

1. 중심이 원점이고, 반지름의 길이가 3 인 원의 방정식은?

①  $x^2 + y^2 = 3$

②  $x^2 + y^2 = 1$

③  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 3^2$

④  $x^2 + y^2 = 3^2$

⑤  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 3$

해설

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = 3^2 \Rightarrow \therefore x^2 + y^2 = 9$$

2. 원의 중심이  $(1, -2)$  이고, 반지름이 3 인 원을  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$  일 때,  $A + B + C$  의 값은?

① 4      ② 2      ③ 0      ④ -2      ⑤ -4

해설

원의 중심이  $(1, -2)$  이고, 반지름이 3 인 원은  
 $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 3^2$  으로 나타낼 수 있다.  
이 식을 전개하면  
 $x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 9$   
 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$   
따라서  $A + B + C = -2 + 4 - 4 = -2$

3. 원  $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$  의 반지름의 길이는?

- ① 1      ② 2      ③ 3      ④ 4      ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 &= 0 \\ \Rightarrow (x + 2)^2 + (y - 1)^2 &= 4 = 2^2 \end{aligned}$$

4. 중심이  $y = x - 1$  위에 있고 두 점  $(0, 3)$ ,  $(4, 3)$  을 지나는 원의 반지름의 길이는?

- ①  $\sqrt{5}$     ②  $\sqrt{6}$     ③  $\sqrt{7}$     ④  $2\sqrt{2}$     ⑤ 3

해설

중심을  $(a, a - 1)$ , 반지름을  $r$ 이라 하면,

구하는 원의 방정식은

$$(x - a)^2 + (y - a + 1)^2 = r^2 \dots\dots \textcircled{1}$$

i)  $\textcircled{1}$  이  $(0, 3)$  을 지나므로

$$a^2 + (4 - a)^2 = r^2$$

$$\Rightarrow 2a^2 - 8a + 16 = r^2 \dots\dots \textcircled{2}$$

ii)  $\textcircled{1}$  이  $(4, 3)$  을 지나므로

$$(4 - a)^2 + (4 - a)^2 = r^2$$

$$\Rightarrow 2a^2 - 16a + 32 = r^2 \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{3} : 8a - 16 = 0$$

$$\therefore a = 2$$

$$\therefore \textcircled{2} \text{에서 } r^2 = 8 - 16 + 16 = 8$$

$$\therefore r = 2\sqrt{2} \quad (\because r > 0)$$

5. 두 원  $O_1, O_2$ 의 중심거리가  $d = 7$ 이고, 그 각각 반지름의 길이  $r_1, r_2$ 가 2, 5일 때, 두 원은 어떤 위치관계에 있는가?

- ① 외접한다.                      ② 내접한다.  
③ 두 점에서 만난다.            ④ 만나지 않는다.  
⑤ 네 점에서 만난다.

해설

$d = r_1 + r_2$  이므로 두 원은 외접한다.

6. 두 원  $x^2 + y^2 - x + 2y - 3 = 0$ ,  $2x^2 + 2y^2 - 6x + ay - 2 = 0$ 의 공통현이 직선  $y = -3x - 1$  과 직교할 때, 상수  $a$ 의 값은?

- ① 1      ② 2      ③ 4      ④ 8      ⑤ 16

해설

두 원의 공통현의 방정식은

$$2(x^2 + y^2 - x + 2y - 3) - (2x^2 + 2y^2 - 6x + ay - 2) = 0$$

즉,  $4x + (4 - a)y - 4 = 0 \dots \dots \textcircled{1}$

직선  $\textcircled{1}$ 과 직선  $y = -3x - 1$ 은 직교하므로

$$\frac{-4}{4 - a} \times (-3) = -1 \text{ 에서 } a = 16$$

7. 원  $x^2 + y^2 = 20$  위의 점  $(4, -2)$ 에서의 접선의 방정식이  $y = ax + b$  일 때, 상수  $a, b$ 의 합  $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답:  $-8$

해설

원  $x^2 + y^2 = 20$  위의 점  $(4, -2)$ 에서의 접선의 방정식은  
 $4x - 2y = 20 \quad \therefore y = 2x - 10$   
따라서,  $a = 2, b = -10 \quad \therefore a + b = 2 - 10 = -8$

8. 두 점  $(2, 1)$ ,  $(-3, -1)$ 을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식은?

①  $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 29$       ②  $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{29}{4}$

③  $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 29$       ④  $x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{29}{4}$

⑤  $x^2 + y^2 = 4$

해설

원의 중심은  $\left(\frac{2-3}{2}, \frac{1-1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$  이고,

반지름은  $\frac{\sqrt{(2+3)^2 + (1+1)^2}}{2} = \frac{\sqrt{29}}{2}$  이다.

$$\therefore \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{29}{4}$$

9. 세 점 P(-1, -1), Q(1, 1), R(0, 1)을 지나는 원의 방정식을 구하면?

- ①  $x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0$       ②  $x^2 + y^2 - 2x + 3y - 4 = 0$   
③  $x^2 + y^2 + x - 4y - 5 = 0$       ④  $x^2 + y^2 + 3x - y - 1 = 0$   
⑤  $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 2 = 0$

**해설**

구하는 원의 방정식을  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 으로 놓으면  
이 원이 세 점 P(-1, -1), Q(1, 1), R(0, 1)을 지나므로  
이 점을 차례로 대입하면  
 $(-1)^2 + (-1)^2 + A \cdot (-1) + B \cdot (-1) + C = 0$   
 $\therefore A + B - C = 2 \dots \textcircled{1}$   
 $1^2 + 1^2 + A \cdot 1 + B \cdot 1 + C = 0$   
 $\therefore A + B + C = -2 \dots \textcircled{2}$   
 $0^2 + 1^2 + A \cdot 0 + B \cdot 1 + C = 0$   
 $\therefore B + C = -1 \dots \textcircled{3}$   
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$ 을 연립하여 풀면  
 $A = -1, B = 1, C = -2$   
따라서, 구하는 원의 방정식은  
 $x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0$

10. 다음의  $x, y$  에 대한 이차방정식 중 원의 방정식을 나타내지 않은 것은?

①  $x^2 + y^2 + x + 2y + 1 = 0$       ②  $x^2 + y^2 + x + 2y + 2 = 0$

③  $x^2 + y^2 + 2x + y + 1 = 0$       ④  $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$

⑤  $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$

해설

①  $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 = \frac{1}{4}$

②  $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 = -\frac{3}{4}$

③  $(x + 1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

④  $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 2$

⑤  $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1$

11. 중심이 (2, 3) 이고 y 축에 접하는 원의 방정식은?

- ①  $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$       ②  $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$   
③  $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 4$       ④  $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 9$   
⑤  $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 5$

해설

중심이 (2,3) 일 때 y 축에 접해야 하므로  
반지름의 길이는 2 이다.

12.  $x$  축에 접하는 원  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  의 중심의 좌표가  $(3, -2)$  일 때,  $a + b + c$  의 값은?

- ① 7      ② 8      ③ 9      ④ 10      ⑤ 11

해설

중심의 좌표가  $(3, -2)$  인 원이  $x$  축에 접하므로

반지름의 길이는 2 이다.

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 2^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$$

$$\therefore a + b + c = -6 + 4 + 9 = 7$$

13. 점 (2, 1) 을 지나고  $x$  축,  $y$  축에 동시에 접하는 원의 방정식의 반지름의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

원이 점 (2, 1) 을 지나고  $x$  축,  $y$  축에 접하면 제 1 사분면에 위치하므로 반지름이  $r$  이면 중심이  $(r, r)$  이다.

$$(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2 \text{ 이고}$$

또한 (2, 1) 을 지나므로

$$(2-r)^2 + (1-r)^2 = r^2,$$

$$(r-1)(r-5) = 0$$

$$\therefore r = 1 \text{ 또는 } 5$$

$$\therefore (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \text{ 또는 } (x-5)^2 + (y-5)^2 = 5^2$$

$$\therefore 1 + 5 = 6$$

14. 두 점 A(-1, 0), B(2, 0) 으로부터 거리의 비가 2 : 1 인 점 P 의 자취는 어떤 원을 나타낸다. 이 때, 이 원의 반지름의 길이는?

- ①  $\frac{3}{2}$       ② 2      ③  $\frac{5}{2}$       ④ 3      ⑤ 4

**해설**

조건을 만족시키는 점 P 의 좌표를

P(x, y) 라 하면

$$\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$$

$$2\overline{BP} = \overline{AP}$$

$$\therefore 4\overline{BP}^2 = \overline{AP}^2$$

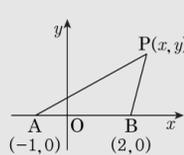
$$\text{그런데 } \overline{AP} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$$

$$\overline{BP} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$$

$$4\{(x-2)^2 + y^2\} = \{(x+1)^2 + y^2\}$$

$$\text{정리하면 } (x-3)^2 + y^2 = 4$$

따라서 원의 반지름은 2 이다.



15. 직선  $y = x + 4$ 가 원  $x^2 + y^2 = 9$ 에 의해서 잘린 현의 길이를 구하여라.

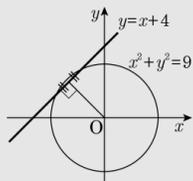
▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

원의 중심 원점에서 직선에 이르는 거리는 직선  $x - y + 4 = 0$

이므로  $\frac{|4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$



원의 중심에서 현에 내린 수선은 현을 수직이등분하므로 피타고라스 정리에서,

현의 길이는  $2\sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2$

16. 다음 원과 직선의 교점의 개수를 구하여라.

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0, \quad 3x - 4y + 6 = 0$$

▶ 답:                       개

▷ 정답: 0개

**해설**

원의 방정식을 표준형으로 나타내면

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 2^2$$

따라서, 원의 중심 (1, -2) 에서 직선

$3x - 4y + 6 = 0$  까지의 거리  $d$  는

$$d = \frac{|17|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{17}{5}$$

이때,  $\frac{17}{5} > 2$  이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

∴ 교점의 개수 : 0개

17. 직선  $3x + 4y + a = 0$  이 원  $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2$  에 접할 때, 양수  $a$  의 값을 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답:  $a = 11$

해설

원의 방정식을 표준형으로 나타내면

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2^2$$

직선이 원에 접하므로 원의 중심

$(1, -1)$  에서 직선까지의 거리가

원의 반지름의 길이 2 와 같다.

$$\text{따라서, } \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$$

$$|a - 1| = 10$$

$$a - 1 = \pm 10$$

$$a > 0 \text{ 이므로 } a = 11$$

18.  $x^2 + y^2 = 9$  에 접하고 기울기가 2 인 직선의 방정식을 구하면?

- ①  $y = x \pm \sqrt{5}$       ②  $y = 2x \pm 3\sqrt{5}$       ③  $y = 4x \pm 2\sqrt{5}$   
④  $y = 5x \pm 5\sqrt{5}$       ⑤  $y = x \pm 2\sqrt{5}$

해설

구하는 접선의 방정식은

$$y = 2x \pm 3\sqrt{1+2^2} \leftarrow m = 2, r = 3$$

$$\therefore y = 2x \pm 3\sqrt{5}$$

19. 원  $x^2 + y^2 = 8$ 과 직선  $y = x + k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나도록 상수  $k$ 의 값의 범위를 구하면?

- ①  $-2 < k < 2$       ②  $0 < k < 4$       ③  $-4 < k < 0$   
④  $-2 < k < 0$       ⑤  $-4 < k < 4$

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리  $d$ 를 구하면

$$d = \frac{|0 + 0 + k|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

이 때, 원의 반지름의 길이가  $2\sqrt{2}$  이므로  
원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면  $d < r$ 이고

$$\frac{|k|}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2} \quad \therefore -4 < k < 4$$

20. 점(3, -1) 에서 원  $x^2 + y^2 = 5$  에 그은 접선의 방정식을 구하면?

- ①  $y = x + 1$  또는  $2x - y + 1 = 0$
- ②  $y = -x + 2$  또는  $4x + 7y - 1 = 0$
- ③  $y = -2x + 5$  또는  $x - 2y - 5 = 0$
- ④  $y = 2x - 6$  또는  $x + 5y - 4 = 0$
- ⑤  $y = -3x + 3$  또는  $4x - 2y - 9 = 0$

**해설**

직선의 기울기를  $m$  이라 하면 이 직선은(3, -1) 을 지나므로  
 $y = mx - 3m - 1$   
또한 이 직선은 원의 접선이므로 대입하면  
 $x^2 + m^2x^2 + 9m^2 + 1 - 6m^2x + 6m - 2mx = 5$   
 $(m^2 + 1)x^2 - 2(3m^2 + m)x + 9m^2 + 6m - 4 = 0$   
이 방정식이 중근을 가져야 하므로  
 $(3m^2 + m)^2 - (m^2 + 1)(9m^2 + 6m - 4) = 0$   
 $9m^4 + 6m^3 + m^2 - 9m^4 - 6m^3 + 4m^2 - 9m^2 - 6m + 4 = 0$   
 $-4m^2 - 6m + 4 = 0$   
 $2m^2 + 3m - 2 = 0$   
 $\therefore (m + 2)(2m - 1) = 0$   
 $\therefore m = -2$  또는  $\frac{1}{2}$   
따라서 접선의 방정식은  
 $y = -2x + 5$  또는  $x - 2y - 5 = 0$