

1. $-2 \leq x \leq -1$ 일 때, $A = \frac{12}{2-x}$ 가 취하는 값의 범위를 구하면 $p \leq A \leq q$ 이다. 이 때, pq 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$-2 \leq x \leq -1$ 의 각 변에 -1 을 곱하면

$1 \leq -x \leq 2$

다시 각 변에 2를 더하면 $3 \leq 2-x \leq 4$

각 변의 역수를 취하면 $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{2-x} \leq \frac{1}{3}$

각 변에 12를 곱하면 $3 \leq \frac{12}{2-x} \leq 4$

$\therefore p=3, q=4$

$\therefore pq=12$

2. 부등식 $(a+b)x + (2a-b) > 0$ 의 해가 $x < -1$ 일 때, 부등식 $ax + b > 0$ 의 해를 구하면?

① $x < -\frac{1}{2}$
④ $x > -\frac{1}{3}$

② $x < -\frac{1}{3}$
⑤ $x > -1$

③ $x > -\frac{1}{2}$

해설

$(a+b)x + (2a-b) > 0$ 의 해가 $x < -1$ 이라면

$$a+b < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$-\frac{2a-b}{a+b} = -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

②에서 $a = 2b$ 이고 $a+b = 2b+b = 3b < 0$

$$\therefore b < 0$$

$ax+b > 0$ 에서 $2bx+b > 0$, $2bx > -b$

$$b < 0 \text{이므로 } x < -\frac{1}{2}$$

3. 부등식 $x^2 - |x| - 12 \geq 0$ 을 풀면?

① $x \leq -4$ 또는 $x \geq 1$

② $x \leq -4$ 또는 $x \geq 2$

③ $x \leq -4$ 또는 $x \geq 3$

④ $x \leq -4$ 또는 $x \geq 4$

⑤ $x \leq -4$ 또는 $x \geq 5$

해설

(i) $x \geq 0$ 일 때, $|x| = x$ 이므로

주어진 부등식은 $x^2 - x - 12 \geq 0$, $(x + 3)(x - 4) \geq 0$

$\therefore x \leq -3$ 또는 $x \geq 4 \cdots \textcircled{\text{㉠}}$

이 때, $x \geq 0$ 과 $\textcircled{\text{㉠}}$ 의 공통 범위를 구하면 다음 수직선에서 $x \geq 4$

(ii) $x < 0$ 일 때, $x^2 + x - 12 \geq 0$, $(x + 4)(x - 3) \geq 0$

$\therefore x \leq -4$ 또는 $x \geq 3 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$

이 때, $x < 0$ 과 $\textcircled{\text{㉡}}$ 의 공통 범위를 구하면 $x \leq -4$

따라서, $x \leq -4$ 또는 $x \geq 4$

4. 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha + \beta = 4$ 이다. 방정식 $f(4x - 2) = 0$ 의 두 근의 합은?

① 2 ② -2 ③ 4 ④ -4 ⑤ 0

해설

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha \text{ 또는 } x = \beta \text{가 성립하면}$$

$$f(4x - 2) = 0 \Leftrightarrow 4x - 2 = \alpha \text{ 또는 } 4x - 2 = \beta$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\alpha + 2}{4} \text{ 또는 } x = \frac{\beta + 2}{4}$$

$$\text{즉 } f(4x - 2) = 0 \text{의 두 근은 } \frac{\alpha + 2}{4}, \frac{\beta + 2}{4} \text{이다.}$$

$$\therefore \frac{\alpha + 2}{4} + \frac{\beta + 2}{4} = \frac{\alpha + \beta + 4}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

5. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - ax + 9 = 0$ 이 $x < 1$ 에서 두 개의 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 범위를 구하면 $a \leq k$ 이다. 이 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -6$

해설

$f(x) = x^2 - ax + 9$ 라 놓으면

i) 축이 $x < 1$ 에 있어야 하므로 $\frac{1}{2}a < 1, a < 2$

ii) $f(1) > 0, 1 - a + 9 > 0, a < 10$

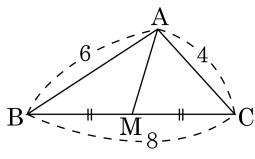
iii) 두 개의 실근을 가져야 하므로

$D = a^2 - 4 \cdot 9 \geq 0, a \geq 6, a \leq -6$

따라서 i), ii), iii)에 의해 $a \leq -6$

$\therefore k = -6$

6. 다음 그림의 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB} = 6$, $\overline{BC} = 8$, $\overline{AC} = 4$ 이고, $\overline{BC}$ 의 중점이 M일 때, $\overline{AM}^2$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

중선정리에 의하여

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2) \text{ 이므로}$$

$$6^2 + 4^2 = 2(\overline{AM}^2 + 4^2)$$

$$36 + 16 = 2\overline{AM}^2 + 32$$

$$\therefore \overline{AM}^2 = 10$$

7. 좌표평면에 두 점 A(1, 3), B(2, -1) 이 있다. 점 C(m, 2) 에 대하여 $\overline{AC} + \overline{BC}$ 가 최소일 때의 m 의 값을 구하면?

- ① $\frac{5}{4}$ ② $-\frac{5}{4}$ ③ $\frac{7}{4}$ ④ $-\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

해설

$\overline{AC} + \overline{BC}$ 가 최소인 경우는

세 점 A, B, C 가 일직선 위에 있을 때이므로

직선 AB 와 BC 의 기울기가 같다.

$$\text{따라서 } \frac{-1-3}{2-1} = \frac{2-(-1)}{m-2}$$

$$\therefore m = \frac{5}{4}$$

8. $ax + 8y = 4$, $x + (a + 2)y = -7$ 에 대하여 두 식을 동시에 만족하는 (x, y) 가 하나도 없을 때, 실수 a 의 값은?

① $a = -4$, $b = -2$

② $a = -4$, $b = 2$

③ $a = 4$, $b = -2$

④ $a = 4$, $b = 2$

⑤ $a = 1$, $b = -2$

해설

두 직선 $ax + 8y - 4 = 0$, $x + (a + 2)y + 7 = 0$ 이 평행해야 한다.

$$\text{그러므로 } \frac{a}{1} = \frac{8}{a+2} \neq -\frac{4}{7}$$

$$a(a+2) = 8 \quad \left(a \neq -\frac{4}{7}, a \neq -16 \right)$$

$$\therefore a = -4, 2$$

9. 두 직선 $3x + 4y = 24$ 와 $3x + 4y = 4$ 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

두 직선이 평행하므로 한 직선의 임의의 점과 나머지 직선 사이의 거리를 구하면 된다.

$3x + 4y = 24$ 의 점 $(0, 6)$

$$\frac{|0 \times 3 + 6 \times 4 - 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 4$$

10. 점 $(a, 2)$ 에서 직선 $12x - 5y - 4 = 0$ 에 이르는 거리가 2 가 되도록 하는 실수 a 의 값들의 합은?

- ① $-\frac{1}{3}$ ② 0 ③ 1 ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{7}{3}$

해설

점 $(a, 2)$ 에서 직선 $12x - 5y - 4 = 0$ 에 이르는 거리가 2 이므로

$$2 = \frac{|12a - 5 \times 2 - 4|}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{|12a - 14|}{13}$$

$$\therefore |12a - 14| = 26 \text{ 즉, } 12a - 14 = 26$$

$$\text{또는 } 12a - 14 = -26 \therefore a = \frac{10}{3}$$

또는 $a = -1$ 따라서 실수 a 의 값의 합은

$$\frac{10}{3} + (-1) = \frac{7}{3}$$

11. 두 직선 $2x - y - 1 = 0$, $x + 2y - 1 = 0$ 으로부터 같은 거리에 있는 점 P의 자취의 방정식 중에서 기울기가 양수인 것은?

① $y = x$

② $y = \frac{1}{2}x$

③ $y = \frac{1}{3}x$

④ $y = \frac{1}{4}x$

⑤ $y = \frac{1}{5}x$

해설

P(x, y) 라 하면,

(i) $2x - y - 1 = 0$ 까지의 거리 d_1 은

$$d_1 = \frac{|2x - y - 1|}{\sqrt{4 + 1}}$$

(ii) $x + 2y - 1 = 0$ 까지의 거리 d_2 는

$$d_2 = \frac{|x + 2y - 1|}{\sqrt{1 + 4}}$$

$d_1 = d_2$ 이므로 $|2x - y - 1| = |x + 2y - 1|$

$\therefore 2x - y - 1 = \pm(x + 2y - 1)$

즉, $x - 3y = 0$, $3x + y - 2 = 0$

그런데 기울기가 양수이므로 $x - 3y = 0$

$\therefore y = \frac{1}{3}x$

12. 다음 원과 직선의 교점의 개수를 구하여라.

$x^2 + y^2 = 4, \quad y = x + 3$

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 0 개

해설

원의 중심 $(0, 0)$ 에서 직선 $y = x + 3$ 까지의 거리를 d 라 하면,

$$d = \frac{|3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

이때, $d = \frac{3\sqrt{2}}{2} > 2 = r$

이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

∴ 교점의 개수 : 0 개

13. 직선 $x+2y-3=0$ 을 x 축, y 축의 방향으로 각각 m, n 만큼 평행이동하면 처음 직선과 일치한다. 이 때 m, n 의 관계식으로 옳은 것은?

- ① $m+2n=0$ ② $m+2n=1$ ③ $2m+n=0$
④ $2m-n=0$ ⑤ $2m-n=1$

해설

직선 $x+2y-3=0$ 을 x 축, y 축의 방향으로 각각 m, n 만큼 평행이동하면

$$(x-m)+2(y-n)-3=0$$

$$\therefore x+2y-m-2n-3=0$$

이 직선이 처음 직선 $x+2y-3=0$ 과 일치하므로

$$-m-2n-3=-3$$

$$\therefore m+2n=0$$

14. 직선 $y = -4x + 7$ 을 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 직선을 l_1 , 원점에 대하여 대칭이동한 직선을 l_2 라고 할 때, 두 직선 l_1, l_2 의 기울기의 곱은?

- ① -1 ② $-\frac{1}{16}$ ③ $\frac{1}{16}$ ④ 1 ⑤ 16

해설

$$l_1 : y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{4}, \quad l_2 : y = -4x - 7$$

$$l_1 \text{의 기울기} : -\frac{1}{4}, \quad l_2 \text{의 기울기} : -4$$

$$\therefore \text{두 직선 } l_1, l_2 \text{의 기울기의 곱은 } -\frac{1}{4} \times -4 = 1 \text{ 이다.}$$

15. 직선 $y = x + 1$ 에 관해서 점 $A(-2, 3)$ 과 대칭인 점의 좌표를 (x, y) 라 할 때, $x + y$ 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$y = x + 1$ 에 $A(-2, 3)$ 에 대칭인 점은 A' 이므로 $\overline{AA'}$ 의 중점은 $y = x + 1$ 위의 점이다.

$$\frac{-2+a}{2} + 1 = \frac{3+b}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 $\overline{AA'}$ 의 기울기와 $y = x + 1$ 의 기울기의 곱이 -1 이므로

$$\left(\frac{b-3}{a+2}\right) \times 1 = -1$$

$$\therefore b - 3 = -a - 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②에 의해 $a = 2, \quad b = -1$

$\therefore (2, -1)$

16. 임의의 실수 x 에 대하여 부등식 $x^2 - a|x| + 2 \geq 0$ 이 성립하기 위한 실수 a 의 최댓값은? (단, $a > 0$)

① 3 ② $2\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $\sqrt{2}$ ⑤ 1

해설

$x^2 - a|x| + 2 = |x|^2 - a|x| + 2$ 이므로
 $|x| = t$ ($t \geq 0$) 로 치환하면 $t^2 - at + 2 \geq 0$

$$f(t) = \left(t - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + 2$$

$t \geq 0$ 인 모든 실수 t 에 대하여

$t^2 - at + 2 \geq 0$ 이 성립하려면 $a > 0$ 이므로

그림에서 $f\left(\frac{a}{2}\right) \geq 0$

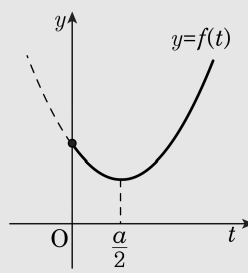
$$-\frac{a^2}{4} + 2 \geq 0, \quad a^2 - 8 \leq 0$$

$$-2\sqrt{2} \leq a \leq 2\sqrt{2}$$

그런데 $a > 0$ 이므로

$$0 < a \leq 2\sqrt{2}$$

따라서 실수 a 의 최댓값은 $2\sqrt{2}$ 이다.



17. 이차방정식 $x^2 + (a-b)x + ab = 1$ 이 a 의 어떤 실수값에 대해서도 항상 실근을 갖도록 b 의 범위를 정하면?

① $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq b \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

② $b \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}, b \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

③ $-\frac{\sqrt{2}}{3} \leq b \leq \frac{\sqrt{2}}{3}$

④ $b \leq -\frac{\sqrt{2}}{3}, b \geq \frac{\sqrt{2}}{3}$

⑤ $b \leq -2, b \geq 2$

해설

$$x^2 + (a-b)x + ab - 1 = 0 \text{ 에서}$$

$$D = (a-b)^2 - 4(ab-1) \geq 0$$

이 식을 a 에 관해서 정리하면, $a^2 - 6ba + b^2 + 4 \geq 0$ 이

부등식이 a 에 관계없이 항상 성립하기 위한 조건은 $\frac{D'}{4} \leq 0$

이므로

$$\frac{D'}{4} = (3b)^2 - (b^2 + 4) \leq 0$$

$\therefore 2b^2 - 1 \leq 0$ 에서

$$(\sqrt{2}b + 1)(\sqrt{2}b - 1) \leq 0$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq b \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq b \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

18. 두 부등식 $-x^2 + 4x + 5 < 0$,
 $x^2 + ax - b \leq 0$ 에 대하여
두 부등식 중 적어도 하나를 만족하는 x 의 값은 실수 전체이고, 두
부등식을 동시에 만족하는 x 의 값은 $5 < x \leq 6$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① -1 ② 1 ③ -11 ④ 11 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}x^2 - 4x - 5 &> 0 \\(x + 1)(x - 5) &> 0 \\x < -1 \text{ 또는 } x > 5 \\x^2 + ax - b &\leq 0 \\\Rightarrow (x - \alpha)(x - \beta) &\leq 0 \text{ 라 하자} \\\alpha \leq x \leq \beta\end{aligned}$$

이제 주어진 조건에 만족하려면



$$\begin{aligned}\therefore \alpha &= -1, \beta = 6 \\\Rightarrow (x + 1)(x - 6) &= x^2 - 5x - 6 \\a &= -5, b = 6, a + b = 1\end{aligned}$$

19. 두 점 A(2, 3), B(0, -1)를 이은 선분 AB, 또는 그연장선 위에 $\overline{AB} = 2\overline{BC}$ 인 점 C 는 두 개가 있다. 이 때, 이 두 점 사이의 거리는?

① $2\sqrt{3}$ ② 4 ③ $2\sqrt{5}$ ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ 5

해설

$\overline{AB} = 2\overline{BC}$ 만족시키는 C 는 $\overline{AB}$ 의 1 : 1 내분점이거나 3 : 1 외분점이다.

i) 1 : 1 내분점은 $\left(\frac{2+0}{2}, \frac{3+(-1)}{2}\right) = (1, 1)$

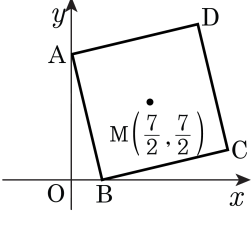
ii) 3 : 1 외분점은

$\left(\frac{3 \times 0 - 1 \times 2}{3 - 1}, \frac{3 \times (-1) - 1 \times 3}{3 - 1}\right) = (-1, -3)$

i), ii) 사이 거리는

$\sqrt{(1+1)^2 + (1+3)^2} = 2\sqrt{5}$

20. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 한 변의 길이가 5인 정사각형 ABCD가 있다. 정사각형 ABCD의 중심 M의 좌표가 $\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$ 일 때, $\triangle OAB$ 의 넓이는? (단, O는 원점이다.)



- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

다음 그림과 같이 두 점 A, B의 좌표를 $A(0, a), B(b, 0)$ 이라 하고 점 D를 지나면서

x 축에 평행한 직선이 y 축과 만나는 점을 E라 하면 $\triangle OAB \cong \triangle EDA$

따라서 $\overline{AE} = \overline{BO} = b, \overline{DE} = \overline{AO} = a$

이므로 $D(a, a+b)$

이 때, 점 M은 선분 BD의 중점이므로

$$M\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$$

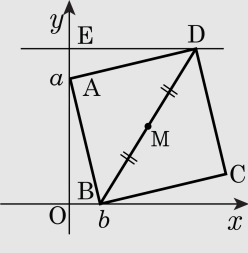
$$\text{즉, } \frac{a+b}{2} = \frac{7}{2} \text{에서 } a+b=7$$

또, 정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 5이므로

$\triangle OAB$ 에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 5, a^2 + b^2 = 25$$

$$\begin{aligned} \therefore \triangle OAB &= \frac{1}{2}ab = \frac{1}{4}\{(a+b)^2 - (a^2 + b^2)\} \\ &= \frac{1}{4}(7^2 - 25) = 6 \end{aligned}$$



21. $\triangle ABC$ 의 무게중심이 $G(1, 4)$ 이고, 세 변 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의 중점이 각각 $(-1, 6)$, (a, b) , $(3, 4)$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

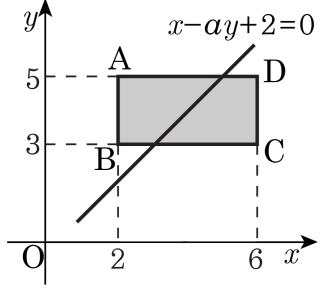
$\triangle ABC$ 의 무게중심 G 는

세 변 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의 중점을 꼭지점으로 하는 삼각형의 무게중심과 일치한다.

따라서 $\frac{-1+a+3}{3} = 1$, $\frac{6+b+4}{3} = 4$ 이므로

$a = 1$, $b = 2$ 이고, $\therefore a + b = 3$

22. 다음 그림에서 □ABCD의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식이 $x - ay + 2 = 0$ 일 때, 상수 a 의 값은?



- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

해설

직사각형의 넓이를 이등분하려면 직사각형의 대각선의 교점을 지나야 한다.

두 대각선의 교점의 좌표는 $\left(\frac{2+6}{2}, \frac{3+5}{2}\right)$

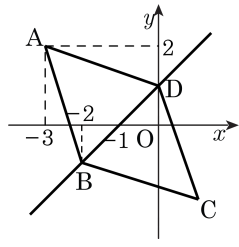
즉 (4, 4)이다.

직선 $x - ay + 2 = 0$ 이 점 (4, 4)를 지나야 한다.

따라서 (4, 4)를 대입하면 $4 - 4a + 2 = 0$

$\therefore a = \frac{3}{2}$

23. 다음 그림에서 점 B와 점 D를 지나는 직선의 x 절편이 -1 이고 $A(-3, 2)$ 일 때, 마름모 ABCD의 넓이를 구하면?



▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

대각선 BD의 중점은 $M(-1, 0)$, 사각형 ABCD가 마름모이므로

$\overline{AM} \perp \overline{BD}$,

$\overline{AM}$ 의 기울기가 -1 이므로

$\overline{BD}$ 의 기울기는 1 ,

점 B와 점 D의 y 값을 a, b 라 하면

$b - a = 2, \frac{a + b}{2} = 0$ 이므로 $a = -1, b = 1$ 이다.

$\therefore D(0, 1)$

$\overline{AM} = 2\sqrt{2}, \overline{MD} = \sqrt{2}$ 이므로

마름모 ABCD의 넓이는

$$4 \left(\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} \right) = 8$$

24. 세 점 A(1, 3), B(3, 1), C(5, 5) 를 꼭지점으로 하는 $\triangle ABC$ 와 직선 $kx - y + 2k - 1 = 0$ 이 만난다. 상수 k 의 최대값을 M, 최소값을 m 이라 할 때, $\frac{M}{m}$ 의 값은?

- ① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ 2 ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{10}{3}$

해설

직선의 방정식 $ax + by + c + k(a'x + b'y + c') = 0$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 두 직선 $ax + by + c = 0$ 과 $a'x + b'y + c' = 0$ 의 교점을 지난다.

그림과 같이 직선 $kx - y + 2k - 1 = 0$ 즉 $y = k(x + 2) - 1$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 점 $(-2, -1)$ 을 지나므로 이 직선이 $\overline{AB}$ 와 만날 때, 삼각형과 만난다.

1) 점 A 를 지날 때, $3 = k(1 + 2) - 1, \quad k = \frac{4}{3}$

2) 점 B 를 지날 때, $1 = k(3 + 2) - 1, \quad k = \frac{2}{5}$

따라서 $\frac{2}{5} \leq k \leq \frac{4}{3}$ 일 때, 주어진 직선은 삼각형과 만난다.

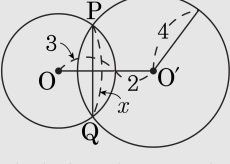
$\therefore \frac{M}{m} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{5}} = \frac{10}{3}$

25. 두 원 O 와 O' 의 반지름의 길이가 각각 3 cm, 4 cm 이고 중심거리가 5 cm 일 때, 두 원의 공통현의 길이를 구하면?

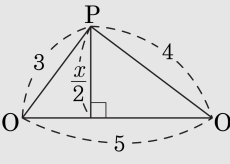
- ① 4
- ② 4.2
- ③ 4.4
- ④ 4.6
- ⑤ 4.8

해설

$\overline{PQ}$ 를 x 라 하면,



확대해보면 두 교점을 P, Q 라 하면,



삼각형의 넓이 : $\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{x}{2}$

$\therefore x = \frac{24}{5} = 4.8$

26. 두 원 $(x-a)^2 + (y-2)^2 = 9$, $(x-1)^2 + (y+a)^2 = 1$ 이 직교할 때 a 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

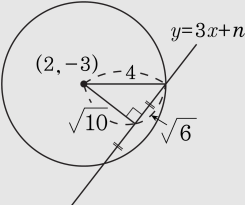
두 원의 중심이 각각 $(a, 2)$, $(1, -a)$ 이므로
두 원의 중심 사이의 거리는 $\sqrt{(a-1)^2 + (2+a)^2}$ 이다.
두 원의 반지름은 각각 3, 1이므로
직교하기 위한 조건은
 $(a-1)^2 + (2+a)^2 = 3^2 + 1^2$
 $\therefore 2a^2 + 2a - 5 = 0$
근과 계수와의 관계로부터 두 근의 합은 -1

27. 직선 $y = 3x + n$ 이 원 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ 에 의하여 잘린 현의 길이가 $2\sqrt{6}$ 일 때, 상수 n 의 값의 합은?

- ① -18 ② 18 ③ -22 ④ 22 ⑤ 0

해설

$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4^2$ 이고



그림에 따라서, 직선과 중심과의 거리는

$4^2 - (\sqrt{6})^2 = (\sqrt{10})^2$ 에 따라서 $\sqrt{10}$

$3x - y + n = 0$ 과 $(2, -3)$ 의 거리

$$\frac{|6 + 3 + n|}{\sqrt{3^2 + 1}} = \sqrt{10}$$

$$|9 + n| = 10$$

$$\therefore n = \pm 10 - 9 = 1 \text{ or } -19$$

$$\therefore 1 - 19 = -18$$

28. 원 $x^2 + y^2 = 5$ 와 점 $P(x_1, y_1)$ 에서 접하는 직선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B 라고 할 때, $\triangle OAB$ 의 넓이의 최솟값을 구하여라. (단, P 는 제1 사분면 위의 점이고, O 는 원점이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x_1y_1 > 0$ 이고 넓이는 $\frac{25}{2x_1y_1}$ 이므로

x_1y_1 이 최대가 될 때 넓이는 최소가 된다.

그런데 $x_1^2 + y_1^2 = 5$ 이고 $x_1 > 0, y_1 > 0$ 이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{x_1^2 + y_1^2}{2} \geq \sqrt{x_1^2 \cdot y_1^2} = x_1y_1, x_1y_1 \leq \frac{5}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{x_1y_1} \geq \frac{2}{5}$$

$$\therefore \frac{25}{2x_1y_1} \geq \frac{25}{2} \cdot \frac{2}{5} = 5 \text{ (단, 등호는 } x_1 = y_1 \text{ 일 때 성립)}$$

따라서, 구하는 넓이의 최솟값은 5

29. 점 $(2, -1)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 그은 접선의 방정식이 $y = a_1x + b_1, y = a_2x + b_2$ 일 때, $a_1a_2 - b_1b_2$ 의 값은?

- ① $\frac{3}{4}$
- ② $\frac{5}{3}$
- ③ $\frac{4}{3}$
- ④ $-\frac{5}{3}$
- ⑤ $-\frac{4}{3}$

해설

접선의 방정식을 $y = ax + b$ 라고 하면, $(2, -1)$ 을 지나므로 $-1 = 2a + b \therefore b = -2a - 1$

$y = ax - 2a - 1, \quad ax - y - 2a - 1 = 0$
 원점과 접선과의 거리가 1이므로

$$\frac{|-2a-1|}{\sqrt{a^2+1}}=1$$

$$|-2a-1|=\sqrt{a^2+1}$$

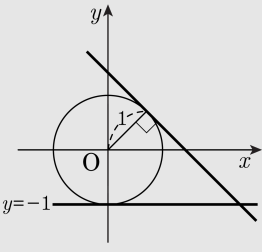
$$4a^2+4a+1=a^2+1, \quad 3a^2+4a=0$$

$$\therefore a=0 \text{ or } -\frac{4}{3}$$

$$\therefore y=-\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}, \quad y=-1$$

$$\therefore a_1=-\frac{4}{3}, \quad a_2=0, \quad b_1=\frac{5}{3}, \quad b_2=-1$$

$$\therefore a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2 = 0 - \left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{5}{3}$$



30. 한 점 $A(-2, 3)$ 에서 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ 에 이르는 거리의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할때, $M + m$ 의 값은?

- ① $2\sqrt{31}$
 ② $4\sqrt{2} + 2\sqrt{31}$
 ③ $2\sqrt{34}$
- ④ $4\sqrt{2} + 2\sqrt{34}$
 ⑤ $8\sqrt{2}$

해설

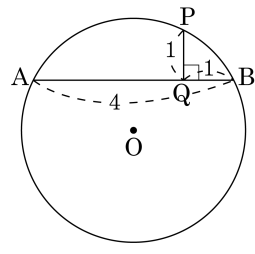
$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = (x-1)^2 + (y+2)^2 - 8 = 0$$

에서

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = (2\sqrt{2})^2$$

그림에서 점과 원 사이의 거리의 최댓값은
(점과 원의 중심 사이의 거리)+(반지름)
즉 $\sqrt{(-2-1)^2 + (3+2)^2} + 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} + \sqrt{34}$
최솟값은 (점과 원의 중심 사이의 거리)-반지름
= $\sqrt{34} - 2\sqrt{2}$
 $\therefore M + m = 2\sqrt{34}$

31. 다음 그림과 같이 한 원 O의 호와 현으로 이루어진 도형에서 $\overline{AB} = 4$, $\overline{PQ} = \overline{BQ} = 1$ 일 때, 원 O의 반지름의 길이의 제곱을 구하여라.

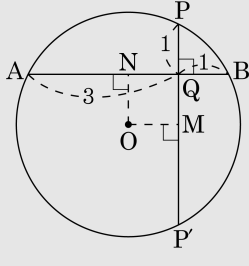


▶ 답 :

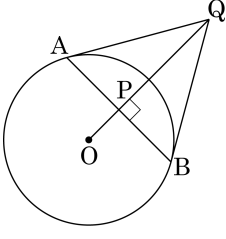
▷ 정답 : 5

해설

그림과 같이 $\overline{PQ}$ 의 연장선과 원 O의 교점을 P' 이라 하면
 $\overline{P'Q} = 3$ ($\because \overline{PQ} \cdot \overline{P'Q} = \overline{AQ} \cdot \overline{BQ}$)
 또, 원 O의 중심에서 $\overline{AB}, \overline{PP'}$ 에 내린 수선의 발을 각각 N, M이라 하면
 원의 중심에서 현에 그은 수선은 현을 수직이등분하므로
 $\overline{NB} = \overline{PM} = 2$
 따라서 $\overline{NQ} = \overline{QM} = 1$ 이 되므로
 $\square OMQN$ 은 정사각형이다.
 $\therefore \overline{OM} = 1, \overline{PM} = 2$
 그러므로 피타고라스의 정리에 의하여
 $r = \overline{OP} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$
 $r^2 = 5$



32. 반지름의 길이가 10 인 원 O 의 내부에 한 점 P 가 있다. 점 P 를 지나고 직선 OP 에 수직인 직선이 원과 만나는 두 점을 A, B 라 하고, A, B 에서의 두 접선의 교점을 Q 라 하자. $\overline{OP} = 5$ 일 때, 선분 PQ 의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$\triangle OAP$ 에서 $\overline{OA} = 10$, $\overline{OP} = 5$ 이고 $\angle OPA = 90^\circ$ 이므로 피타고라스의 정리에 의해

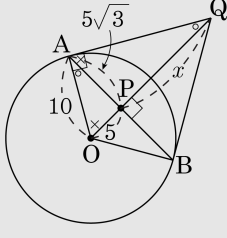
$$\begin{aligned}\overline{AP} &= \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OP}^2} \\ &= \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3} \text{ 이다.}\end{aligned}$$

또한, $\angle AOP = \angle QAP$ 이고 $\angle OAP = \angle AQP$ 이므로

$\triangle OAP$ 와 $\triangle AQP$ 는 닮은꼴이 된다.

$$\therefore \overline{OP} : \overline{AP} = \overline{AP} : \overline{PQ}$$

$$\therefore \overline{PQ} = \frac{\overline{AP}^2}{\overline{OP}} = \frac{75}{5} = 15$$



33. 직선 $3x + 4y = 0$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 접한다. 이 때, 두 양수 a, b 에 대하여 $3a + 4b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

직선 $3x + 4y = 0$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼,
 y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면
 $3(x - a) + 4(y - b) = 0$ 이므로
원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 직선 $3x + 4y - 3a - 4b = 0$ 이 접한다.
즉, 원의 중심 $(0, 0)$ 에서 직선
 $3x + 4y - 3a - 4b = 0$ 까지의 거리가
반지름의 길이 1 과 같다.
 $\therefore \frac{|3 \times 0 + 4 \times 0 - 3a - 4b|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 1$
 $\therefore |-3a - 4b| = 5$
이 때, a, b 가 양수이므로
 $3a + 4b = 5$ 이다.

34. 직선 $x + 2y - 3 = 0$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 후 다시 $y = x$ 에 대하여 대칭이동 하였더니, 원 $(x - 1)^2 + (y - a)^2 = 1$ 의 넓이를 이등분하였다. 이 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 5$

해설

$x + 2y - 3 = 0 \Rightarrow x - 2y - 3 = 0$ (x 축 대칭이동)
 $\Rightarrow y - 2x - 3 = 0$ ($y = x$ 대칭이동)
원의 넓이를 이등분하려면, 원의 중심이 직선 위에 있으면 된다.
따라서 중심의 좌표를 직선에 대입한다.
 $\therefore a - 2 - 3 = 0 \quad \therefore a = 5$