1. 다음 이차방정식 중 근의 개수가 다른 하나는?

① $x^2 + 12x + 36 = 0$ ② $x^2 = 10x - 25$

③ $9 - x^2 = 4(x+3)$ ④ $(x+1)(x-1) = 2x - 2$

⑤ $x^2 = 4x - 4$

해설

이차방정식이 중근을 가지려면 $(ax+b)^2 = 0$의 꼴이 되어야 한다.

① $(x+6)^2 = 0$

② $(x-5)^2 = 0$

③ $9 - x^2 = 4(x+3) \leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0$

④ $x^2 - 1 = 2x - 2 \leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \leftrightarrow (x-1)^2 = 0$

⑤ $(x-2)^2 = 0$

2. 이차방정식 $a^2x^2 + 2(2-a)x + 1 = 0$ 이 해를 갖지 않도록 하는 상수 a 의 값이 될 수 있는 것은?

① 0 ② 2 ③ 1 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ -1

해설

$D = 4(2-a)^2 - 4a^2 < 0$

$\therefore a > 1$

3. 이차방정식 $2x^2 - ax + 6 = 0$ 의 두 근이 1, 3 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

근의 계수의 관계로 부터

$1 + 3 = \frac{a}{2}$

$\therefore\ a = 8$

4. 이차방정식 $\left(\frac{1}{2}x+1\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)=1$의 두 근의 합은?

① $-\frac{5}{3}$ ② -2 ③ $-\frac{7}{3}$ ④ $-\frac{8}{3}$ ⑤ -3

해설

$\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{6}x-\frac{1}{3}-1=0$

양변에 6을 곱하면 $3x^2+5x-8=0$이다.

$(3x+8)(x-1)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=-\frac{8}{3}$

따라서 두 근의 합은 $-\frac{5}{3}$이다.

5. 이차방정식 $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 4 = 0$ 이 중근을 갖기 위한 m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{5}{2}$

해설

$D = 4(m-1)^2 - 4(m^2 - 4) = 0$

$m^2 - 2m + 1 - m^2 + 4 = 0$

$-2m + 5 = 0$

$\therefore\ m = \frac{5}{2}$

6. 이차방정식 $x^2 - 2x - 2 = 0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$\alpha + \beta = 2,\ \alpha\beta = -2$ 이므로

$$\therefore \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta}$$

$$= \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta}$$

$$= \frac{2^2 + 4}{-2} = -4$$

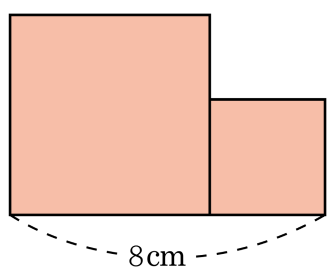
7. 이차방정식 $x^2+2x-3=0$ 의 두 근의 합과 곱을 두 근으로 하고, x^2 의 계수가 1 인 이차방정식은?

① $x^2-5x-6=0$
② $x^2-5x+6=0$
③ $x^2+5x-6=0$
④ $x^2+6x+5=0$
⑤ $x^2+5x+6=0$

해설

두 근의 합은 -2, 두 근의 곱은 -3
-2, -3 을 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 1 인 이차방정식은
$(x+2)(x+3)=0$
$\therefore\ x^2+5x+6=0$

8. 다음 그림과 같이 길이가 8cm 인 선분 위에 한 점을 잡아 정사각형 두 개를 만들었다. 큰 정사각형의 넓이가 작은 정사각형의 넓이의 3 배일 때, 큰 정사각형의 한 변의 길이는?



① $4\sqrt{3}$cm　② $(8-2\sqrt{3})$cm　③ 5cm

④ $(12-4\sqrt{3})$cm　⑤ $(3+2\sqrt{2})$cm

해설

큰 정사각형의 한 변을 x cm, 작은 정사각형의 한 변을 $(8-x)$ cm 라고 하면,

$x^2 = 3(8-x)^2$

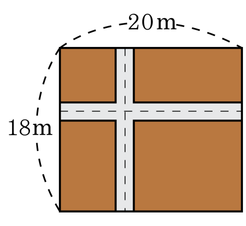
$x^2 = 3(64-16x+x^2)$, $x^2-24x+96=0$

근의 공식 (짝수공식) 을 이용하여 풀면

$x = 12 \pm \sqrt{144-96} = 12 \pm 4\sqrt{3}$

$x < 8$ 이므로 $x = 12-4\sqrt{3}$

9. 가로, 세로가 각각 20 m, 18 m인 땅에 폭이 일정한 십자형의 도로를 만들려고 한다. 도로를 제외한 땅의 넓이가 288 m^2이면 도로의 폭은 얼마인가?



① 1 m　② 2 m　③ 3 m　④ 4 m　⑤ 5 m

해설

도로의 폭을 x m라 하면

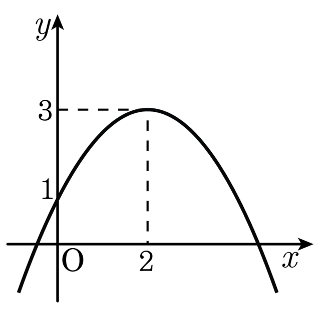
$(20-x)(18-x)=288$

$x^2-38x+72=0$

$x=2$ 또는 $x=36$

$0<x<18$이므로 $x=2$

10. 다음 그림과 같은 그래프를 갖는 이차함수의 식을 고르면?



① $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$ ② $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 2$

③ $y = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 4$ ④ $y = -2x^2 + 2x + 3$

⑤ $y = -2x^2 - x + 4$

해설

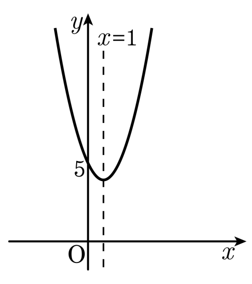
꼭짓점이 $(2,3)$ 이므로 $y = a(x-2)^2 + 3$

또 y 절편이 1 이므로 $4a + 3 = 1$

$a = -\frac{1}{2}$

$\therefore\ y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$

11. 다음 그림은 직선 $x = 1$을 축으로 하는 이차 함수 $y = x^2 + bx + c$의 그래프이다. b, c의 값을 각각 구하여라.



▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $b = -2$

▷ 정답 : $c = 5$

해설

$y = (x-1)^2 + q$ 에서 $(0,\ 5)$를 대입하면 $q = 4$이다.
$\therefore y = (x-1)^2 + 4 = x^2 - 2x + 5$
$\therefore b = -2, c = 5$

12. 세 점 $(-4,\ 0)$, $(2,\ 0)$, $(0,\ 4)$를 지나는 포물선의 식으로 옳은 것은?

① $y=-\frac{1}{2}x^2-x+4$
② $y=-x^2-2x+4$
③ $y=-2x^2+4x+1$
④ $y=-2x^2-4x+5$
⑤ $y=-3x^2+5x+1$

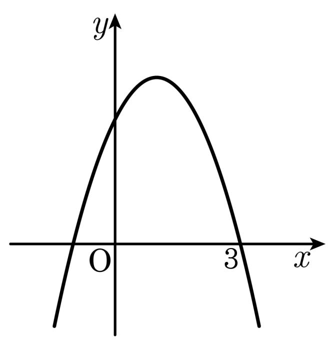
해설

$(-4,\ 0)$, $(2,\ 0)$ 을 지나므로 $y=a(x+4)(x-2)$

$(0,\ 4)$ 를 대입하면 $4=-8a$,$a=-\frac{1}{2}$

$\therefore y=-\frac{1}{2}(x+4)(x-2)=-\frac{1}{2}x^2-x+4$ 이다.

13. 다음 그림은 이차함수 $y=-x^2-2ax+3$ 의 그래프이다. 이 함수의 최댓값은?



① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$y=-x^2-2ax+3$ 이 점 $(3,\ 0)$ 을 지나므로

$0=-9-6a+3,\ a=-1$

$\therefore y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$

$x=1$ 일 때, 최댓값은 4 이다.

14. 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2-4x+k$ 의 최솟값과 이차함수 $y=-2x^2+4x-2k+2$ 의 최댓값이 일치할 때, k 의 값은?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

$i)$ $y=\frac{1}{2}(x^2-8x+16-16)+k=\frac{1}{2}(x-4)^2+k-8$

$x=4$ 일 때, 최솟값 $k-8$ 을 갖는다.

$ii)$ $$\begin{aligned} y &= -2(x^2-2x+1-1)-2k+2 \\ &= -2(x-1)^2-2k+4 \end{aligned}$$

$x=1$ 일 때 최댓값 $-2k+4$ 를 갖는다.

$i)$ 의 최솟값과 $ii)$ 의 최댓값이 같으므로

$k-8=-2k+4$

$\therefore k=4$

15. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 다음 두 조건을 모두 만족할 때, $a + b - c$ 의 값을 구하여라.

> ㉠ 두 점 $(-3,\ 0)$, $(-5,\ 0)$ 에서 만난다.
>
> ㉡ 최솟값이 $-\frac{1}{3}$ 이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$y = a(x+3)(x+5)$ 로 놓으면 $y = a(x^2+8x+15) = a(x+4)^2 - a$

최솟값이 $-\frac{1}{3}$ 이므로 $-a = -\frac{1}{3}$ 에서 $a = \frac{1}{3}$ 이다.

즉, $y = \frac{1}{3}(x^2+8x+15) = \frac{1}{3}x^2+\frac{8}{3}x+5$ 에서 $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{8}{3}$, $c = 5$ 이다.

$\therefore a + b - c = \frac{1}{3} + \frac{8}{3} - 5 = -2$

16. 둘레의 길이가 48m 인 직사각형 중 그 넓이가 가장 넓을 때의 넓이를 구하면?

① $81\mathrm{m}^2$　② $100\mathrm{m}^2$　③ $121\mathrm{m}^2$
④ $144\mathrm{m}^2$　⑤ $169\mathrm{m}^2$

해설

가로의 길이를 $x\,\mathrm{m}$, 세로의 길이를 $(24-x)\,\mathrm{m}$, 넓이를 $y\,\mathrm{m}^2$ 라 하면

$$\begin{aligned} y &= x(24-x) \\ &= -x^2+24x \\ &= -(x^2-24x+144-144) \\ &= -(x-12)^2+144 \end{aligned}$$

따라서 $x=12$ 일 때 넓이의 최댓값은 $144\,\mathrm{m}^2$ 이다.

17. 가로의 길이가 6cm , 세로의 길이가 10cm 인 직사각형에서 가로의 길이를 $x$cm 길게 하고 세로의 길이를 $x$cm 짧게 한 직사각형의 넓이가 최대일 때, x 값은?

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 14 ⑤ 15

해설

넓이를 y 라 하면

$y = (6+x)(10-x)$

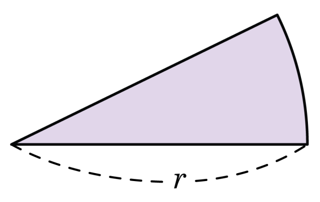
$= -x^2 + 4x + 60$

$= -(x^2 - 4x + 4 - 4) + 60$

$= -(x-2)^2 + 64$

따라서 $x = 2$ 일 때 최댓값 64 를 가진다.

18. 둘레의 길이가 20cm 인 부채꼴의 넓이가 최대일 때의 반지름의 길이는?



① 1cm ② 2cm ③ 3cm ④ 4cm ⑤ 5cm

해설

부채꼴의 호의 길이는 $l = (20-2r)$cm
부채꼴의 넓이를 y라 하면
$y = \frac{1}{2}r(20-2r) = (10-r)r = -(r-5)^2 + 25$
따라서 꼭짓점이 $(5, 25)$ 이므로 반지름의 길이가 5 cm 일 때, 부채꼴의 넓이가 최댓값 25cm^{2}를 가진다.

19. 이차방정식 $ax^2+bx+5=0$ 의 한 근이 $\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$ 일 때, 유리수 a , b 의 합 $a+b$ 의 값은?

① 5　　② 10　　③ 15　　④ 20　　⑤ 25

해설

한 근이 $\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}=\sqrt{5}+2$ 이므로 다른 한 근은 $-\sqrt{5}+2$

근과 계수와의 관계에서

$-\dfrac{b}{a}=(\sqrt{5}+2)+(-\sqrt{5}+2)=4$, $\dfrac{5}{a}=(\sqrt{5}+2)(-\sqrt{5}+2)=-1$

$\therefore a=-5$

$\therefore b=-4a=(-4)\times(-5)=20$

$\therefore a+b=-5+20=15$

20. 귤 360 개를 학생들에게 똑같이 나누어 주었다. 그 후에 학생 2 명이 더 와서 학생들에게 이미 나누어 준 귤을 2 개씩 받아서 (회수하여), 나중에 온 2 명의 학생들에게 똑같이 주었더니 모든 학생들에게 돌아간 귤의 수가 같게 되었다. 처음 학생 수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 명

▷ 정답 : 18 명

해설

처음 학생 수 : x 명이라고 하면,

→ 처음 한 사람당 받은 귤 수 : $\frac{360}{x}$ 개

나중 학생 수 : $(x+2)$ 명

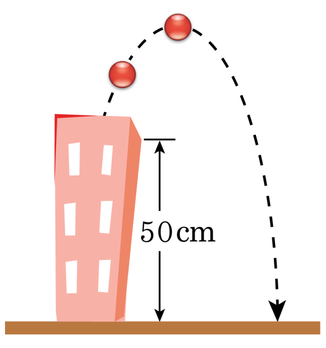
→ 나중에 한 사람당 받은 귤 수 : $\left(\frac{360}{x}-2\right)$ 개 이므로

$\left(\frac{360}{x}-2\right)(x+2)=360$

정리하면 $x^2+2x-360=(x+20)(x-18)=0$

$\therefore\ x=18$

21. 지면으로부터 50m 되는 높이에서 초속 25m 로 위에 던져 올린 물체의 t 초 후의 높이를 hm 라고 하면 t 와 h 사이에는 $h = -5t^2 + 25t + 50$ 인 관계가 성립한다. 이 물체가 올라가는 최고점의 높이를 구하여라. (단, 단위는 생략)



▶ 답 :

▷ 정답 : 81.25

해설

최고점까지 걸린 시간은 옥상의 높이와 같은 50m 를 지날 때의 시간의 절반이므로

$-5t^2 + 25t + 50 = 50$

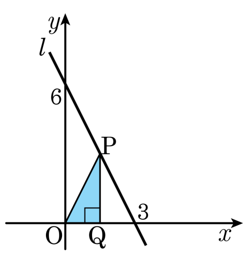
$t = 5$

따라서 최고점까지 걸린 시간은 2.5 초이다.

최고점까지의 거리는 물체가 2.5 초만큼 움직인 거리이므로

$h = -5t^2 + 25t + 50 = 81.25(\mathrm{m})$

22. 다음 그림과 같이 직선 l 위를 움직이는 점 P 가 있다. x 축 위에 내린 수선의 발을 Q 라고 할 때, $\triangle$POQ 의 넓이의 최댓값을 구하여라. (단, 점 P는 제 1 사분면 위에 있다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{9}{4}$

해설

직선 l 은 두 점 $(3,\ 0)$, $(0,\ 6)$ 을 지나므로

$y = -2x + 6$

점 P 의 좌표를 $(a,\ b)$ 로 놓으면 $b = -2a + 6$

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{POQ} = \frac{1}{2}ab &= \frac{1}{2}a(-2a+6)\\ &= -a^2 + 3a\\ &= -\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}\end{aligned}$$

한편, 점 P 는 제 1사분면 위의 점이므로

$a > 0,\ b = -2a + 6 > 0 \qquad \therefore\ 0 < a < 3$

따라서 $\triangle$POQ 의 넓이는 $a = \frac{3}{2}$ 일 때, 최댓값 $\frac{9}{4}$ 를 갖는다.

23. 무리수 x 의 소수 부분을 y 라 하자. 이 때, $x^2 + y^2 = 33$ 을 만족하는 무리수 x 의 값들의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x^2 + y^2 = 33$ 에서 $y^2 = 33 - x^2$

$0 \le y < 1$ 이므로 $0 \le y^2 < 1$ 에서

$0 \le 33 - x^2 < 1$

$\therefore 32 < x^2 \le 33$

$5^2 < 32 < x^2 \le 33 < 6^2$

따라서 x 의 정수 부분은 5 이다.

$\therefore x = 5 + y$

$x^2 + (x - 5)^2 = 33$ 이므로 $x^2 - 5x - 4 = 0$ 이다.

$\therefore$ x 의 합은 근과 계수의 관계에 의해 5 이다.

24. 이차방정식 $ax^2-\left(\frac{a}{b}+3\right)x+\frac{a}{b}+1=0$ 의 두 근의 합이 2, 곱이 -2 일 때, a^2+b^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{5}{16}$

해설

x^2 의 계수가 a 이고 두 근의 합이 2, 곱이 -2 인 이차방정식은 $a(x^2-2x-2)=0$ 이고 주어진 식의 계수와 비교하면

$-\left(\frac{a}{b}+3\right)=-2a \cdots$ ㉠

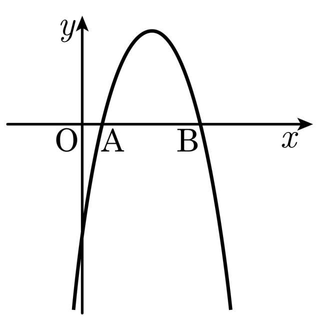
$\frac{a}{b}+1=-2a \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$\therefore\ a=\frac{1}{2},\ b=-\frac{1}{4}$

$\therefore a^2+b^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=\frac{5}{16}$

25. 다음은 이차함수 $y=-x^2+6x+k$ 의 그래프이다. $\overline{\mathrm{AB}}=4$ 일 때, 이 이차함수의 최댓값은?



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$y=-x^2+6x+k=-(x-3)^2+k+9$ 에서
축의 방정식은 $x=3$ 이다.
그림에서 보듯 $\overline{\mathrm{AB}}=4$ 이면 점 A , B 는 축 $x=3$ 에서 각각 2 만큼 떨어져 있다.
$\therefore$ A(1, 0), B(5, 0)
구하는 식은 $y=-(x-1)(x-5)=-x^2+6x-5$
$\therefore k=-5$
$y=-(x-3)^2+4$
$\therefore x=3$ 에서 최댓값 4