

1. 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

- ㉠ $a > b$ 이면 $a - c > b - c$

㉡ $a > b, c < 0$ 이면 $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

㉢ $a > b > 0, c > d > 0$ 이면 $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

- ㉠. $a - c > b - c$ 에서
양변에 c 를 더하면 $a > b$ (참)
- ㉡. $\frac{a}{c} < \frac{b}{c} \Leftrightarrow \frac{1}{c}(a - b) < 0$
 $\Leftrightarrow c < 0$ 그리고 $a > b$ 또는
 $c > 0$ 그리고 $a < b$ (참)
- ㉢. 양수일 때 분자가 클수록,
분자가 작을수록 값이 크다. (참)

2. 부등식 $|x + 1| < 1 + |2 - x|$ 을 풀어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x < 1$

해설

$|x + 1| < 1 + |2 - x|$ 에서

i) $x < -1$ 일 때,

$$-(x + 1) < 1 + (2 - x)$$

$\therefore -1 < 3$ 이므로 성립

$\therefore x < -1$

ii) $-1 \leq x < 2$ 일 때,

$$x + 1 < 1 + 2 - x$$

$\therefore 2x < 2$

$\therefore x < 1$

조건과 공통 범위를 구하면 $-1 \leq x < 1$

iii) $x \geq 2$ 일 때,

$$x + 1 < 1 - (2 - x)$$

$\therefore 1 < -1$ 이므로 모순

i), ii), iii)에서 구하는 부등식의 해는 $x < 1$

3. 모든 실수 x 에 대해 이차부등식 $x^2 - x(kx - 3) + 3 > 0$ 이 항상 성립하기 위한 정수 k 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

주어진 부등식을 정리하면

$$(1 - k)x^2 + 3x + 3 > 0$$

$$D = 3^2 - 4 \times (1 - k) \times 3 < 0$$

$$\therefore k < \frac{3}{12} = 0.25$$

최대 정수 $k = 0$

4. 부등식 $ax^2 + 5x + b > 0$ 을 풀어서 $2 < x < 3$ 이라는 해가 구해졌다.
이 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab = 6$

해설

$$ax^2 + 5x + b > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

해가 $2 < x < 3$ 이 되는 이차부등식은

$$(x-2)(x-3) < 0 \text{ 전개하면}$$

$$x^2 - 5x + 6 < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠과 일차항의 계수를 맞추기 위해

양변에 -1 을 곱하면

$$-x^2 + 5x - 6 > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

㉠, ㉢이 일치해야 하므로 $a = -1$, $b = -6$

5. a 가 실수일 때 두 이차방정식 $x^2 + ax + a = 0$, $x^2 - 2ax + 2a + 3 = 0$ 에서 한 방정식만이 허근을 가질 a 의 범위는 ?

- ① $-1 < a < 4$
② $-1 < a < 0$ 또는 $3 < a < 4$
③ $-1 \leq a \leq 4$
④ $-1 < a \leq 0$ 또는 $3 \leq a < 4$
⑤ $3 \leq x \leq 4$

해설

$$x^2 + ax + a = 0 \quad \cdots \textcircled{A}$$

$$x^2 - 2ax + 2a + 3 = 0 \quad \cdots \textcircled{B}$$

①에서 허근을 가지려면

$$D = a^2 - 4a < 0$$

$$\therefore 0 < a < 4$$

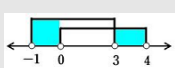
②에서 허근을 가지려면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 2a - 3 < 0$$

$$(a + 1)(a - 3) < 0$$

$$\therefore -1 < a < 3$$

한쪽만이 허근을 가지려면,



$$\therefore -1 < a \leq 0 \text{ 또는 } 3 \leq a < 4$$

6. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 - x - 6 \leq 0 \\ x^2 - 5x + 4 > 0 \end{cases}$ 을 만족하는 정수해는 몇 개인가?

- ① 7 개 ② 6 개 ③ 5 개 ④ 4 개 ⑤ 3 개

해설

$x^2 - x - 6 \leq 0$
 $\Rightarrow (x - 3)(x + 2) \leq 0$
 $\Rightarrow -2 \leq x \leq 3 \quad \dots \quad \textcircled{1}$
 $x^2 - 5x + 4 > 0$
 $\Rightarrow (x - 1)(x - 4) > 0$
 $\Rightarrow x < 1 \text{ 또는 } x > 4 \quad \dots \quad \textcircled{2}$
①, ②의 공통범위는 : $-2 \leq x < 1$
 $\therefore$ 정수의 해 : $-2, -1, 0$

삼각형의 두 변의 합은 다른 한 변보다 커야
 하므로 $3 + 4 > x$, $3 + x > 4$, $4 + x > 3$,
 $9 + 16 > x^2$, $9 + x^2 > 16$, $16 + x^2 > 9$ 의
 6개의 부등식을 만족하는
 x 값의 범위는 $\sqrt{7} < x < 5$ 이고
 x 가 정수이므로 $x = 3$, $x = 4$ 이다.

8. 직선 $(a+2)x - y - a + b = 0$ 이 x 축의 양의 방향과 45° 의 각을 이루고 y 절편이 4 일 때, $a+b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$y = (a+2)x - a + b$ 에서
기울기 $= a+2 = \tan 45^\circ = 1$
 $\therefore a = -1$
 y 절편 $-a + b = 4$
 $\therefore b = 3$
 $\therefore a + b = 2$

9. 세 점 $(0, 2)$, $(3, -3)$, $(-3, a)$ 가 한 직선 위에 있도록 하는 a 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 7$

해설

세 점이 한 직선 위에 있으려면 기울기가 일치해야 한다.

$$\Rightarrow \frac{-3-2}{3-0} = \frac{a-(-3)}{-3-3}$$

$$\Rightarrow a = 7$$

10. 두 점 A(2, 5), B(-2, 9)를 지나는 직선에 수직이고, 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점을 지나는 직선의 방정식은?

① $y = x + 8$

② $y = x + 9$

③ $y = x + 10$

④ $y = -x + 7$

⑤ $y = -x + 8$

해설

직선 AB의 기울기는 $\frac{9-5}{-2-2} = -1$

따라서 직선 AB에 수직인 직선의 기울기는 1

또한 선분 AB로 내분하는 점의 좌표를 (a, b) 라 하면

$$a = \frac{3 \cdot (-2) + 1 \cdot 2}{3 + 1} = -1$$

$$b = \frac{3 \cdot 9 + 1 \cdot 5}{3 + 1} = 8$$

따라서 직선의 방정식은 $y - 8 = 1 \cdot (x + 1)$

$$\therefore y = x + 9$$

11. x, y 에 대한 연립방정식 $2x + (a + 2)y - 1 = 0$, $(a - 3)x - 2y + 2 = 0$ 이 해를 갖지 않을 때, 상수 a 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$2x + (a + 2)y - 1 = 0$, $(a - 3)x - 2y + 2 = 0$ 이 평행해야 한다.

따라서 평행할 조건을 구하면,

$$\frac{2}{a-3} = \frac{a+2}{-2} \neq -\frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{a-3} = \frac{a+2}{-2} \text{에서}$$

$$a^2 - a - 2 = 0, (a - 2)(a + 1) = 0$$

$$\therefore a = 2 \text{ 또는 } a = -1$$

1) $a = 2$ 일 때,

$$\frac{2}{-1} = \frac{4}{-2} \neq -\frac{1}{2} \quad \therefore \text{평행}$$

2) $a = -1$ 일 때,

$$\frac{2}{-4} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} \quad \therefore \text{일치}$$

따라서, 1), 2)에 의하여 $a = 2$

12. 꼭짓점의 좌표가 A(0, 0), B(36, 15), C(a, b)인 삼각형 ABC가 있다.

a, b가 정수일 때, △ABC의 넓이의 최소는?

- ① $\frac{1}{2}$
- ② 1
- ③ $\frac{3}{2}$
- ④ $\frac{13}{2}$
- ⑤ 최솟값은 없다

해설

직선 $\overline{AB}$ 의 방정식은 $5x - 12y = 0$

△ABC의 높이 h 는

$$h = \frac{|5a - 12b|}{\sqrt{5^2 + 12^2}}$$

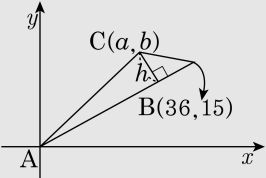
△ABC의 넓이 S는 $S = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{12^2 + 5^2} \cdot \frac{|5a - 12b|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{3}{2} |5a - 12b|$$

a, b는 정수이므로, $|5a - 12b| = 1$ 일 때,

S의 최소는 $\frac{3}{2}$

실제로 $(a, b) = (5, 2)$ 또는 $(7, 3)$ 일 때이다.



13. 두 원 $x^2 + y^2 - 2ay + 8a - 25 = 0$ 와 $x^2 + y^2 = 1$ 이 외접할 때 a 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

두 원이 외접하면 중심 사이의 거리와 반지름의 합이 일치한다.

$$\Rightarrow x^2 + (y - a)^2 = a^2 - 8a + 25, \quad x^2 + y^2 = 1$$

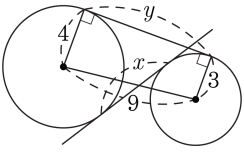
중심사이의 거리 : a

반지름의 합 : $1 + \sqrt{a^2 - 8a + 25}$

$$\Rightarrow a - 1 = \sqrt{a^2 - 8a + 25}$$

$$\Rightarrow a = 4$$

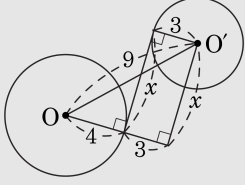
14. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 각각 3, 4 이고 중심거리가 9 인 두 원의 공통내접선의 길이와 공통외접선의 길이를 각각 x , y 라 할 때, $x^2 + y^2$ 의 값을 구하시오.



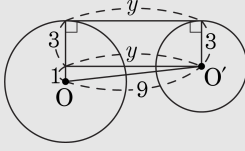
▶ 답 :

▷ 정답 : 112

해설



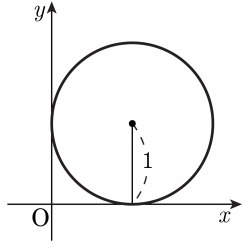
$$9^2 = (4 + 3)^2 + x^2 \quad \therefore x^2 = 9^2 - 7^2$$



$$9^2 = y^2 + (4 - 3)^2 \quad \therefore y^2 = 9^2 - 1^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 2 \cdot 9^2 - 7^2 - 1^2 = 112$$

15. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원이 x 축, y 축에 동시에 접하고 있다. 이 원 위의 점 (x, y) 에 대하여 $\frac{y+2}{x+1}$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\frac{y+2}{x+1} = k$ 라 하면 직선 $y+2 = k(x+1)$ 은

k 값에 관계없이 점 $(-1, -2)$ 를 지난다.

이 때, 기울기 k 는 직선이 원에 접할 때 최댓값과 최솟값을 갖는다.

$$\frac{|k-1+k-2|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$$

$$|2k-3| = \sqrt{k^2+1}$$

$$4k^2 - 12k + 9 = k^2 + 1$$

$$3k^2 - 12k + 8 = 0$$

최댓값과 최솟값은 이 방정식의 해이므로

근과 계수와의 관계에 의해 합은 4이다.

16. 두 부등식 $x^2 + 2x - 15 > 0$, $x^2 - x + k \leq 0$ 에 대하여 두 부등식 중 적어도 하나를 만족하는 x 의 값은 실수 전체이고, 두 부등식을 동시에 만족하는 x 의 값은 $3 < x \leq 6$ 일 때, 상수 k 의 값은?

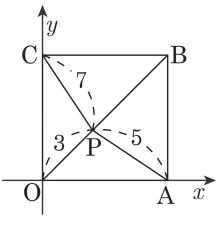
① -48 ② -30 ③ -18 ④ 12 ⑤ 24

해설

부등식 $x^2 + 2x - 15 > 0$ 에서
 $(x + 5)(x - 3) > 0$, $x > 3$ 또는 $x < -5$
부등식 $x^2 - x + k \leq 0$ 에 대하여
두 부등식의 공통범위가 $3 < x \leq 6$ 이므로
 $x^2 - x + k \leq 0$ 를 만족하는 범위는
 $-5 \leq x \leq 6$ $(x - 6)(x + 5) \leq 0$
 $x^2 - x - 30 \leq 0$
 $\therefore k = -30$

17. 다음 그림과 같이 정사각형 OABC의 내부의 점 P에 대하여 $OP = 3$, $AP = 5$, $CP = 7$ 일 때 선분 PB의 길이는?

- ① $2\sqrt{15}$ ② $\sqrt{65}$ ③ $\sqrt{70}$
 ④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{5}$



해설

정사각형의 한 변의 길이를 a , 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 & \dots \textcircled{A} \\ (a-x)^2 + y^2 = 25 & \dots \textcircled{B} \\ x^2 + (a-y)^2 = 49 & \dots \textcircled{C} \end{cases}$$

선분 PB의 길이는

$$PB = \sqrt{(a-x)^2 + (a-y)^2} \text{이다.}$$

$\textcircled{B} + \textcircled{C} - \textcircled{A}$ 에서

$$(a-x)^2 + (a-y)^2 = 25 + 49 - 9 = 65$$

$$\text{따라서 } PB = \sqrt{65}$$

18. 두 점 A(2, -2), B(1, 3)에 대하여 선분 AB 를 $(1+t) : t$ 로 외분하는 점이 제2사분면에 속할 때, t 의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $t > 1$

해설

선분 AB 를 $(1+t) : t$ 로 외분하는 점을 Q 라 하면

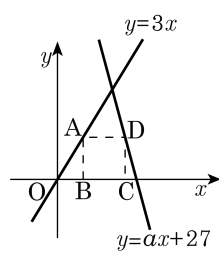
$$Q\left(\frac{(1+t) \cdot 1 - t \cdot 2}{(1+t) - t}, \frac{(1+t) \cdot 3 - t \cdot (-2)}{(1+t) - t}\right)$$

즉, Q($1-t$, $3+5t$) 이때, 점 Q 가 제2사분면에 속하므로

$$1-t < 0, 3+5t > 0$$

따라서 $t > 1$

19. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 한 변의 길이가 3인 정사각형 ABCD가 있다. 일차함수 $y = 3x$ 의 그래프가 점 A를 지나고, 일차함수 $y = ax + 27$ 의 그래프가 점 D를 지날 때, 기울기 a 의 값은? (단, 두 점 B, C는 x 축 위의 점이다.)



- ① -4 ② $-\frac{9}{2}$ ③ -5
 ④ $-\frac{11}{2}$ ⑤ -6

해설

$\overline{AB} = 3$ 이므로 점 A의 y 좌표는 3이고,
 점 A는 일차함수 $y = 3x$ 의 그래프 위의 점이므로 x 좌표가 1이다.
 점 A와 x 좌표가 같은 점 B의 좌표는 (1, 0)이고, $\overline{BC} = 3$ 이므로
 점 C의 좌표는 (4, 0)이다.
 점 C와 x 좌표가 같고, 점 A와 y 좌표가 같은 점 D의 좌표는 (4, 3)이다.
 점 D가 일차함수 $y = ax + 27$ 위의 점이므로 $x = 4$, $y = 3$ 를
 대입하면 $3 = a \times 4 + 27$
 $\therefore a = -6$

20. 다음 도형의 방정식이 나타내는 세 도형이 서로 만나 삼각형을 이루고, 이 삼각형이 x 축에 아래쪽좌표평면에 놓이는 부분이 없을 때, a 의 값의 범위를 구하면? (단, $a > 0$, $a \neq 1$)

$y = ax, \quad y = -ax, \quad y = x + a$

- ① $a > \frac{1}{3}$ ② $a > \frac{2}{3}$ ③ $a > \frac{1}{2}$ ④ $a > 1$ ⑤ $a > \frac{3}{2}$

해설

세 직선의 방정식의 교점을 각각 구하면,
 $\Rightarrow (0, 0), \left(-\frac{a}{a+1}, \frac{a^2}{a+1}\right), \left(\frac{a}{a-1}, \frac{a^2}{a-1}\right)$
 x 축 아래로 놓이는 부분이 없으려면,
교점의 y 좌표가 0 보다 크거나 같아야 한다.
 $a+1 > 0, \quad a-1 > 0 \quad \Rightarrow \quad a > 1$

21. 두 점 A(3, 2), B(a, b)를 지나는 직선의 기울기가 2이고, 이 직선과 직선 $x + 2y - 3 = 0$ 의 교점은 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점이다. 이 때, $3a + b$ 의 값은?

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 10

해설

직선 AB의 기울기는 2이므로

$$\frac{b-2}{a-3} = 2, b-2 = 2(a-3), b = 2a-4 \cdots \textcircled{1}$$

$\overline{AB}$ 를 2 : 1로 내분하는 점은

$$\left(\frac{2a+1 \cdot 3}{2+1}, \frac{2b+1 \cdot 2}{2+1} \right) = \left(\frac{2a+3}{3}, \frac{2b+2}{3} \right) \text{ 이고}$$

이 점은 직선 $x + 2y - 3 = 0$ 위에 있으므로

$$\frac{2a+3}{3} + 2 \cdot \frac{2b+2}{3} - 3 = 0$$

$$\therefore a + 2b - 1 = 0 \cdots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면 $a = \frac{9}{5}, b = -\frac{2}{5}$ 이다.

$$\therefore 3a + b = 5$$

22. 점 (a, b) 가 $3x + 2y = 6$ 위를 움직일 때, 직선 $2bx - ay = 1$ 이 항상 지나는 점의 좌표는?

① $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$

② $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$

③ $\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}\right)$

④ $\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}\right)$

⑤ $\left(\frac{1}{6}, -1\right)$

해설

(a, b) 가 $3x + 2y = 6$ 위를 움직이므로

$$3a + 2b = 6$$

$$\therefore b = 3 - \frac{3}{2}a \cdots \text{㉠}$$

㉠을 $2bx - ay = 1$ 에 대입하면

$$2\left(3 - \frac{3}{2}a\right)x - ay = 1$$

$$(6 - 3a)x - ay = 1$$

$$(6x - 1) - (3x + y)a = 0$$

$$\therefore 6x - 1 = 0, 3x + y = 0$$

$$x = \frac{1}{6}, y = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}\right)$$

23. 두 점 $(a, 0)$, $(0, b)$ 에서 직선 $2x - y = 0$ 까지의 거리가 같을 때,
 $\frac{2a - b}{a + b}$ 의 값은 ? (단, $ab < 0$)

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

두 점 $(a, 0)$, $(0, b)$ 에서
직선 $2x - y = 0$
까지의 거리가 같으므로,

$$\frac{|2a - 0|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|0 - b|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$$

$|2a| = |-b|, ab < 0$ 이므로

$$2a = -b, \therefore b = -2a$$

$$\text{따라서, } \frac{2a - b}{a + b} = \frac{2a + 2a}{a - 2a} = \frac{4a}{-a} = -4$$

24. 두 원 $x^2 + y^2 - 2 = 0$, $x^2 + y^2 + kx - 4y - 1 = 0$ 의 교점을 지나는 직선이 $x + 2y + 1 = 0$ 과 평행일 때, k 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -2$

해설

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 2 - (x^2 + y^2 + kx - 4y - 1) = 0$$

$$\therefore kx - 4y + 1 = 0$$

이 직선이 직선 $x + 2y + 1 = 0$ 과 평행하므로

$$\frac{k}{1} = \frac{-4}{2} \neq \frac{1}{1}$$

$$\therefore k = -2$$

25. 두 원 $x^2 + y^2 = 9, x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$ 의 두 교점 사이의 거리를 구하면?

- ① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{10}$ ④ $\sqrt{11}$ ⑤ $\sqrt{13}$

해설

두 원의 교점을 이은 선분이 공통현

이다.

두 원의 공통현의 방정식은

$$(x^2 + y^2 - 9) - (x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16) = 0$$

$$\therefore 8x + 6y - 25 = 0$$

이때, 다음 그림과 같이 이 두 원의 교점을 A, B 라 하고

공통현 AB의 중점을 M이라고 하면

$\overline{OO'}$ 은 $\overline{AB}$ 를 수직이등분하므로 $\overline{AB} = 2\overline{AM} =$

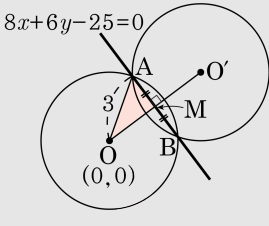
$$2\sqrt{3^2 - \overline{OM}^2} \dots\dots \textcircled{\text{A}}$$

그런데 $\overline{OM}$ 은 원점 O에서 직선 $8x + 6y - 25 = 0$ 까지의 거리이므로

$$\overline{OM} = \frac{|-25|}{\sqrt{8^2 + 6^2}} = \frac{5}{2} \dots\dots \textcircled{\text{B}}$$

②을 ①에 대입하면 구하는 두 교점 사이의 거리는

$$\overline{AB} = 2\overline{AM} = 2\sqrt{3^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{11}}{2} = \sqrt{11}$$



26. 반지름이 20인 원의 내부에 중심으로부터 12만큼 떨어져 있는 점 P가 있다. 점 P를 지나고 길이가 정수인 현의 갯수를 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 정답 : 16개

해설

점 P를 지나는 가장 긴 현은 지름 AB이고, 가장 짧은 현은 지름에 수직인 현 CD이다.

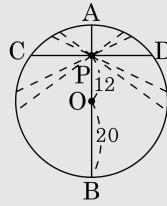
$$\overline{CD} = 2\sqrt{20^2 - 12^2} = 32, \overline{AB} = 40$$

점 P를 중심으로 현을 회전시키면 32와 40 사이에 모든 실수 길이의 현이 두 번씩 나타난다.

따라서 길이가 정수인 현은

32,40인 것이 한 개.

33 34 35 36 37 38 39이 적이 각각 두 개씩 있다.

33, 34, 35,
: 1674

27. 원 $x^2 + y^2 = 5$ 위의 점 P에서의 접선이 점 (3, 1)을 지날 때, 점 P의 좌표를 (a, b) , (c, d) 라 할 때, $a + b + c + d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

접점을 (x_1, y_1) 이라 하면 접선은

$$x_1x + y_1y = 5 \cdots \textcircled{1}$$

이것이 점 (3, 1)을 지나므로

$$3x_1 + y_1 = 5 \cdots \textcircled{2}$$

또, (x_1, y_1) 은 $x^2 + y^2 = 5$

$$\text{위의 점이므로 } x_1^2 + y_1^2 = 5 \cdots \textcircled{3}$$

②에서 $y_1 = 5 - 3x_1$ 을 ③에 대입하면

$$x_1^2 + (5 - 3x_1)^2 - 5 = 0,$$

$$10x_1^2 - 30x_1 + 20 = 0$$

$$10(x_1 - 1)(x_1 - 2) = 0$$

$$\therefore x_1 = 1 \text{ 이면 } y_1 = 2, x_1 = 2 \text{ 이면 } y_1 = -1$$

$$\therefore \text{접점은 } (1, 2), (2, -1)$$

28. 점 $(3, -1)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 5$ 에 그은 두 접선과 y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 S 라 할 때, $4S$ 의 값은?

- ① 33 ② 35 ③ 45 ④ 49 ⑤ 55

해설

점 $(3, -1)$ 에서 원에 그은 접선의 방정식을

$y + 1 = m(x - 3)$ 이라 하자.

이 때, 원의 중심에서 직선 $y + 1 = m(x - 3)$,

즉 $mx - y - 3m - 1 = 0$ 에 이르는 거리가 반지름의 길이 $\sqrt{5}$ 와 같으므로

$$\frac{|-3m - 1|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}, |3m + 1| = \sqrt{5(m^2 + 1)}$$

양변을 제곱하여 정리하면,

$$2m^2 + 3m - 2 = 0, (2m - 1)(m + 2) = 0$$

$$\therefore m = \frac{1}{2} \text{ 또는 } m = -2$$

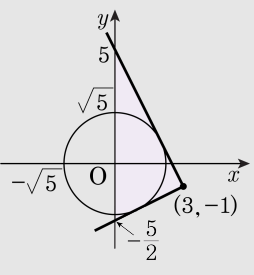
즉, 구하는 접선의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}, y = -2x + 5 \text{ 이다.}$$

따라서 구하는 삼각형의 넓이 S 는

$$S = \frac{1}{2} \times \left\{ 5 - \left(-\frac{5}{2} \right) \right\} \times 3 = \frac{45}{4} \text{ 이다.}$$

$$\therefore 4S = 45$$



29. 원 $x^2 + y^2 = 1$ 밖의 점 $P(3, 4)$ 에서 이 원에 두 개의 접선을 그을 때 그 접점을 Q, R 이라고 하자. 직선 QR 의 방정식을 $ax + by = 1$ 라 할 때 $a + b$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

접점의 좌표를 $Q(x_1, y_1), R(x_2, y_2)$ 라고 하면
 Q, R 에서의 접선의 방정식은 각각
 $x_1x + y_1y = 1, x_2x + y_2y = 1$ 이고,
두 접선은 모두 점 $P(3, 4)$ 를 지나므로
 $3x_1 + 4y_1 = 1, 3x_2 + 4y_2 = 1$
여기서 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 는
방정식 $3x + 4y = 1$ 의 근이며, 이 두 접점을
지나는 직선은 오직 하나뿐이므로
직선 QR 의 방정식은 $3x + 4y = 1$ 이다.
 $\therefore a = 3, b = 4 \quad \therefore a + b = 7$

30. 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ 위의 점에서 직선 $4x - 3y + 5 = 0$ 에 이르는 거리의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

최댓값은 원 중심에서 직선까지 거리 더하기 반지름이고, 최솟값은 원 중심에서 직선까지 거리 빼기 반지름이다.

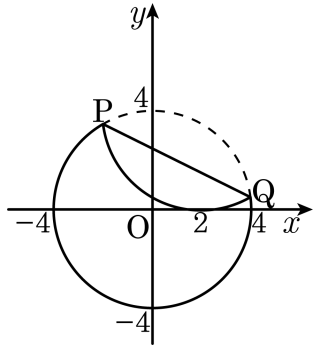
원의 방정식 : $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$

$\Rightarrow$ 최대 : $\frac{|4 \times 1 - 3 \times (-2) + 5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} + 2 = 5$

$\Rightarrow$ 최소 : $\frac{|4 \times 1 - 3 \times (-2) + 5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} - 2 = 1$

$\therefore$ 최댓값 + 최솟값 = 6

31. 다음 그림과 같이 원 $x^2 + y^2 = 16$ 을 점 $(2, 0)$ 에서 x 축과 접하도록 접었을 때, 두 점 P, Q를 지나는 직선의 x 절편을 구하여라.

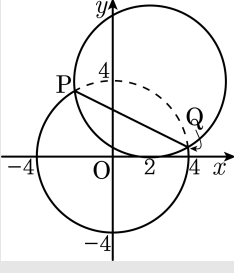


▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

호 PQ는 그림과 같이 점 $(2, 0)$ 에서 x 와 접하고 반지름의 길이가 4인 원의 일부이므로 원의 방정식은 $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 16$ //



이때 선분 PQ는 두 원 $x^2 + y^2 = 16$, $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 16$ 의 공통현이므로 직선 PQ의 방정식은
 $x^2 + y^2 - 16 - \{(x - 2)^2 + (y - 4)^2 - 16\} = 0$
 $\therefore x + 2y - 5 = 0$
 따라서 두 점 P, Q를 지나는 직선의 x 절편은 5이다.

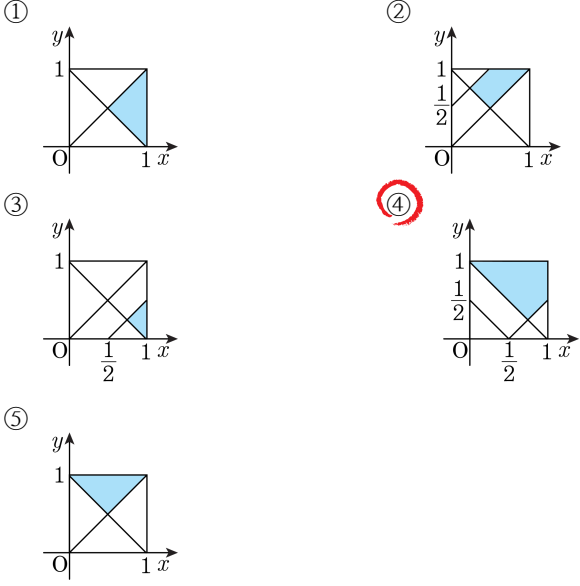
32. 다음 식이 나타내는 영역의 넓이 중 두 번째로 큰 것은 어느 것인지 구하면?
 $A : |x| \leq 1, |y| \leq 1,$
 $B : x^2 + y^2 \leq 1,$
 $C : |y| \leq 1 - x^2,$
 $D : |x| + |y| \leq 1$

- ① A
- ② B
- ③ C
- ④ D
- ⑤ 구할 수 없다.

해설

A 는 $(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$ 을 네 꼭짓점으로 하는 정사각형의 내부
 B 는 중심이 원점이고 반지름이 1인 원의 내부
 C 는 포물선 $y = -x^2 + 1$ 의 아랫부분
 D 는 $(0, 1), (1, 0), (-1, 0), (0, -1)$ 을 네 꼭짓점으로 하는 마름모의 내부
따라서 두 번째로 큰 것은 B

33. 세 변의 길이가 a, b, c ($a \geq b \geq c$) 인 삼각형 T 를 변형하여 세 변의 길이가 $\frac{a}{2}, b, c$ 인 삼각형을 만들 수 있는 T 의 집합을 S 라 하자. 세 변의 길이가 $1, x, y$ ($1 > x > y$) 인 삼각형이 S 의 원소가 될 때, 점 (x, y) 가 존재하는 영역을 좌표평면 위에 어둡게 나타내면? (단, 경계는 제외)



해설

삼각형 결정조건은 가장 긴 변이 다른 두변의 합보다 작아야 한다.

1) $1, x, y \Rightarrow 1 < x + y$

2) $\frac{1}{2}, x, y$

(i). $\frac{1}{2}$ 이 가장 긴 변 $\Rightarrow \frac{1}{2} < x + y$

(ii). x 가 가장 긴 변 $\Rightarrow x < \frac{1}{2} + y$

1), 2) 를 그려보면 색칠한 부분이 공통영역이 된다.

34. x, y 가 부등식 $(x+1)^2 + y^2 \leq 4$ 를 만족시킬 때, $2x+y$ 의 최댓값은?

- ㉠ $-2 + 2\sqrt{5}$ ㉡ $1 + \sqrt{5}$ ㉢ $1 - \sqrt{5}$
 ㉣ $-2 + \sqrt{5}$ ㉤ $-1 - \sqrt{5}$

해설

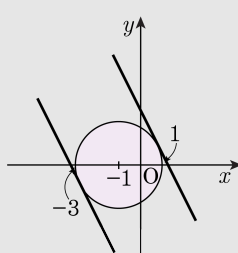
$2x + y = k$ 라 하고 직선을 움직여보면
 직선 $2x + y = k$ 가
 원 $(x+1)^2 + y^2 = 4$ 에 접할 때, k 는
 최댓값과 최솟값을 갖는다.

$(x+1)^2 + (-2x+k)^2 = 4$ 에서
 $x^2 + 2x + 1 + 4x^2 - 4kx + k^2 = 4$
 방정식 $5x^2 + 2(1-2k)x + k^2 - 3 = 0$ 의

판별식을 D 라 하면 $\frac{D}{4} = (1-2k)^2 - 5(k^2 - 3) = 0$

$k^2 + 4k - 16 = 0 \quad \therefore k = -2 \pm 2\sqrt{5}$

따라서 최댓값은 $-2 + 2\sqrt{5}$ 이다.



35. 어느 공장에서 두 제품 A, B 를 각각 1 개 생산하는데 필요한 원료 I, II 의 사용량은 표와 같다. 원료 I, II 는 하루에 각각 90 kg 과 120 kg 까지 사용할 수 있다고 할 때, 제품 A 와 B 의 하루 총 생산개수의 합의 최댓값을 구하여라.

원료 \ 제품	A	B
I	2kg	3kg
II	3kg	2kg

▶ 답: 개

▶ 정답 : 42개

해설

A, B 의 하루의 생산량을 각각 x, y 개라 하면,

$$x \geq 0, y \geq 0$$

$$2x + 3y \leq 90,$$

$$3x + 2y \leq 120$$

그러므로 만족하는 영역은

네 점 $O(0, 0)$, $P(40, 0)$, $Q(36, 6)$

점 $O(0,0)$, $P(40,0)$, $Q(50,30)$, $R(0,30)$ 으로부터 둘러싸인 브브이다.

새사량이 초한을 초과할 때면 $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ 이다.

생산량의 총합을 k 라고 두면, $x + y = k$ 이

따라서 $y = -x + k$ 는

