

1. $(a+b)x + (2a-3b) < 0$ 의 해가 $x < -\frac{1}{3}$ 일 때, 부등식 $(a-3b)x + (b-2a) > 0$ 을 풀어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x < -3$

해설

$$\begin{aligned}(a+b)x + (2a-3b) &< 0 \\(a+b)x &< 3b-2a \\ \Rightarrow x &< \frac{3b-2a}{a+b} = -\frac{1}{3} \quad (a+b > 0) \\ \Rightarrow a+b &= -3(3b-2a) \\ \Rightarrow a=2b, \quad a+b=3b > 0 &\rightarrow b > 0 \\ (a-3b)x + (b-2a) > 0 &\Leftrightarrow -bx-3b > 0 \\ bx &< -3b \\ \therefore x &< -3 \quad (\because b > 0)\end{aligned}$$

2. 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $(m-1)x^2 + 2(m-1)x - 5 < 0$ 이 항상 성립하기 위한 정수 m 의 개수는?

- ① 3개 ② 4개 ③ 5개 ④ 6개 ⑤ 7개

해설

(i) $m = 1$ 일 때, $-5 < 0$ 이므로
부등식은 항상 성립한다.
(ii) $m \neq 1$ 일 때
이차부등식이 항상 성립하려면
이차항의 계수가 음수이고 $D < 0$ 이어야 한다.
 $m - 1 < 0$ 에서 $m < 1$
 $\frac{D}{4} = (m - 1)^2 + 5(m - 1) < 0$ 에서
 $(m - 1)(m + 4) < 0$
 $\therefore -4 < m < 1$
(i), (ii) 에서 $-4 < m \leq 1$
따라서 정수 m 은 -3, -2, -1, 0, 1 의
5 개이다.

3. 이차부등식 $ax^2 + bx + c > 0$ 을 만족하는 x 의 범위가 $-1 < x < 2$ 일 때, 부등식 $bx^2 - ax - c \geq 0$ 의 해는?

- ① $-1 \leq x \leq 2$ ② $-2 \leq x \leq 1$ ③ $1 \leq x \leq 2$
④ $x \leq -2, x \geq 1$ ⑤ $x \leq -1, x \geq 2$

해설

$$ax^2 + bx + c > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 2$$

$a(a < 0)$ 로 양변을 나누면

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} < 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2) < 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - x - 2 < 0$$

$$\frac{b}{a} = -1, \frac{c}{a} = -2$$

$bx^2 - ax - c \geq 0$ 에서 양변을 a 로 나누면

$$\frac{b}{a}x^2 - x - \frac{c}{a} \leq 0, \text{ 문자대신 값을 대입하면}$$

$$-x^2 - x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 \geq 0$$

$$(x+2)(x-1) \geq 0 \therefore x \leq -2, x \geq 1$$

4. 이차방정식 $x^2 - mx + 4 = 0$ 의 두 근 사이에 1 이 있도록 하는 실수 m 의 값의 범위는?

① $m < -5$

② $m > -2$

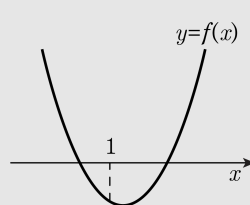
③ $-2 < m < 2$

④ $m > 2$

⑤ $m > 5$

해설

$f(x) = x^2 - mx + 4$ 라 하면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.
 $f(1) < 0$ 에서 $5 - m < 0$
 $\therefore m > 5$



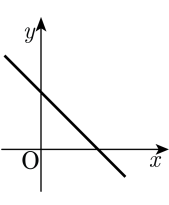
5. 세 점 $A(-1, -4)$, $B(3, -3)$, $C(7, 1)$ 과 좌표평면 위의 점 P 에 대하여 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 최솟값은?

① 46 ② 45 ③ 44 ④ 43 ⑤ 42

해설

점 P 를 $P(x, y)$ 라고 하면
 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$
 $= \{(x+1)^2 + (y+4)^2\}$
 $+ \{(x-3)^2 + (y+3)^2\}$
 $+ \{(x-7)^2 + (y-1)^2\}$
 $= x^2 + 2x + 1 + y^2 + 8y + 16 + x^2 - 6x + 9$
 $+ y^2 + 6y + 9 + x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1$
 $= 3x^2 - 18x + 3y^2 + 12y + 85$
 $= 3(x^2 - 6x + 9) + 3(y^2 + 4y + 4) + 46$
 $= 3(x-3)^2 + 3(y+2)^2 + 46$
따라서 $x = 3$, $y = -2$ 일 때,
 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 최솟값은 46 이다.

6. 직선 $ax + by + c = 0$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때 $cx + by + a = 0$ 의 그래프가 지나지 않는 사분면은?



- ① 제 1 사분면
- ② 제 2 사분면
- ③ 제 3 사분면
- ④ 제 4 사분면
- ⑤ 제 1, 3 사분면

해설

직선 $ax + by + c = 0$ 은

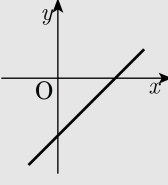
$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ 이므로

$-\frac{a}{b} < 0, -\frac{c}{b} > 0$ 이다.

구하는 직선은 $y = -\frac{c}{b}x - \frac{a}{b}$ 이므로

그래프는 다음과 같다.

따라서 지나지 않는 사분면은 제2 사분면이다.



7. 두 점 A(1, 3), B(4, 0) 을 지나는 직선에 수직이고 선분 AB 를 1 : 2 로 외분하는 점을 지나는 직선의 방정식을 구하면 $y = ax + b$ 이다. $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = 9$

해설

직선 AB 의 기울기는 $\frac{0-3}{4-1} = -1$ 이므로

직선 AB 에 수직인 직선의 기울기는 1 이다.

또, 선분 AB 를 1 : 2 로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1 \times 4 - 2 \times 1}{1 - 2}, \frac{1 \times 0 - 2 \times 3}{1 - 2} \right)$, 즉 (-2, 6)

따라서 구하는 직선은 기울기가 1 이고

점 (-2, 6) 을 지나므로

$y - 6 = 1 \cdot (x + 2)$, $y = x + 8$

$a = 1$, $b = 8$ $\therefore a + b = 9$

8. 직선 $x + ay + 1 = 0$ 이 직선 $2x + by + 1 = 0$ 에 수직이고 직선 $x - (b - 1)y - 1 = 0$ 과 평행할 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

두 직선 $x + ay + 1 = 0, 2x + by + 1 = 0$ 이 서로 수직이므로

$$1 \cdot 2 + a \cdot b = 0 \quad \therefore ab = -2 \cdots \textcircled{A}$$

두 직선 $x + ay + 1 = 0, x - (b - 1)y - 1 = 0$ 이 서로 평행하므로

$$\frac{1}{1} = \frac{a}{1-b} \neq \frac{1}{-1} \quad \therefore a + b = 1 \cdots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{B} \text{ 에서 } a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$$

$$\therefore 1 - 2 \cdot (-2) = 5$$

9. 두 직선 $x - y = 2$, $ax + y = 1$ 의 교점이 제 1 사분면에 존재할 때, 상수 a 의 범위는?

- ① $-2 < a < \frac{1}{2}$ ② $-1 < a < \frac{1}{2}$ ③ $0 < a < \frac{1}{2}$
④ $-1 < a < \frac{1}{4}$ ⑤ $-1 < a < \frac{1}{3}$

해설

$x - y = 2 \quad \cdots \textcircled{1}$
 $ax + y = 1 \quad \cdots \textcircled{2}$ 라고 할 때
 $(\textcircled{1} + \textcircled{2})$ 을 하면, $(a + 1)x = 3$
 $\therefore x = \frac{3}{a + 1}$
 $y = x - 2 = \frac{3}{a + 1} - 2 = \frac{1 - 2a}{a + 1}$
교점이 제1 사분면에 존재하므로
 $a + 1 > 0, 1 - 2a > 0$
 $\therefore a > -1, a < \frac{1}{2}$
 $\therefore -1 < a < \frac{1}{2}$

10. 직선 $kx - y + 3k = 1$ 은 k 값에 관계없이 항상 일정한 점 A를 지난다.
이 점 A의 좌표는?

- ① A(-3, -1) ② A(-2, -1) ③ A(-1, -1)
④ A(1, -1) ⑤ A(2, 1)

해설

주어진 식을 k 에 대하여 정리하면
 $(x + 3)k - (y + 1) = 0$
위 식은 k 값에 관계없이
 $x + 3 = 0$, $y + 1 = 0$ 의 교점을 지난다.
 $\therefore x = -3$, $y = -1$
 $\therefore A(-3, -1)$

11. 점 $(3, 4)$ 에서 직선 $2x - y + k = 0$ 까지의 거리가 $\sqrt{5}$ 일 때, 양수 k 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\frac{|2 \times 3 - 4 + k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5} \text{ 이므로, } |2 + k| = 5 \text{ 이다.}$$

따라서 $k = 3$ ($\because k$ 는 양수)

12. 두 원 $x^2 + y^2 = 1$, $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 4$ 에 대하여 두 원이 외접할 때 $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

외접하기 위한 조건은 $\sqrt{a^2 + b^2} = 2 + 1$

$\therefore a^2 + b^2 = 9$

13. $x^2 + y^2 - 4x = 0$, $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0$ 의 교점을 지나는 원의 반지름의 최솟값은?

- ① $\sqrt{5}$
- ② $\frac{\sqrt{5}}{2}$
- ③ $\frac{3}{2}$
- ④ $\sqrt{2}$
- ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

해설

주어진 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은 $(x^2 + y^2 - 4x) + k(x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8) = 0$ 이 중에서 반지름이 최소인 경우는 공통현을 지름으로 하는 원이다.
결국 구하는 값은 공통현의 길이의 절반을 구하면 된다.
공통현의 방정식은 $x + y - 4 = 0$,
 $x^2 + y^2 - 4x = 0$ 의 중심은 $(2, 0)$ 반지름은 2 이고,
중심에서 공통현까지의 길이는 $\sqrt{2}$ 이므로
공통현의 길이의 절반은 $\sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$,
구하는 값은 $\sqrt{2}$ 이다.

14. 두 원 $x^2 + y^2 = 4$, $(x - 3)^2 + y^2 = 1$ 의
공통외접선의 길이를 구하면?

- ① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $3\sqrt{5}$

해설

주어진 두 원의 그래프를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.

점 O' 에서 $\overline{OA}$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$\overline{AH} = \overline{BO'} = 1$

$\therefore \overline{OH} = 2 - 1 = 1$

두 원의 중심의 좌표가 $(0, 0)$, $(3, 0)$ 이므로

중심거리 $\overline{OO'}$ 은 3 이다.

따라서 $\triangle OO'H$ 에서

피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{AB} = \overline{O'H} = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$

15. 원 $x^2 + y^2 + 10x - 8y + 16 = 0$ 에 의하여 잘려지는 x 축 위의 선분의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

x 축을 지나는 점은 $y = 0$ 이므로
 $x^2 + 10x + 16 = 0 \Rightarrow (x + 2)(x + 8) = 0$
 $\Rightarrow x = -2, -8$
 $\therefore x$ 축 위의 교점 : $(-8, 0), (-2, 0)$
 $\therefore$ 구하는 선분의 길이 : 6

16. $0 \leq x \leq 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $x^2 - ax + a^2 - 4 \leq 0$ 이 항상 성립되게 하는 실수 a 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값은?

① 4

② 3

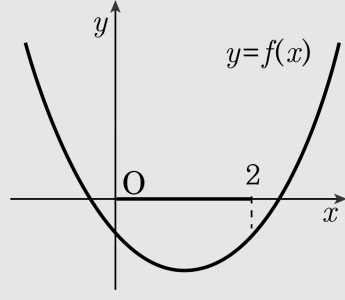
③ 2

④ 1

⑤ -1

해설

$f(x) = x^2 - ax + a^2 - 4$ 로 놓을 때
주어진 부등식의 해가 0, 2 를 포함 하려면
 $f(0) \leq 0, f(2) \leq 0$ 이어야 한다.



$$f(0) = a^2 - 4 \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq a \leq 2 \cdots \textcircled{1}$$

$$f(2) = -2a + a^2 \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq a \leq 2 \cdots \textcircled{2}$$

①, ②의 공통 범위는 $0 \leq a \leq 2$

따라서 $M = 2, m = 0$ 이므로 $M - m = 2$

17. 두 부등식 $x^2 - x - 2 > 0$, $x^2 - (a - 3)x - 3a < 0$ 를 동시에 만족하는 정수가 -2 뿐일 때, a 의 값의 범위를 구하면 $m < a \leq n$ 이다. mn 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

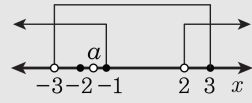
▷ 정답 : -6

해설

$$x^2 - x - 2 > 0 \text{에서 } x < -1, x > 2$$

$$x^2 - (a - 3)x - 3a < 0 \text{에서}$$

$$(x + 3)(x - a) < 0$$



그림에서와 같이 동시에 만족하는 정수값이 -2 뿐이려면 $-2 < a \leq 3$ 이다.

$$\therefore -2 < a \leq 3$$

18. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근은 -1 과 0 사이에 있고, 다른 근은 0 과 2 사이에 있을 때 정수 a, b 에 대하여, $a + b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$f(x) = x^2 + ax + b$ 라고 놓을 때

$$\begin{cases} f(-1) = 1 - a + b > 0 & \dots \textcircled{1} \\ f(0) = b < 0 & \dots \textcircled{2} \\ f(2) = 4 + 2a + b > 0 & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

$\textcircled{1} \times 2 + \textcircled{3}$ 하면 $6 + 3b > 0$

$\therefore b > -2$

이것과 $\textcircled{2}$ 에서 $-2 < b < 0$

$\therefore b = -1$ ($\because b$ 는 정수)

이 값을 $\textcircled{1}, \textcircled{3}$ 에 대입하면

$1 - a - 1 > 0, 4 + 2a - 1 > 0$

$\therefore -\frac{3}{2} < a < 0$

$\therefore a = -1$ ($\because a$ 는 정수)

$\therefore a = -1, b = -1, a + b = -2$

19. 이차방정식 $x^2 - (p+1)x + 2p-1 = 0$ 의 두 근 중 한 근은 -1보다 작고, 다른 한 근은 1보다 크도록 실수 p 의 범위를 정하면?

① $p > -\frac{1}{3}$
④ $p < -\frac{1}{3}$

② $p > 1$
⑤ $p < 1$

③ $-\frac{1}{3} < p < 1$

해설

$f(x) = x^2 - (p+1)x + 2p-1$ 로 놓으면

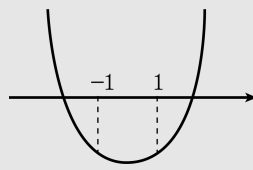
i) $f(-1) = 1 + p + 1 + 2p - 1 = 3p + 1 < 0$

$\therefore p < -\frac{1}{3}$

ii) $f(1) = 1 - p - 1 + 2p - 1 = p - 1 < 0$

$\therefore p < 1$

i) ii)에서 $p < -\frac{1}{3}$



20. 직선 $y = x - 1$ 위에 있고 점 A(1, 0), B(3, 2)에서 같은 거리에 있는 점 P의 좌표가 (a, b) 일 때, $a^2 + b^2$ 의 값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$y = x - 1$ 위에 잇는 점 P는 $(\alpha, \alpha - 1)$ 로 나타낼 수 있다.

$\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$$(\alpha - 1)^2 + (\alpha - 1)^2 = (\alpha - 3)^2 + (\alpha - 3)^2, \alpha = 2$$

$\therefore P(2, 1)$

$$\therefore a^2 + b^2 = 5$$

21. 세 꼭짓점이 A(-1, -1), B(4, 3), C(0, 1)인 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 를 2 : 3으로 내분하는 점을 각각 D, E, F라 하자. $\triangle DEF$ 의 무게중심을 (a, b) 라 할 때, $a + b$ 의 값은?

- ① -2
- ② -1
- ③ 0
- ④ 1
- ⑤ 2

해설

$\triangle ABC$ 에서 각 변을 $m : n$ 으로 내분하는 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심은 $\triangle ABC$ 의 무게중심과 일치한다.

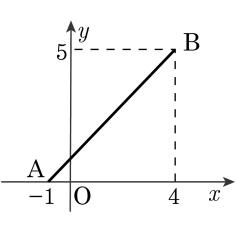
$\triangle ABC$ 의 무게중심은

$$\left(\frac{-1+4+0}{3}, \frac{-1+3+1}{3}\right),$$

즉 (1, 1) 이므로 $\triangle DEF$ 의 무게중심은 (1, 1)이다.

$$\therefore a + b = 1 + 1 = 2$$

22. 두 점 A(-1, 0), B(4, 5)에 대하여 두 점 A, B로부터의 거리의 비가 3 : 2 점 P의 자취의 방정식은?



- ① $(x-5)^2 + (y-6)^2 = 50$ ② $(x-6)^2 + (y-7)^2 = 60$
③ $(x-7)^2 + (y-6)^2 = 70$ ④ $(x-7)^2 + (y-8)^2 = 80$
⑤ $(x-8)^2 + (y-9)^2 = 72$

해설

점 P를 (x, y) 라 두면

$$\overline{AP} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$$
$$\overline{BP} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-5)^2}$$

$\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} : \frac{\overline{BP}}{\overline{AP}} = 3 : 2$ 이므로

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} : \sqrt{(x-4)^2 + (y-5)^2} = 3 : 2$$

정리하면 $(x-8)^2 + (y-9)^2 = 72$

- 23.** 점 A(2, 3)에서 두 점 B(-1, 3), C(3, 7)을 이은 선분 BC에 내린 수선의 발을 M(a, b)라 할 때, $4ab$ 의 값은?

① 7

②9

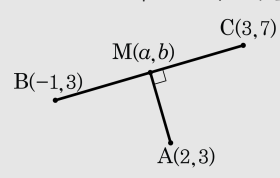
③ 11

④ 13

⑤ 15

해설

$\overline{BC} \perp \overline{AM}$ 이므로 두 직선의 기울기의 곱은 -1 이다.



$$\frac{7-3}{3-(-1)} \times \frac{b-3}{a-2} = -1$$

$$b - 3 = -(a - 2), \quad \therefore a + b = 5 \dots \textcircled{7}$$

한편, 직선 BC의 방정식은

$$y - 3 = \frac{7 - 3}{3 - (-1)}(x + 1)$$

$$\therefore y = x + 4$$

이 때, 점 M 이 $\overline{BC}$ 위의 점이므로

$$b = a + 4 \dots \textcircled{\text{L}}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{9}{2}$

$$\therefore 4ab = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2} = 9$$

24. 서로 다른 두 직선 $2x - ay - 2 = 0$, $x - (a - 3)y - 3 = 0$ 이 평행할 때, 두 직선 사이의 거리를 구하면?

- ① $\frac{\sqrt{6}}{5}$ ② $\frac{\sqrt{7}}{5}$ ③ $\frac{2\sqrt{2}}{5}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{\sqrt{10}}{5}$

해설

$$\begin{cases} 2x - ay - 2 = 0 \\ x - (a - 3)y - 3 = 0 \end{cases} \quad \text{정리하면}$$

$$\begin{cases} y = \frac{2}{a}x - \frac{2}{a} \\ y = \frac{1}{a-3}x - \frac{3}{a-3} \end{cases} \quad \text{평행하므로}$$

$$\frac{2}{a} = \frac{1}{a-3}$$

$\therefore a = 6$ 대입하면

$$\begin{cases} x - 3y - 1 = 0 \\ x - 3y - 3 = 0 \end{cases}$$

$x - 3y - 1 = 0$ 위의 점 $(1, 0)$ 과 $x - 3y - 3 = 0$ 과의 거리는

$$\therefore \frac{|1 - 3|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{2\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

25. 제1 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 r 인 원의 중심을 C_1 , 제2 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}r$ 인 원의 중심을 C_2 , 제3 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{4}r$ 인 원의 중심을 C_3 , 제4 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{8}r$ 인 원의 중심을 C_4 라 하자.

$\overline{C_1C_2} + \overline{C_2C_3} + \overline{C_3C_4} = 14\sqrt{10}$ 일 때, r 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$$\begin{aligned} &C_1(r, r), C_2\left(-\frac{1}{2}r, \frac{1}{2}r\right), \\ &C_3\left(-\frac{1}{4}r, -\frac{1}{4}r\right), C_4\left(\frac{1}{8}r, -\frac{1}{8}r\right) \text{ 이므로} \\ &\overline{C_1C_2} + \overline{C_2C_3} + \overline{C_3C_4} \\ &= \sqrt{\left(-\frac{3}{2}r\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}r\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{4}r\right)^2 + \left(-\frac{3}{4}r\right)^2} \\ &\quad + \sqrt{\left(\frac{3}{8}r\right)^2 + \left(\frac{1}{8}r\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{10}}{2}r + \frac{\sqrt{10}}{4}r + \frac{\sqrt{10}}{8}r \\ &= \frac{7\sqrt{10}}{8}r = 14\sqrt{10} \\ &\therefore r = 16 \end{aligned}$$

26. 두 원 $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 - 6x - 6y = 7$ 의 공통현의 길이를 구하면?

- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ 3

해설

$x^2 + y^2 = 1$ 은 중심이 원점이고 반지름이 1인 원이다.
 $x^2 + y^2 - 6x - 6y = 7$ 은 중심이 (3, 3)이고 반지름이 5인 원이다.
공통현의 방정식은
 $(x^2 + y^2 - 1) - (x^2 + y^2 - 6x - 6y - 7) = 0$
 $\therefore x + y + 1 = 0$
이때, $x^2 + y^2 = 1$ 의 원과 $x + y + 1 = 0$ 의 교점을 구하면
(0, -1), (-1, 0)에서 접하여 공통현의 길이는 $\sqrt{2}$ 이다.

27. 감시 카메라의 서쪽 20km 해상에서 한 척의 배가 북동쪽 방향으로 매시 5km의 속력으로 가고 있다. 감시 카메라로부터 15km 이내에 있는 배는 감시 화면에 나타난다고 할 때, 이 배는 감시 화면에 몇 시간 동안 나타나는지 구하여라

▶ 답: 시간

▶ 정답 : 2시간

해설

감시카메라의 위치와 배의 처음 위치를 각각 $O(0,0), A(-20,0)$ 이라 하면, 배의 자취의 방정식은 $y = x + 20(x \geq -20)$ 이다.

배가 B, C 위치 사이에 있을 때, 감시 화면에 나타나므로 $\overline{BC}$ 의 길이를 구하면 된다.

O(0,0)에서 직선 $x - y + 20 = 0$ 에 이르는 거리는

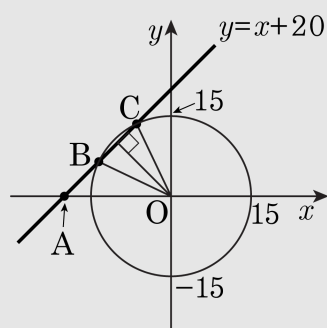
$$\frac{|20|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 10\sqrt{2}$$

$$\therefore \overline{BC} = 2 \sqrt{15^2 - (10\sqrt{2})^2} = 10(\text{km})$$

따라서 배의 속력이 5km/h 이므로

따라서 배의 속력이 5 km/h 시이므로

이 배가 감시 화면에 나타나는 시간은 2시간이다.



28. 점 A(3, -1)에서 원 $x^2 + y^2 = 5$ 에 그은 두 접선의 접점을 각각 Q₁, Q₂라고 할 때, 두 점 Q₁, Q₂를 지나는 직선의 방정식을 $y = mx + n$ 꼴로 나타낼때, $m^2 + n^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 34

해설

원 위의 두 접점을 Q₁(a₁, b₁), Q₂(a₂, b₂)라 하면
각각의 접선의 방정식은 $a_1x + b_1y = 5$, $a_2x + b_2y = 5$ 이고
두 직선은 동시에 P(3, -1)를 지나므로
 $3a_1 - b_1 = 5$, $3a_2 - b_2 = 5$ 이 함께 성립한다.
이것은 $3x - y = 5$ 위에 두 점
Q₁(a₁, b₁), Q₂(a₂, b₂)가
동시에 있는 것을 의미하므로
Q₁, Q₂를 지나는 직선의 방정식은 $3x - y = 5$ 이다.
따라서 $y = 3x - 5$ 에서 $m = 3$, $n = -5$

29. 다음 두 원의 공통접선의 방정식을 구하면?

$x^2 + y^2 = 16, \quad x^2 + (y - 5)^2 = 9$

- ① $y = \pm \sqrt{6}x + 10$

② $y = \pm 2 \sqrt{6}x + 20$

③ $y = \pm 3 \sqrt{6}x + 30$

④ $y = \pm 4 \sqrt{6}x + 40$

⑤ $y = \pm 5 \sqrt{6}x + 50$

해설

$x^2 + y^2 = 16 \dots\dots\textcircled{1}$,
 $x^2 + (y - 5)^2 = 9 \dots\dots\textcircled{2}$
공통접선의 방정식을
 $y = ax + b \dots\dots\textcircled{3}$ 로 놓는다.
이때, 원 $\textcircled{1}$ 과 직선 $\textcircled{3}$ 이 접하므로

$$\frac{|b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 4$$

$\therefore |b| = 4\sqrt{a^2 + 1} \dots\dots\textcircled{4}$
또, 원 $\textcircled{2}$ 과 직선 $\textcircled{3}$ 도 접하므로

$$\frac{|-5 + b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 3$$

$\therefore |b - 5| = 3\sqrt{a^2 + 1} \dots\dots\textcircled{5}$
그런데 $b \neq 0$ 이므로 $\textcircled{4} \div \textcircled{5}$ 을 하면

$$\frac{|b - 5|}{b} = \frac{3}{4}$$

$$4|b - 5| = 3|b|, \quad 4(b - 5) = \pm 3b$$

$$\therefore b = 20 \text{ 또는 } b = \frac{20}{7}$$

(i) $b = 20$ 일 때, $\textcircled{4}$ 에서 $\sqrt{a^2 + 1} = 5$
 $\therefore a = \pm 2\sqrt{6}$

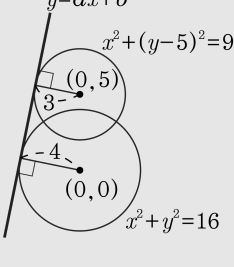
(ii) $b = \frac{20}{7}$ 일 때, $\textcircled{4}$ 에서

$$\sqrt{a^2 + 1} = \frac{5}{7} \text{ 이고,}$$

이것을 만족하는 실수 a 는 없다.

(i), (ii)로부터 $a = \pm 2\sqrt{6}, b = 20$ 이므로
구하는 공통접선의 방정식은

$$y = \pm 2\sqrt{6}x + 20$$



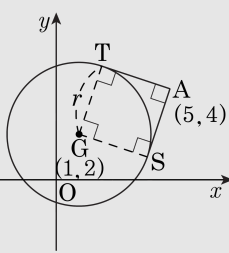
30. 좌표평면 위에 원 $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = r^2$ 과 원 밖의 점 A(5, 4)가 있다. 점 A에서 원에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 반지름의 길이 r 의 값은?

- ① $\sqrt{10}$
- ② $\sqrt{11}$
- ③ $\sqrt{12}$
- ④ $\sqrt{13}$
- ⑤ $\sqrt{14}$

해설

A에서 그은 접선이 서로 수직이면 원의 중심 G, 점점 S, T, 점 A로 이루어지는 사각형 GSAT는 한 변의 길이가 r 인 정사각형이다.

$$\therefore r = \frac{\overline{GA}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(5-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{10}$$



31. 직선 $y = 2x + a$ 를 x 축으로 2 만큼, y 축으로 1 만큼 평행이동하면 $x^2 + y^2 = 5$ 와 접한다고 한다. 이 때, 양수 a 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 5 ④ 8 ⑤ 10

해설

$$f(x : y) \rightarrow (x + 2, y + 1)$$

$$y = 2x + a \xrightarrow{f} (y - 1) = 2 \cdot (x - 2) + a$$

$$y = 2x - 4 + a + 1 = 2x + a - 3$$

직선 $2x - y + (a - 3) = 0$ 과 $(0, 0)$ 과의 거리가 $\sqrt{5}$ 이므로

$$\frac{|a - 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5}, |a - 3| = 5$$

$$a - 3 = \pm 5, a = 3 \pm 5$$

$$\therefore a = 8 \quad (\because a > 0)$$

32. 좌표평면에서 한 점 $A(-1, 3)$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 후 다시 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동하였더니 점 A 와 일치하였다. 이 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -16

해설

점 $A(-1, 3)$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면 $(-1 + a, 3 + b)$ 가 되고 다시 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동하면 $(3 + b, -1 + a)$ 가 된다.

$$(3 + b, -1 + a) = (-1, 3)$$

$$3 + b = -1, -1 + a = 3$$

$$a = 4, b = -4$$

$$\therefore ab = -16$$

33. D 가 부등식 $\max(|x|, |y|) \leq 1$ 의 영역이라고 하자. 함수 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 가 다음과 같다고 할 때, $f(0, 0) + f(2, 0) + f(1, 3)$ 의 값을 구하여라.

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = 1 \{ (x, y) \in D$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\max(|0|, |0|) \leq 1, (0, 0) \in D,$
 $\therefore f(0, 0) = 1$
 $\max(|2|, |0|) = 2 > 1, (2, 0) \notin D,$
 $\therefore f(2, 0) = 0$
 $\max(|1|, |3|) = 3 > 1, (1, 3) \notin D,$
 $\therefore f(1, 3) = 0$
그러므로 $f(0, 0) + f(2, 0) + f(1, 3) = 1$

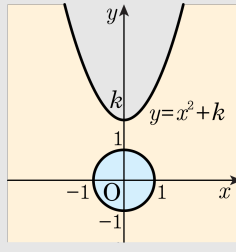
34. $x^2 + y^2 \leq 1$ 를 만족하는 모든 (x, y) 가 $y \leq x^2 + k$ 를 만족하도록 하는 실수 k 의 최솟값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$x^2 + y^2 \leq 1$ 를 만족하는 모든 (x, y) 가 $y \leq x^2 + k$ 를 만족하도록 하려면 다음 그림과 같이 포물선의 아랫부분에 원이 포함되어야 한다.

따라서 $k \geq 1$ 일 때 이므로 실수 k 의 최솟값은 1이다.



35. 연립부등식 $x \leq 0, y \geq 0, 4 \leq -x + 2y \leq 8$ 을 만족하는 점 $A(x, y)$ 에 대하여 원점 $O(0, 0)$ 과 점 A 를 이은 선분 $\overline{OA}$ 의 길이의 최댓값은?

- ① 2
- ② $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
- ③ 4
- ④ $\frac{4\sqrt{5}}{5}$
- ⑤ 8

해설

이때, 원점과 점 A 를 이은 선분 $\overline{OA}$ 의 길이가 최대일때는 점 A 가 $(-8, 0)$ 일때 이다.
따라서 선분 $\overline{OA}$ 의 길이의 최댓값은 8 이다.

