
 $a > b$ 이고 $d > 0$ 이므로 $ad > bd$ ㉡
㉠, ㉡에서 $ac > bd$ ∴ 참
- ③ $a > b > 0$ 이므로 $a - b > 0, ab > 0$ 이다. $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{a-b}{ab} > 0$
이므로 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ ∴ 참
- ④ $c < 0$ 일 때 $ac > bc$ 이면 $a < b$ 이다. ∴ 거짓
- ⑤ $\frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+c} = \frac{a(b+c) - b(a+c)}{b(b+c)}$
 $= \frac{c(a-b)}{b(b+c)} > 0$ ∴ 참

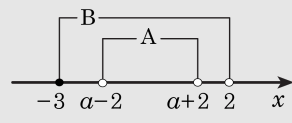
15. $|x - a| < 2$ 가 $-3 \leq x < 2$ 에 완전히 포함된다고 할 때, 정수 a 의 가 될 수 있는 수들의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$|x - a| < 2 \Leftrightarrow -2 < x - a < 2 \Leftrightarrow a - 2 < x < a + 2$$

다음 그림에서



$$-3 \leq a - 2, a + 2 \leq 2$$

$$\therefore -1 \leq a \leq 0$$

따라서 위의 부등식을 만족하는 정수 a 의 값은

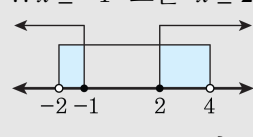
-1, 0이고, 그 합은 -1이다.

16. 연립부등식 $\begin{cases} |x-1| < 3 \\ x^2-x-1 \geq 1 \end{cases}$ 을 풀면?

- ① $-2 < x < 4$
- ② $x \leq -1$ 또는 $x \geq 2$
- ③ $-1 \leq x \leq 2$
- ④ $-1 \leq x \leq 2$ 또는 $x > 4$
- ⑤ $-2 < x \leq -1$ 또는 $2 \leq x < 4$

해설

$-3 < x-1 < 3$,
 $\therefore -2 < x < 4$
 $x^2-x-2 \geq 0, (x-2)(x+1) \geq 0$
 $\therefore x \leq -1$ 또는 $x \geq 2$



$\therefore -2 < x \leq -1$ 또는 $2 \leq x < 4$

17. 이차방정식 $x^2 + 4mx - 3m = 0$ 의 한 근은 -1 과 1 사이에 있고, 또 한 근은 -1 보다 작도록 하는 실수 m 의 범위를 구하면?

① $m > \frac{2}{9}$

② $m > \frac{1}{7}$

③ $m > -\frac{1}{3}$

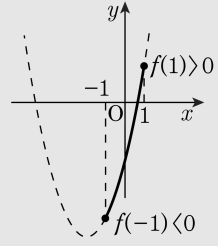
④ $m < -\frac{1}{3}$

⑤ $m < \frac{2}{9}$

해설

$f(x) = x^2 + 4mx - 3m$ 으로 놓을 때,

$f(x) = 0$ 의 근이 한 근은 -1 과 1 사이에 있고, 또 한 근은 -1 보다 작아야 하므로



$$f(-1) = 1 - 4m - 3m < 0 \Rightarrow m > \frac{1}{7}$$

$$f(1) = 1 + 4m - 3m > 0 \Rightarrow m > -1$$

$$\therefore m > \frac{1}{7}$$

18. 좌표평면 위의 네 점 A(1, 2), P(0, b), Q(a, 0), B(5, 1)에 대하여 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB}$ 의 최솟값을 k 라 할 때, k^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 45

해설

점 A (1, 2)의 y축에 대하여 대칭인 점을 A'(-1, 2), 점 B(5, 1)의 x축에 대하여 대칭인 점을 B'(5, -1)이라 하면
 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB} = \overline{A'P} + \overline{PQ} + \overline{QB'}$
 $\geq \overline{A'B'} = \sqrt{(5+1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{45}$
따라서 $k = \sqrt{45}$ 이므로 $k^2 = 45$

19. 다음은 11 세기 경 아라비아의 수학책에 나오는 내용을 변형한 것이다. 강을 사이에 두고 두 그루의 나무가 서 있었는데 두 나무의 높이는 각각 20m, 30m 이고 두 나무 사이의 거리는 50m 이다. 각각의 나무 꼭대기에 새가 앉아서 수면에 있는 한 마리의 물고기를 노리고 있었다. 이 두 마리의 새가 동시에 날아서 일직선 위로 그 물고기에게 덤벼들어 똑같이 그 물고기가 있는 수면에 당도하였다. 두 마리의 새의 속도가 같다고 하였을 때, 높이가 20m 인 나무 밑에서 물고기까지의 거리는 몇 m 인지 구하여라.

▶ 답: m

▶ 정답 : 30m

해설

20m, 30m 나무 위의 두 마리의 새의 위치를 각각 A, B 라 하고, 높이가 20m 인 나무 밑으로부터 물고기가 있는 P 까지의 거리를 a 라 하면 $\overline{PA} = \overline{PB}$ 이므로 $a^2 + 20^2 = (50 - a)^2 + 30^2$
 $\therefore a = 30(\text{m})$

20. 좌표평면 위의 두 점 A(1,0),B(5,4)에 대하여 조건 $\overline{PA} = \overline{PB}$ 를 만족하는 점 P의 자취의 방정식을 구하면?

① $x - y + 1 = 0$ ② $x + 2y + 4 = 0$ ③ $x + y + 3 = 0$

④ $x - 3y + 4 = 0$ ⑤ $x + y - 5 = 0$

해설

점 P의 좌표를 (x, y)로 놓고 주어진 조건

$\overline{PA} = \overline{PB}$ 를 이용하여

x, y사이의 관계식을 구한다.

점 P의 좌표를 (x, y)로 놓자.

이때, $\overline{PA} = \overline{PB}$ 에서 $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$ 이므로

$$(x-1)^2 + (y-0)^2 = (x-5)^2 + (y-4)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 - 10x + 25 + y^2 - 8y + 16$$

$$8x + 8y - 40 = 0$$

$$\therefore x + y - 5 = 0$$

21. 이차함수 $y = kx^2 + k(k+1)x + 2k^2 - 2k + 1$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다. 이 점의 좌표를 $P(a, b)$ 라 할 때 $a + b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

k 에 관하여 정리하면

$$(x+2)k^2 + (x^2+x-2)k + (1-y) = 0$$

k 에 관한 항등식이므로

$$x+2=0, x^2+x-2=0, 1-y=0$$

$$\therefore x=-2, y=1$$

$$\therefore \text{구하는 점의 좌표는 } (-2, 1)$$

$$\therefore a=-2, b=+1$$

$$\therefore a+b=-1$$

22. 점 A(6, 2)와 직선 $x+2y-2=0$ 위를 움직이는 점 P가 있다. $\overline{AP}$ 를 1 : 3으로 내분하는 점의 자취는?

- ① $x-2y-8=0$ ② $x+2y-8=0$ ③ $x-2y+8=0$
④ $x+2y+8=0$ ⑤ $x-2y=0$

해설

P (a , b)라 하면 $a+2b-2=0 \cdots \textcircled{1}$

$\overline{AP}$ 의 1 : 3 내분점을 Q (x , y)라 하면

$$Q(x, y) = \left(\frac{a+18}{1+3}, \frac{b+6}{1+3} \right)$$

$$x = \frac{a+18}{1+3}, y = \frac{b+6}{1+3}$$

$$a = 4x-18, b = 4y-6$$

$\textcircled{1}$ 에 대입하면,

$$4x-18+2(4y-6)-2=0 \Rightarrow x+2y-8=0$$

23. 두 원 $x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$), $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$ 가 외접할 때, r 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

두 원 $x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$), $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$ 의 중심
사이의 거리 $d = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$
두 원이 외접하면 $r + 2 = 5$ 이므로 $r = 3$

24. 점 $(1, 3)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 접선을 그을 때 접선의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

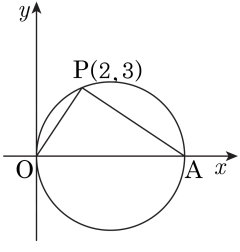
▷ 정답 : 3

해설

원의 중심과 점 $(1, 3)$ 사이의 거리는 $\sqrt{10}$ 이므로
피타고라스의 정리에 의해 접선의 길이는 $\sqrt{10 - 1} = 3$

25. 다음 그림과 같이 선분 OA 를 지름으로 하는 원 위에 한 점 P(2, 3) 이 있다. 이 때, 점 A 의 x 좌표를 구하면?

- ① $\frac{9}{2}$
- ② $\frac{11}{2}$
- ③ $\frac{13}{2}$
- ④ $\frac{15}{2}$
- ⑤ $\frac{17}{2}$



해설

점 A 의 x 좌표를 a 라 하면
삼각형 OAP 가 직각삼각형이므로,
 $a^2 = (2^2 + 3^2) + (a - 2)^2 + 3^2$
 $a^2 = a^2 - 4a + 26$
따라서 $a = \frac{13}{2}$

해설

반원의 원주각은 90° 이므로 $\angle OPA = 90^\circ$
따라서, 직선 OP 와 직선 AP 의 기울기의 곱은 -1 이다.
점 A 좌표를 $(a, 0)$ 이라 하면
 $\frac{3-0}{2-a} \times \frac{3}{2} = -1, 2a-4=9$
따라서 $a = \frac{13}{2}$
A 의 x 좌표는 $\frac{13}{2}$ 이다.