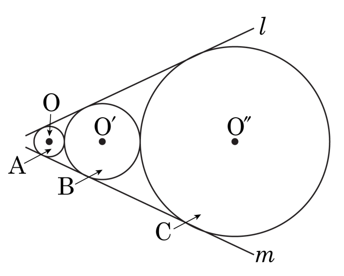
1. 원 $(x-1)^2+(y+2)^2=r^2(r>0)$ 과 원 $(x+2)^2+(y-2)^2=9$ 이 외접하기 위한 r 의 값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

두 원이 외접하려면 중심사이의 거리가
반지름 합과 같아야 한다.
$\Rightarrow \quad \sqrt{(1-(-2))^2+(-2-2)^2}=r+3$
$\therefore \quad r=2$

2. 다음 그림과 같이 두 직선 l, m 에 접하는 세원 A, B, C 가 서로 외접하고 있다. 두 원 A, B 의 반지름의 길이가 각각 $2, 5$ 일 때, 원 C 의 지름의 길이는? (단, 원의 중심은 일직선 위에 있다.)

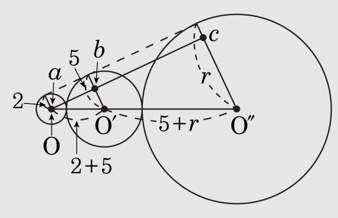


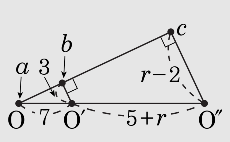
① 15　　② 17　　③ 19

④ 21　　⑤ 25

해설

세 원의 중심을 이은 선분을 빗변으로 하는 직각삼각형을 생각해보자. 원 C 의 반지름을 r 이라고 하면, 다음 두 직각삼각형은 닮음이다.





$\therefore\ (2+5) : 3 = (12+r) : (r-2)$

$\Rightarrow\ 36 + 3r = 7r - 14$

$\Rightarrow\ r = 12.5$

$\therefore$ 지름이 25

3. 다음 방정식으로 표시되는 그래프는 m 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다.
그 점의 좌표가 (a, b) 일 때, $a + b$ 의 값은? (단, $a < 0, b < 0$)

$$(x^2 + y^2 + 2x + 3y - 1)m + (x^2 + y^2 + 2x + 2y - 3) = 0$$

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

m 의 값에 관계없이 다음 두 원의 교점을 지난다.
$x^2 + y^2 + 2x + 3y - 1 = 0$,
$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 3 = 0$
연립하여 풀면 $(x, y) = (-3, -2), (1, -2)$
그러므로 $(a, b) = (-3, -2)$

4. 두 원 $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2-4x-4y=0$의 교점과 점 $(-1,\ 1)$을 지나는 원의 넓이는?

① π　② 2π　③ 4π　④ 8π　⑤ 16π

해설

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은
$\left(x^2+y^2-4\right)+k\left(x^2+y^2-4x-4y\right)=0 \cdots$ ㉠
㉠이 점 $(-1,\ 1)$을 지나므로
㉠에 대입하여 정리하면 $k=1$
$\therefore x^2+y^2-2x-2y-2=0$이므로
$(x-1)^2+(y-1)^2=4$
따라서, 반지름의 길이가 2이므로 원의 넓이는 4π이다.

5. 두 원 $x^2+y^2-x+2y-3=0$, $2x^2+2y^2-6x+ay-2=0$ 의 공통현이 직선 $y=-3x-1$ 과 직교할 때, 상수 a 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 4　　④ 8　　⑤ 16

해설

두 원의 공통현의 방정식은
$2(x^2+y^2-x+2y-3)-(2x^2+2y^2-6x+ay-2)=0$
즉, $4x+(4-a)y-4=0 \cdots\cdots$ ㉠
직선 ㉠과 직선 $y=-3x-1$ 은 직교하므로
$\frac{-4}{4-a}\times(-3)=-1$ 에서 $a=16$

6. 세 원 $x^2+y^2-4x-4y+4=0$, $x^2+y^2-8x-6y+16=0$, $(x-a)^2+(y-b)^2=25$ 를 각각 C_1, C_2, C_3 라고 하자. 이 때, C_1, C_2 의 공통현과 C_1, C_3 의 공통현이 일치하도록 하는 양수 a, b 의 값에 대하여 $a-b$ 의 값은?

① $\frac{\sqrt{95}}{5}$　② $\frac{\sqrt{101}}{5}$　③ $\frac{\sqrt{105}}{5}$

④ $\frac{\sqrt{110}}{5}$　⑤ $\frac{\sqrt{115}}{5}$

해설

두 원 C_1, C_2 의 공통현의 방정식은

$(x^2+y^2-4x-4y+4)-(x^2+y^2-8x-6y+16)=0$

$\therefore 2x+y-6=0 \cdots\cdots$ ㉠

원 C_3 의 방정식을 변형하면

$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-25=0$ 이고,

두 원 C_1, C_3 의 공통현의 방정식은

$(2a-4)x+(2b-4)y-(a^2+b^2-29)=0 \cdots$ ㉡

두 직선 ㉠, ㉡이 일치하므로

$\frac{2a-4}{2}=\frac{2b-4}{1}=\frac{a^2+b^2-29}{6}$

$\frac{2a-4}{2}=\frac{2b-4}{1}$ 에서 $2a-4=4b-8$

$\therefore a=2b-2 \cdots\cdots$ ㉢

$\frac{2b-4}{1}=\frac{a^2+b^2-29}{6}$ 에 ㉢을 대입하면

$12b-24=(2b-2)^2+b^2-29$

$5b^2-20b-1=0$

$\therefore b=\frac{10\pm\sqrt{105}}{5}$

그런데 $b>0$ 이므로 $b=\frac{10+\sqrt{105}}{5}$

$\therefore a-b=\frac{\sqrt{105}}{5}$

7. 두 원 $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2+2x+2y=0$ 의 공통현의 길이는?

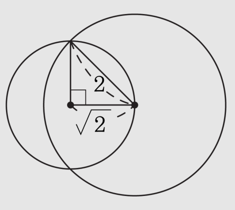
① $\sqrt{2}$　② $2\sqrt{2}$　③ $3\sqrt{2}$　④ $4\sqrt{2}$　⑤ $5\sqrt{2}$

해설

$x^2+y^2=4$, $(x+1)^2+(y+1)^2=2$

다음 그림과 같이 현의 길이의 $\frac{1}{2}$ 과

작은 원의 반지름 길이가 같다.



$\therefore$ 현의 길이 : $2\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

8. 두 원 $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2-6x+6y=7$ 의 공통현의 길이를 구하면?

① $\frac{1}{2}$　　② 1　　③ $\sqrt{2}$　　④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　⑤ $\sqrt{3}$

해설

두 원의 교점을 P, Q 라 하고 $\overline{PQ}$ 의 중점을 H 라 하면
$\triangle$OPH 는 직각삼각형이고,
$\overline{OP}$ 의 길이는 원 $x^2+y^2=1$ 의 반지름이므로 1 이다.
두 원의 공통현의 방정식은
$(x^2+y^2-1)-(x^2+y^2-6x+6y-7)=0$,
즉 $x-y+1=0$ ⋯⋯㉠
원 $x^2+y^2=1$ 의 중심 O(0, 0) 에서
직선 ㉠에 이르는 거리

$$\overline{OH}=\frac{|0-0+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\ \overline{PH}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{OH}^2}=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore\ \overline{PQ}=2\overline{PH}=\sqrt{2}$$

9. 두 원 $(x-1)^2+y^2=9$와 $(x+2)^2+y^2=24$의 공통현의 길이를 구하면?

① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

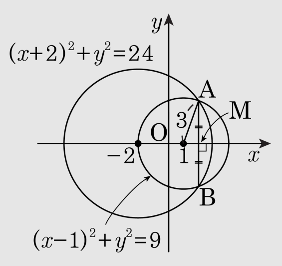
해설

두 원 $(x-1)^2+y^2=9$, $(x+2)^2+y^2=24$

즉, $x^2+y^2-2x-8=0$, $x^2+y^2+4x-20=0$의 공통현의 방정식은

$(x^2+y^2-2x-8)-(x^2+y^2+4x-20)=0$

$-6x+12=0$ $\quad\therefore x=2$



$(x-1)^2+y^2=9$의 중심 $(1,\ 0)$과 $x=2$와의 거리 $d=1$

따라서, 다음 그림에서 원의 공통현은 $\overline{AB}$이고,

$\overline{AM}=\overline{BM}$이므로 공통현의 길이는

$\overline{AB}=2\overline{AM}=2\sqrt{3^2-1}=4\sqrt{2}$

10. 원 $x^2+y^2-2ax-2y-4=0$이 원 $x^2+y^2+2x+2ay-2=0$의 둘레를 이등분하면서 지날 때, a의 값의 합은?

① -4 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 2

해설

원 $x^2+y^2-2ax-2y-4=0$이
원 $x^2+y^2+2x+2ay-2=0$의 둘레를 이등분하려면
두 원의 공통현이
원$x^2+y^2+2x-2ay-2=0$의 중심을 지나야 한다.
공통현의 방정식은
$(1+a)x+(a+1)y+1=0 \cdots\cdots$ ㉠
㉠이 점 $(-1,\ -a)$ 를 지나므로
$(1+a)\times(-1)+(a+1)\times(-a)-2=0$
$a^2+2a=0$
$\therefore$ 근과 계수와의 관계에 의해 -2

11. 두 원

A : $x^2+y^2+2x-4=0$,

B : $x^2+y^2-2ax+2y-6=0$

에서 원 A 가 원 B 의 둘레를 이등분하면서 지날 때, a 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

원 B 가 원 A 의 둘레를 이등분하므로

두 원의 공통현이

원 A 의 중심을 지나야 한다.

공통현의 방정식은

$(1+a)x-y+1=0 \cdots\cdots$ ㉠

한편, $x^2+y^2+2x-4=0$

$(x+1)^2+y^2=5$ 이므로

㉠ 이 점 $(-1,0)$ 을 지나야한다.

$-1-a+1=0$

$\therefore\ a=0$

12. 두 원 $(x+1)^2+y^2=1$, $x^2+y^2-6x-6y+2=0$ 의 공통접선의 개수는?

① 0 개　② 1 개　③ 2 개　④ 3 개　⑤ 4 개

해설

$(x+1)^2+y^2=1$ 에서 이 원의 중심을 C_1 이라
하면 점 C_1 의 좌표는 $(-1,\ 0)$ 이고
반지름의 길이는 1 이다.
$x^2+y^2-6x-6y+2=0$ 에서
$(x-3)^2+(y-3)^2=16$ 이므로
이 원의 중심을 C_2 이라 하면
점 C_2 의 좌표는 $(3,\ 3)$ 이고
반지름의 길이는 4 이다.
$\overline{\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2}=5$ 이고
두 원의 반지름의 길이는 1, 4 이므로
두 원은 서로 외접하게 된다.
따라서 공통접선은 3 개이다.

13. 두 원 $x^2+y^2=1$, $(x-3)^2+(y+4)^2=r^2$ 의 공통접선이 모두 4 개가 되도록 하는 자연수 r 의 개수는?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

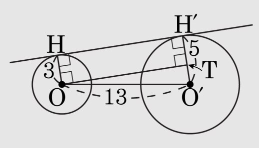
두 원의 공통접선이 4 개가 되려면 두 원의
위치 관계는 서로 다른 원의 외부에 있어야 한다.
이 때, $x^2+y^2=1$ 은 중심이 $(0,0)$,
반지름의 길이가 1 인 원이고
$(x-3)^2+(y+4)^2=r^2$ 은 중심이 $(3,-4)$,
반지름의 길이가 r 인 원이므로
$\sqrt{3^2+(-4)^2} > 1+r$
$5 > 1+r$
$\therefore 0 < r < 4$
따라서, 자연수 r 은 $1, 2, 3$ 으로 모두 3 개이다.

14. 다음 두 원 $x^2+y^2=9$ 와 $(x-12)^2+(y-5)^2=25$ 의 공통외접선과 공통내접선의 길이를 각각 구하면?

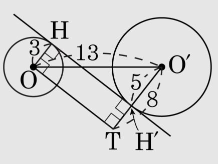
① $\sqrt{91}$, $\sqrt{103}$ ② $\sqrt{161}$, $\sqrt{145}$ ③ $\sqrt{165}$, $\sqrt{105}$
④ $\sqrt{151}$, $\sqrt{101}$ ⑤ $\sqrt{127}$, $\sqrt{105}$

해설

두 원의 반지름의 길이는 각각 $3, 5$ 이고,
두 원의 중심을 각각 O, O' 이라고 할 때,
$\mathrm{O}\,(0,0)\,, \mathrm{O}'\,(12,5)$ 이므로
중심거리는 $\sqrt{12^2+5^2}=13$ 이다.
(i) 다음 그림과 같이 점 O 에서 $\overline{\mathrm{O'H'}}$ 에 내린 수선의 발을 T 라고 하면

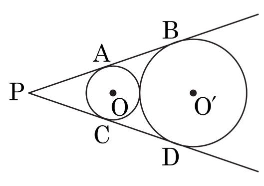


$\overline{\mathrm{TH'}}=\overline{\mathrm{OH}}=3$ 이므로
$\overline{\mathrm{O'T}}=5-3=2$
한편, $\triangle\mathrm{OTO'}$ 은 직각삼각형이므로
피타고라스의 정리에 의하여
$\overline{\mathrm{OT}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OO'}}^2-\overline{\mathrm{O'T}}^2}=\sqrt{13^2-2^2}=\sqrt{165}$
이때, $\overline{\mathrm{HH'}}=\overline{\mathrm{OT}}$ 이므로
구하는 공통외접선의 길이는 $\sqrt{165}$
(ii) 다음 그림과 같이 점 O 에서 $\overline{\mathrm{O'H'}}$ 의 연장선에 내린 수선의 발을 T 라고 하면



$\overline{\mathrm{TH'}}=\overline{\mathrm{OH}}=3$ 이므로 $\overline{\mathrm{O'T}}=5+3=8$
한편, $\triangle\mathrm{OTO'}$ 은 직각삼각형이므로 피타고라스의 정리에 의하여
$\overline{\mathrm{OT}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OO'}}^2-\overline{\mathrm{O'T}}^2}=\sqrt{13^2-8^2}=\sqrt{105}$
이 때, $\overline{\mathrm{HH'}}=\overline{\mathrm{OT}}$ 이므로 구하는 공통내접선의 길이는 $\sqrt{105}$

15. 다음 그림과 같이 외접하는 두 원 O, O′ 의 공통외접선의 교점을 P , 접점을 A, B, C, D 라고 하자. $\overline{\mathrm{PA}} = \overline{\mathrm{AB}} = 4\,\mathrm{cm}$ 일 때, 원 O 의 넓이를 구하면?



① $\pi\,\mathrm{cm}^2$　② $2\pi\,\mathrm{cm}^2$　③ $3\pi\,\mathrm{cm}^2$

④ $4\pi\,\mathrm{cm}^2$　⑤ $5\pi\,\mathrm{cm}^2$

해설

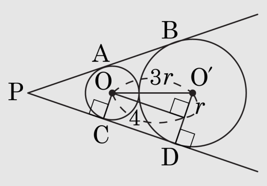
$\triangle\mathrm{POA}$ 와 $\triangle\mathrm{PO'B}$ 는 닮음이고 닮음비는 1 : 2 이다.

$\therefore$ $\overline{\mathrm{OA}} = r$ 이라 하면, $\overline{\mathrm{O'B}} = 2r$

다음 그림에서 $4^2 + r^2 = 9r^2$

$\Rightarrow$ $r = \sqrt{2}$

$\therefore$ 원 O 의 넓이는 $\pi \times (\sqrt{2})^2 = 2\pi$

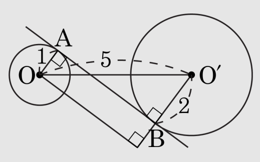


16. 반지름의 길이가 각각 1, 2인 두 원 O, O′의 중심거리가 5일 때, 두 원의 공통내접선의 길이는?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

주어진 두 원의 그래프를 다음 그림과 같이 나타내면 $\overline{AB}$가 공통내접선이 된다.



점 O에서 선분 O′B의 연장선 위에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AO} = \overline{BH} = 1$

$\therefore \overline{O'H} = 1 + 2 = 3$

이때, 두 원의 중심거리가 5이므로

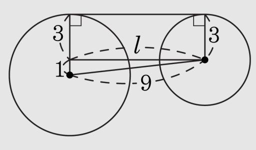
$\triangle OHO'$에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{AB} = \overline{OH} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

17. 두 원 $x^2 + y^2 = 16$, $(x-9)^2 + y^2 = 9$ 의 공통외접선의 길이를 l 이라 하고 공통내접선의 길이를 m 이라 할 때, $l^2 - m^2$ 의 값은?

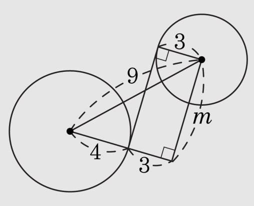
① 48　② -48　③ 32　④ -32　⑤ 30

해설



중심이 (0, 0) (9, 0) 이므로
중심간의 거리는 9이다.

$\therefore\ l^2 = 9^2 - 1^2$



$\therefore\ m^2 = 9^2 - 7^2$

$\therefore\ l^2 - m^2 = (9^2 - 1^2) - (9^2 - 7^2)$
$= -1^2 + 7^2 = 48$

18. 두 원 $(x-a)^2+(y-1)^2=1$, $(x-2)^2+(y-a)^2=4$이 직교할 때 a의 값의 합은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

두 원의 중심이 각각 $(a,\ 1)$, $(2,\ a)$이므로
두 원의 중심 사이의 거리는 $\sqrt{(a-2)^2+(1-a)^2}$이다.
두 원의 반지름은 각각 1, 2이므로
직교하기 위한 조건은
$(a-2)^2+(1-a)^2=1^2+2^2$
$\therefore\ a^2-3a=0$
근과 계수와의 관계로부터 두 근의 합은 3