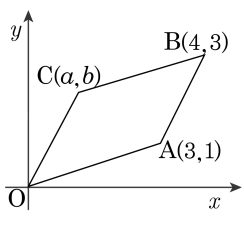


1. 다음 그림과 같이 네 점 A(3, 1), B(4, 3), C(a, b), O(0, 0)을 꼭짓점으로 하는 평행사변형 OABC에서 $a + b$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

평행사변형 OABC에서 두 대각선의 중점은 일치하므로

$$\left(2, \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{a+3}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$$

$$\frac{a+3}{2} = 2 \text{에서 } a = 1$$

$$\frac{b+1}{2} = \frac{3}{2} \text{에서 } b = 2$$

$$\therefore a + b = 3$$

2. 일차함수 $\sqrt{3}x - y = 1$ 의 기울기와 y 절편, x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 차례대로 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답 ▶ ○

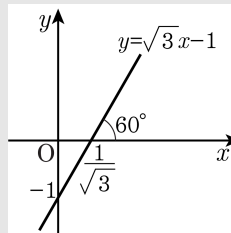
▷ 정답 : 기울기 $\sqrt{3}$

▷ 정답 : y 절편 -1

▶ 정답 : 60°

해설

$y = \sqrt{3}x - 1$ 에서
기울기 $\sqrt{3}$, y 절편 -1 , x 축의 양의 방
향과 이루는 각 60°



3. x 축 위의 점 P로부터 두 직선 $2x - y + 1 = 0$, $x - 2y - 2 = 0$ 까지의 거리가 같다. 점 P의 좌표를 $(a, 0)$, $(b, 0)$ 이라 할 때 $-ab$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

P의 좌표를 $(\alpha, 0)$ 이라 하면

P에서 두 직선까지의 거리가 같으므로

$$\frac{|2\alpha + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|\alpha - 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}}$$

$$\therefore |2\alpha + 1| = |\alpha - 2|$$

$$\therefore 2\alpha + 1 = \pm(\alpha - 2)$$

$$\therefore \alpha = \frac{1}{3}, -3$$

$$\therefore \left(\frac{1}{3}, 0\right), (-3, 0) \text{ 이므로}$$

$$-ab = -\frac{1}{3} \times -3 = 1$$

4. 점 $(-1, -2)$ 를 x 축의 방향으로 6 만큼 평행이동한 다음 직선 $x = a$ 에 대하여 대칭이동하면 처음 위치로 돌아온다. 이 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

먼저 점 $(-1, -2)$ 를 x 축의 방향으로 6 만큼
평행이동한 점의 좌표는
 $(-1 + 6, -2)$, 즉 $(5, -2)$
점 $(5, -2)$ 를 다시 직선 $x = a$ 에 대하여
대칭이동한 점의 좌표는
 $(2a - 5, -2)$
이 때, 이것이 $(-1, -2)$ 와 같으므로 $2a - 5 = -1$
 $\therefore a = 2$

5. 상수 a, b, c 가 조건 $ab > 0, bc < 0$ 을 만족시킬 때 방정식 $ax+by-c=0$ 이 나타내는 그래프가 지나는 사분면을 모두 고르면?

- ① 제 1, 2, 3 사분면 ② 제 2, 3, 4 사분면
③ 제 1, 3, 4 사분면 ④ 제 1, 2 사분면
⑤ 제 2, 3 사분면

해설

$$ax+by-c=0 \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$$

$ab > 0, bc < 0$ 이므로
기울기는 (-), y절편은 (-)이다.
 $\therefore$ 제 2,3,4사분면을 지난다.

6. 직선 $kx - y + 3k = 1$ 은 k 값에 관계없이 항상 일정한 점 A를 지난다.
이 점 A의 좌표는?

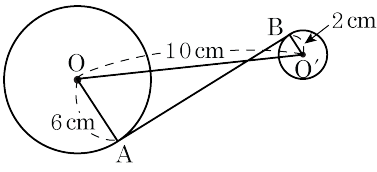
- ㉠ A(-3, -1) ㉡ A(-2, -1) ㉢ A(-1, -1)
㉣ A(1, -1) ㉤ A(2, 1)

해설

주어진 식을 k 에 대하여 정리하면
 $(x + 3)k - (y + 1) = 0$
위 식은 k 값에 관계없이
 $x + 3 = 0$, $y + 1 = 0$ 의 교점을 지난다.
 $\therefore x = -3$, $y = -1$
 $\therefore A(-3, -1)$

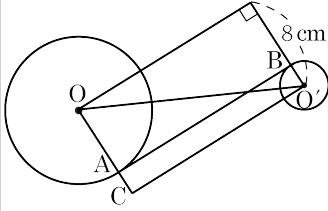
7. 다음 그림의 두 원 O 와 O' 에서 공통접선 AB 의 길이를 구하면?

- ① 6 ② 8 ③ 10
 ④ 7 ⑤ 9



해설

다음 그림과 같이 AB 를 평행이동시켜 생각하면
 $OO'C$ 는 직각삼각형이고
 $\overline{AB} = \overline{OC}$ 이다.
 $\therefore \overline{OC}^2 = 10^2 - 8^2 = 36, \overline{OC} = 6$



8. 직선 $3x + 4y + k = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 = 4$ 와 서로 만나지 않을 때, 실수 k 값의 범위는?

① $k = -10$

② $k = 10$

③ $-10 < k < 10$

④ $k < -10$ 또는 $k > 10$

⑤ $k > 10$

해설

직선 $3x + 4y + k = 0$ 에서 원의 중심 $(0, 0)$ 까지의 거리를 d 라 하면

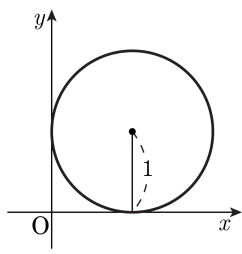
$$d = \frac{|k|}{5} \text{이다.}$$

원과 직선이 만나지 않을 때, $d > r$ 이므로

$$\frac{|k|}{5} > 2$$

$$\therefore k < -10 \text{ 또는 } k > 10$$

9. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원이 x 축, y 축에 동시에 접하고 있다. 이 원 위의 점 (x, y) 에 대하여 $\frac{y+2}{x+1}$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\frac{y+2}{x+1} = k$ 라 하면 직선 $y+2 = k(x+1)$ 은

k 값에 관계없이 점 $(-1, -2)$ 를 지난다.

이 때, 기울기 k 는 직선이 원에 접할 때 최댓값과 최솟값을 갖는다.

$$\frac{|k-1+k-2|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$$

$$|2k-3| = \sqrt{k^2+1}$$

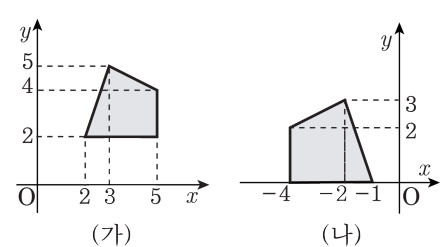
$$4k^2 - 12k + 9 = k^2 + 1$$

$$3k^2 - 12k + 8 = 0$$

최댓값과 최솟값은 이 방정식의 해이므로

근과 계수와의 관계에 의해 합은 4이다.

10. 그림 (가)의 도형은 평행이동 및 대칭이동에 의해 그림 (나)로 이동한다. 그림 (가)의 도형의 방정식이 $f(x, y) = 0$ 일 때, 그림 (나)의 도형의 방정식은?



- ① $f(x + 1, y + 2) = 0$
 ② $f(x + 1, y - 2) = 0$
- ③ $f(-x - 1, y - 2) = 0$
 ④ $f(-x + 1, y - 2) = 0$
- ⑤ $f(-x + 1, y + 2) = 0$

해설

그림 (가)의 도형이 y 축에 대해 대칭되고
 x 축의 방향으로 1 만큼,
 y 축의 방향으로 -2 만큼 이동되었으므로
 그림 (나)의 도형의 방정식은
 $f(-x + 1, y + 2) = 0$ 이 된다.

11. $y \geq x^2 - 4x + 3$, $x + y \leq 7$ 에서 $2x - y$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

주어진 부등식은 그림과 같다.

$2x - y = k$ 라 놓으면

$y = 2x - k$ 이고

$y = x^2 - 4x + 3$ 과

$x + y = 7$ 을 연립하여 교점을 구하면

$x = -1$, $y = 8$ 또는 $x = 4$, $y = 3$

그림에서와 같이 $y = 2x - k$ 가 점 $(-1, 8)$

을 지날 때

최솟값 $m = -2 - 8 = -10$

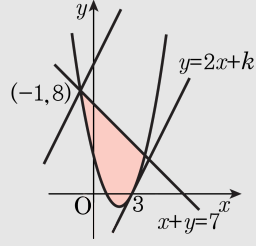
또한, $y = 2x - k$ 가 $y = x^2 - 4x + 3$ 에 접할 때,

$x^2 - 4x + 3 = 2x - k$ 에서 $x^2 - 6x + 3 + k = 0$

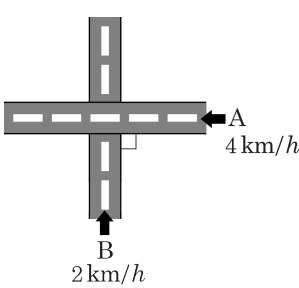
$$\frac{D}{4} = 9 - (3 + k) = 0$$

$M = 6$ (최댓값)

$\therefore M - m = 6 - (-10) = 16$



12. 그림과 같이 수직으로 만나는 도로가 있다. 교차점에서 A는 동쪽으로 6km, B는 남쪽으로 4km지점에 있다. 지금 A는 시속 4km의 속도로 서쪽으로, B는 시속 2km의 속도로 북쪽을 향하여 동시에 출발했을 때 A, B 사이의 거리가 가장 짧을 때는 출발 후 몇 시간 후인가?



- ① 1 시간 후 ② 1.2 시간 후 ③ 1.4 시간 후
 ④ 1.6 시간 후 ⑤ 2 시간 후

해설

동서를 x 축, 남북을 y 축으로 잡으면
 최초의 A, B 의 위치는 A(6, 0) , B(0, -4) 이고
 t 시간 후의 A, B 의 좌표는
 A(6 - 4 t , 0), B(0, -4 + 2 t) 이다.
 따라서 t 시간 후의 $\overline{AB}$ 의 거리는 s 는

$$s = \sqrt{(6 - 4t)^2 + (-4 + 2t)^2}$$

$$= \sqrt{20t^2 - 64t + 52}$$

$$= \sqrt{20\left(t^2 - \frac{64}{20}t\right) + 52}$$

$$= \sqrt{20\left(t - \frac{8}{5}\right)^2 + \frac{4}{5}}$$
 이므로
 $t = \frac{8}{5}$ 일 때 최소가 된다.
 $\therefore$ 출발 후 1.6 시간 후이다.

13. 좌표평면 위의 두 점 A(-2, 5), B(6, -3)을 잇는 선분 AB를 $t : (1-t)$ 로 내분하는 점이 제 1사분면에 있을 때, t 의 값의 범위는? (단, $0 < t < 1$)

① $\frac{1}{8} < t < \frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{2} < t < \frac{7}{8}$

② $\frac{1}{4} < t < \frac{5}{8}$
⑤ $\frac{5}{8} < t < 1$

③ $\frac{3}{8} < t < \frac{3}{4}$

해설

선분 AB를 $t : (1-t)$ 로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{t \cdot 6 + (1-t) \cdot (-2)}{t + (1-t)}, \frac{t \cdot (-3) + (1-t) \cdot 5}{t + (1-t)} \right) = (8t - 2, 5 - 8t)$$

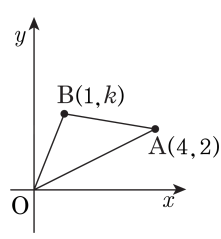
이 점이 제 1사분면에 있기 위해서는

$$8t - 2 > 0, 5 - 8t > 0$$

$$\therefore \frac{1}{4} < t < \frac{5}{8}$$

14. 다음 그림과 같이 O(0, 0), A(4, 2), B(1, k)를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB의 넓이가 4일 때, 양수 k 의 값은?

- ① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3
 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4



해설

직선 OA의 방정식은 $x - 2y = 0$ 이다.

점 B(1, k)에서 직선 $x - 2y = 0$ 까지의 거리

$$h \text{는 } h = \frac{|1 \times 1 - 2 \times k|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{|1 - 2k|}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore \overline{OA} = 2\sqrt{5}$$

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \frac{|1 - 2k|}{\sqrt{5}} = 4$$

$$\therefore k = \frac{5}{2} \quad (\because k > 0)$$

15. 두 원 $x^2 + y^2 = 9$, $(x - 4)^2 + y^2 = 1$ 에 동시에 외접하고 반지름의 길이가 2인 원의 중심의 좌표를 구하면?

① (3, 3)

② (3, -3)

③ (4, ± 4)

④ (± 4 , 4)

⑤ (4, ± 3)

해설

두 원이 외접하면 중심사이 거리는 반지름 길이 합과 같다.

중심의 좌표를 (a, b) 라 하면,

$\Rightarrow$ i) $a^2 + b^2 = 25$

ii) $(a - 4)^2 + b^2 = 9$ 연립하면,

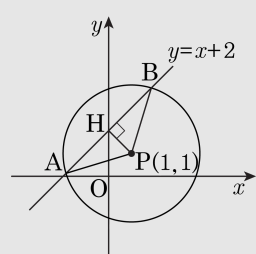
$a = 4, b = \pm 3$

$\therefore$ 중심은 $(4, \pm 3)$

16. 중심이 (1, 1) 이고, 반지름이 3 인 원과 직선 $y = x + 2$ 가 두 점 A, B 에서 만난다. 이 때, 두 점 A, B 사이의 거리를 구하면?

① $2\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $2\sqrt{6}$ ④ $2\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{10}$

해설



그림에서 원의 중심을 P, 점 P 에서
선분 AB 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$\overline{PH} = \frac{|1 - 1 + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2}$$

$$\overline{AH} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{7}$$

$$\text{따라서 } \overline{AB} = 2 \cdot \overline{AH} = 2\sqrt{7}$$

17. 두 점 A(1, 0), B(4, 0)으로부터의 거리의 비가 2 : 1 인 점 P에 대하여 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은?

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

해설

주어진 조건에서 $\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$ 이므로

$\overline{AP} = 2\overline{BP}$

$\therefore \overline{AP}^2 = 4\overline{BP}^2$

점 P의 좌표를 (x, y)로 놓으면

$(x-1)^2 + y^2 = 4\{(x-4)^2 + y^2\}$

$\therefore (x-5)^2 + y^2 = 4$

따라서 점 P는 중심이 (5, 0)이고 반지름의 길이가 2인 원 위를 움직인다.

그림과 같이 점 P에서 x축에 내린 수선

의 발을

H라 하면 $\overline{PH}$ 의 길이가

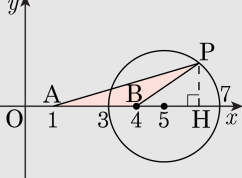
반지름의 길이와 같을 때 삼각형 PAB

의 넓이가

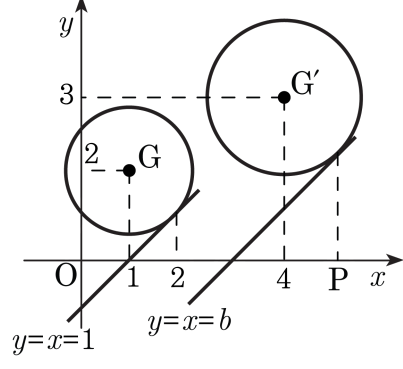
최대가 되므로 $\Delta PAB = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{PH} \leq$

$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3$

따라서 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은 3이다.



18. 다음 그림과 같이 같은 크기의 두 원 $G : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 2$, $G' : (x-4)^2 + (y-3)^2 = 2$ 가 있다. 또, 원 G 는 $x=2$ 에서 직선 $y=x-1$ 에 접하고, G' 은 $x=p$ 에서 직선 $y=x-b$ 에 접하고 있다. 이 때, $p+b$ 의 값은?



- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

원 G' 은 원 G 를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고, 원 G 의 접점의 좌표는 $(2, 1)$ 이므로 원 G' 의 접점의 좌표는 $(5, 2)$ 이다.
따라서, $p=5$ 이고, 점 $(5, 2)$ 는 직선 $y=x-b$ 위의 점이므로 $2=5-b$ 에서 $b=3$
 $\therefore p+b=5+3=8$

19. $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$ 을 y 축에 대하여 대칭이동시키면 직선 $y = mx$ 에 접한다고 한다. 이 때, 상수 m 의 값들의 합을 구하면?

- ① $-\frac{12}{5}$
- ② $-\frac{7}{5}$
- ③ $\frac{1}{5}$
- ④ $\frac{3}{5}$
- ⑤ $\frac{6}{5}$

해설

$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$ 을 y 축에 대하여 대칭이동시키면
 $(-x)^2 + y^2 - 6(-x) - 4y + 9 = 0$, $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 = 0$
 $\therefore (x+3)^2 + (y-2)^2 = 2^2 \dots\dots \textcircled{1}$
이때, $\textcircled{1}$ 이 직선 $mx-y=0$ 에 접하므로 이 직선과 $(-3, 2)$ 사이의
거리는 2이어야 한다.
 $\therefore, \frac{|-3m-2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = 2$
 $9m^2 + 12m + 4 = 4m^2 + 4$
 $\therefore 5m^2 + 12m = 0$
따라서, $m = 0$ 또는 $m = -\frac{12}{5}$ 이므로 그 합은 $0 + \left(-\frac{12}{5}\right) = -\frac{12}{5}$

20. 좌표평면 위의 두 점 A(4, 3), B(1, 3)이 있다. 점 A에서 x 축 위의 점과 y 축 위의 점을 각각 지나 점 B에 이르는 최단 거리는?

- ① 5 ② 7 ③ $\sqrt{53}$ ④ $\sqrt{61}$ ⑤ $\sqrt{75}$

해설

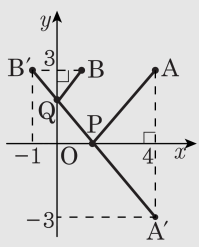
점 A의 x 축에 대한 대칭점을 A', 점 B의 y 축에 대한 대칭점을 B'

두 점 A', B'을 지나는 직선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 P, Q 라고 하면

$$\overline{AP} = \overline{A'P}, \overline{BQ} = \overline{B'Q}$$

주어진 조건을 만족하는 최단 거리는 두 점 A'(4, -3), B'(-1, 3) 사이의 거리이다.

$$\therefore \overline{A'B'} = \sqrt{(4+1)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{61}$$



21. 점 O 를 지나는 직선이 좌표평면 위의 원 C 와
 두 점 A, B 에서 만날 때, $\overline{OA} \cdot \overline{OB}$ 의 값이 일정함을 다음과 같이
 증명하였다.

㉔, ㉕, ㉖에 알맞은 것을 차례로 적으면?

증명

원점 O을 지나는 직선의 방정식을
 $y = mx \cdots \cdots \textcircled{㉑}$
 원 C의 방정식을 $(x - a)^2 + y^2 = r^2$
 $(a > 0, r > 0) \cdots \cdots \textcircled{㉒}$ 라 하자
 $\textcircled{㉑}, \textcircled{㉒}$ 에서 $(1 + m^2)x^2 - 2ax + a^2 - r^2 = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉓}$
 $\textcircled{㉓}$ 의 두 실근을 α, β 라 하면 $\alpha\beta = (\textcircled{㉔})$
 따라서 $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = (\textcircled{㉕}) \cdot |\alpha\beta| = (\textcircled{㉖})$
 그러므로 m 에 관계없이 $\overline{OA} \cdot \overline{OB}$ 의 값은 일정하다.

- ㉑ $\frac{a^2 - r^2}{1 - m^2}, 1 - m^2, |a^2 - r^2|$
 ㉒ $\frac{a^2 - r^2}{1 + m^2}, 1 + m^2, |a^2 - r^2|$
 ㉓ $\frac{a^2 - r^2}{1 - m^2}, 2(1 - m^2), 2|a^2 - r^2|$
 ㉔ $\frac{a^2 - r^2}{1 + m^2}, 2(1 + m^2), 2|a^2 - r^2|$
 ㉕ $\frac{a^2 - r^2}{1 + m^2}, r(1 + m^2), r|a^2 - r^2|$

해설

$\textcircled{㉓}$ 에서 근과 계수와의 관계에서
 $\alpha\beta = \frac{a^2 - r^2}{1 + m^2}$
 $A(\alpha, m\alpha), B(\beta, m\beta)$ 이므로
 $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = \sqrt{\alpha^2 + (m\alpha)^2} \cdot \sqrt{\beta^2 + (m\beta)^2}$
 $= (1 + m^2)|\alpha\beta| = |a^2 - r^2|$

22. p, q 가 실수일 때, x 에 대한 이차방정식 $(x-1)(x-2) = k(x-p^2-q^2)$ 이 모든 실수 k 에 대하여 실근을 가지도록 하는 점 (p, q) 가 나타내는 영역의 넓이를 구하면?

① π ② 2π ③ 3π ④ 4π ⑤ 5π

해설

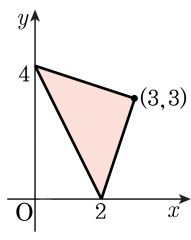
주어진 이차방정식을 정리하면,
 $x^2 - (k+3)x + k(p^2+q^2) + 2 = 0$
 $\therefore D = (k+3)^2 - 4k(p^2+q^2) - 8 \geq 0$
 $k^2 + 2\{3 - 2(p^2+q^2)\}k + 1 \geq 0$ 이 모든 실수 k 에 대하여 성립하므로,
 $D/4 = \{3 - 2(p^2+q^2)\}^2 - 1 \leq 0$
 $\therefore 1 \leq p^2+q^2 \leq 2$
따라서 구하는 넓이는 $2\pi - \pi = \pi$

23. 원 $x^2 + y^2 = 1$ 을 x 축의 방향으로 3만큼 평행이동시킨 원, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동시킨 원, x 축의 방향으로 3만큼 평행이동 후 y 축의 방향으로 3만큼 평행이동시킨 원에 대하여 직선 $y = -x$ 에 이르는 거리의 최댓값은?
- ① $-1 + 3\sqrt{2}$ ② 4 ③ $\sqrt{17}$
- ④ $1 + 3\sqrt{2}$ ⑤ $2 + 3\sqrt{2}$

해설

P 에서 직선 $y = -x$ 까지의 거리가 최대이다.
거리의 최댓값은 $\frac{|3+3|}{\sqrt{2}} + 1 = 1 + 3\sqrt{2}$ 이다.

24. 다음 그림의 어두운 영역에 속하는 임의의 점 (x, y) 에 대하여 $x^2 + y^2$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M + 5m$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 34

해설

$x^2 + y^2 = k^2$ 라 하면 k^2 의 최댓값 M 과 최솟값 m 을 구하면 된다.

다음 그림에서

- i) 최댓값은 원 $x^2 + y^2 = k^2$ 이 점 $(3, 3)$ 을 지날 때이므로

$$M = k^2 = 9 + 9 = 18 \text{ 이다.}$$

- ii) 최솟값은 두 점 $(2, 0)$, $(0, 4)$ 를

지나는 직선의 방정식 $2x + y - 4 = 0$ 에 원 $x^2 + y^2 = k^2$ 이 접할 때이므로

원의 중심 $(0, 0)$ 에서 직선 $2x + y - 4 = 0$ 까지의 거리가

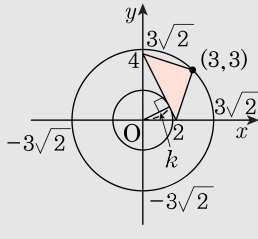
원의 반지름 k 이다.

$$\text{그러므로 } k = \frac{|-4|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \text{ 이므로}$$

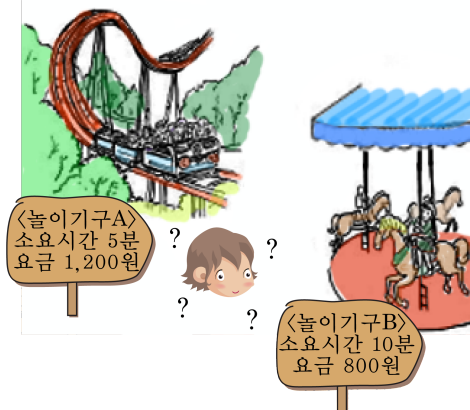
$$m = k^2 = \frac{16}{5} \text{ 이다.}$$

따라서 i), ii)에 의해

$$\therefore M + 5m = 18 + 5 \times \frac{16}{5} = 34$$



25. 놀이공원에서 두 종류의 놀이기구 A 와 B 를 타려고 하는데 두 놀이기구 A, B 의 1 회 소요시간은 각각 5 분, 10 분이고, 요금은 각각 1,200 원, 800 원이라 한다. 철수가 자유 시간 2 시간 동안 15,000 원으로 놀이기구를 탈 수 있는 횟수의 최댓값을 구하여라. (단, 이동시간과 기다리는 시간은 고려하지 않는다.)

▶ **답:** 호

▶ 정답 : 15회

해설

늘이기구 A, B 를 각각 x, y 번 탔다고 할 때,
연립부등식 $5x + 10y \leq 120, 1200x + 800y \leq 15000$ 을 동시에 만족시키는 x, y 영역을 그리면,
이 중 x, y 가 자연수이므로 주어진 조건에서 횟수가 최대인 것은 (7, 8), (6, 9)이다.
따라서 회수의 최대값은 15

