1. 점 $(1,2)$ 를 중심으로 하고 점$(3,-2)$ 를 지나는 원의 방정식은?

① $(x-1)^2+(y+2)^2=4$　② $(x+1)^2+(y-2)^2=32$

③ $(x-1)^2+(y-2)^2=20$　④ $(x+1)^2+(y+2)^2=12$

⑤ $(x-1)^2+(y-2)^2=16$

해설

원의 반지름을 r 이라 하면
$(x-1)^2+(y-2)^2=r^2$ 이 $(3,-2)$ 를 지나므로
$(3-1)^2+(-2-2)^2=r^2$　$\therefore\ r^2=20$
$\therefore (x-1)^2+(y-2)^2=20$

2. A(2, 0), B(0, 2)에서의 거리의 제곱의 합이 12인 점 P(x, y)의 자취를 나타내는 식은?

① $x^2+y^2+2x+2y=2$ ② $x^2+y^2+2x-2y=2$

③ $x^2+y^2-2x+2y=2$ ④ $x^2+y^2-2x-2y=2$

⑤ $x^2+y^2+x-y=2$

해설

$(\overline{PA})^2=(x-2)^2+y^2$
$(\overline{PB})^2=x^2+(y-2)^2$
$\therefore\ (x-2)^2+y^2+x^2+(y-2)^2=12$
$\therefore\ x^2+y^2-2x-2y=2$

3. 원 $x^2+y^2-2kx+ky+3k=0$ 의 중심이 $(4,-2)$ 일 때, 이 원의 반지름의 길이는?

① $\sqrt{6}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

원의 반지름의 길이를 r 라 하면 중심이 $(4,-2)$ 이므로
$(x-4)^2+(y+2)^2=r^2$
$x^2+y^2-8x+4y+20-r^2=0 \quad \cdots$㉠
이때, 원 ㉠과 원 $x^2+y^2-2kx+ky+3k=0$ 이 같으므로
$-2k=-8, \quad k=4$
$3k=20-r^2$
$\therefore k=4, \ r=2\sqrt{2} \ (\because r>0)$
따라서, 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$

4. 임의의 실수 a에 대하여 원 $x^2+y^2+ax+(a+2)y-(2a+4)=0$ 은 두 정점 A, B 를 지난다. 이 때 선분 AB 의 중점의 좌표를 구하면?

① $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$ ② $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$ ③ $\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$
④ $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$ ⑤ $\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

해설

$x^2+y^2+ax+(a+2)y-(2a+4)=0$
$\Rightarrow x^2+y^2+2y-4+a(x+y-2)=0$
$\Rightarrow x^2+y^2+2y-4=0 \cdots\cdots ①$
이고 $x+y-2=0 \cdots\cdots ②$
② 에서 $y=-x+2$ 를 ① 에 대입하면
$x^2+(-x+2)^2+2(-x+2)-4=0$ 이를 정리하면
$2x^2-6x+4=0,\ x^2-3x+2=0$
$\therefore x=2,\ y=0\ ,\ x=1,\ y=1$
$\therefore$ A$(2,\ 0)$, B$(1,\ 1)$
$\therefore$ A, B 의 중점의 좌표 $=\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$

5. 두 점 A(−3, 4), B(1, −2) 를 지름의 양끝으로 하는 원의 방정식을 구하면?

① $(x+1)^2+(y-1)^2=13$ ② $(x-1)^2+(y+1)^2=13$

③ $(x-1)^2+(y+1)^2=10$ ④ $(x+1)^2+(y-1)^2=10$

⑤ $(x+1)^2+(y-1)^2=9$

해설

A(−3, 4), B(1, −2)가 지름의 양 끝점이므로
$\overline{AB}$ 의 중점이 원의 중심 O(−1, 1) 이고,

$\frac{1}{2}\overline{AB}=\overline{OA}=\overline{OB}=r$

반지름 $r=\overline{OA}=\sqrt{(-3+1)^2+(4-1)^2}$

$=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$

∴ 원의 방정식은 $(x+1)^2+(y-1)^2=13$

6. 두 점 A $(-3,\ 8)$, B $(7,\ -4)$ 를 지름의 양 끝으로 하는 원의 방정식을 구하면?

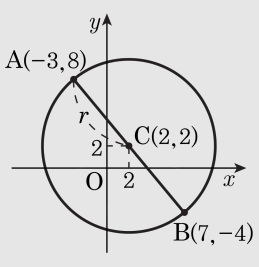
① $(x-1)^2+(y-1)^2=18$ ② $(x-2)^2+(y-2)^2=32$

③ $(x-1)^2+(y-1)^2=7$ ④ $(x-3)^2+(y-3)^2=22$

⑤ $(x-2)^2+(y-2)^2=61$

해설

구하는 원의 중심을 C 라고 하면



C 는 $\overline{AB}$ 의 중점이므로

$C\left(\frac{-3+7}{2},\ \frac{8-4}{2}\right)$

$\therefore C(2,2)$

반지름의 길이를 r 라고 하면

r 는 $\overline{AB}$ 의 길이의 $\frac{1}{2}$ 이므로

$r=\frac{1}{2}\overline{AB}=\overline{AC}=\sqrt{(2+3)^2+(2-8)^2}=\sqrt{61}$

따라서, 구하는 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y-2)^2=61$

7. 세 점 $\mathrm{P}(-1,4), \mathrm{Q}(3,6), \mathrm{R}(0,-3)$ 을 꼭짓점으로 하는 $\triangle \mathrm{PQR}$ 의 외접원의 방정식은?

① $x^2+y^2-x-2y-3=0$

② $x^2+y^2+2x-1y-10=0$

③ $x^2+y^2-4x-5y-8=0$

④ $x^2+y^2-6x-2y-15=0$

⑤ $x^2+y^2-6x-5y-20=0$

해설

구하는 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$
으로 놓으면 이 원이
세 점 $\mathrm{P}(-1,4), \mathrm{Q}(3,6), \mathrm{R}(0,-3)$ 을
지나므로 차례로 대입하면

$1+16-A+4B+C=0 \quad \cdots$ ㉠

$9+36+3A+6B+C=0 \quad \cdots$ ㉡

$9-3B+C=0 \quad \cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$A=-6, B=-2, C=-15$

따라서, 구하는 원의 방정식은

$x^2+y^2-6x-2y-15=0$

8. 세 점 A(2, 1), B(−4, 3), C(−1, −3) 을 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC 의 외심의 좌표를 $(a,\ b)$ 라고 할 때, $a+b$ 를 구하면?

① −2 ② 3 ③ 4 ④ −1 ⑤ −3

해설

외심은 외접원의 중심이므로 외심을 O 라하면
$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$ 이다.
$\sqrt{(a-2)^2+(b-1)^2}=\sqrt{(a+4)^2+(b-3)^3}$
$\Rightarrow\ 3a-b=-5\ \cdots$㉠
$\sqrt{(a-2)^2+(b-1)^2}=\sqrt{(a+1)^2+(b+3)^3}$
$\Rightarrow\ 6a+8b=-5\ \cdots$㉡
㉠, ㉡ 를 연립하면,
$a=-\frac{3}{2},\ b=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ a+b=-1$

9. 중심이 직선 $y = x + 3$ 위에 있고 점 $(6,\ 2)$를 지나며, x 축에 접하는 원의 반지름 중 가장 작은 것은?

① 2 ② 5 ③ 7 ④ 14 ⑤ 17

해설

원의 중심을 $(a,\ a+3)$ 으로 놓으면 원의 방정식은
$(x-a)^2 + (y-a-3)^2 = (a+3)^2$
이 원이 $(6,\ 2)$를 지나므로
$(6-a)^2 + (a+1)^2 = (a+3)^2$ 에서
$(a-2)(a-14) = 0$
$\therefore a = 2,\ 14$
원의 반지름중 작은 것은 $a + 3 = 2 + 3 = 5$

10. 중심이 직선 $y = x+1$ 위에 있고 두 점 $(1,\ 6),\ (-3,\ 2)$를 지나는 원의 중심의 좌표를 $(a,\ b)$ 라고 할 때, $a+b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

중심이 $y = x+1$ 위에 있고,
중심의 좌표가 $(a,\ b)$ 이므로 $b = a+1$
따라서 $(a,\ a+1)$ 이라 할수 있다.
중심과 $(1,\ 6),\ (-3,\ 2)$ 간의 거리가 반지름으로 같으므로
$\sqrt{(a-1)^2+(a+1-6)^2}$
$= \sqrt{(a+3)^2+(a+1-2)^2}$
양변을 제곱하여 정리하면
$(a-5)^2 = (a+3)^2$
$16a = 16$
$\therefore\ a = 1$
$\therefore\ (a,\ b) = (1,\ 2)$
따라서 $a+b = 1+2 = 3$

11. 방정식 $x^2 + y^2 - 2x + 2y + k = 0$ 이 원을 나타내도록 k 값의 범위를 정하면?

① $k < -2$ ② $k < -1$ ③ $k > -2$

④ $k < 2$ ⑤ $k > 1$

해설

방정식을 정리하면, $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2 - k$

원이 되려면 $2 - k > 0$ 을 만족해야 한다.

$\therefore \quad k < 2$

12. x, y에 대한 이차방정식 $2x^2+py^2+qxy-6x+8y+2r=0$ 의 그래프가 원이 되도록 상수 p, q, r 의 값 또는 그 범위를 구하면?

① $p>1,\ q=0,\ r<6$
② $p=\frac{7}{9},\ q<0,\ r<\frac{2}{3}$
③ $p<9,\ q=0,\ r<\frac{19}{5}$
④ $p=2,\ q=0,\ r<\frac{25}{4}$
⑤ $p>1,\ q<\frac{8}{11},\ r<\frac{7}{2}$

해설

주어진 방정식의 그래프가 원이 되려면
x^2 과 y^2 의 계수가 같고 xy 의 항이 없어야 하므로
$p=2,\ q=0$
따라서, 주어진 방정식은
$2x^2+2y^2-6x+8y+2r=0$
이 때, 양변을 2 로 나누면
$x^2+y^2-3x+4y+r=0$
이 식을 변형하면

$$\left\{x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}+\left(y^2+4y+4\right)$$

$$=-r+\left(\frac{3}{2}\right)^2+4$$

$$\therefore \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y+2)^2=-r+\frac{25}{4}$$

이것이 원의 방정식이 되어야 하므로

$$-r+\frac{25}{4}>0$$

$$\therefore r<\frac{25}{4}$$

13. a를 임의의 실수라 하고, 원 $x^2+y^2+2ax-2ay+8a-15=0$의 넓이가 최소가 될 때, 원점에서 이 원의 중심까지의 거리는?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

해설

원의 넓이가 최소가 되려면 반지름이 최소가 되어야 한다.

$(x+a)^2+(y-a)^2=2a^2-8a+15$

$=2(a-2)^2+7$

$=$ (반지름)^2

따라서 $a=2$ 일 때, 반지름은 최소이고

원의 중심은 $(-a,\ a)=(-2,\ 2)$

$\therefore$ (원점에서 중심까지의 거리)

$=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$

14. $x^2+y^2+2ax-4ay+4a^2+2a-4=0$이 나타내는 자취의 최소 면적은?

① 2π ② 3π ③ 4π ④ 5π ⑤ 6π

해설

준식 $= x^2+2ax+y^2-4ay+4a^2+2a-4=0$

$\rightarrow (x+a)^2+(y-2a)^2=a^2-2a+4$

그러므로 준식은 중심 $(-a,\ 2a)$ 이고

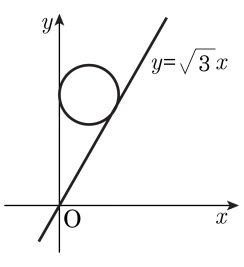
반지름이 $\sqrt{a^2-2a+4}$ 이다.

$\therefore$ 면적 $S=\pi(\sqrt{a^2-2a+4})^2$

$=\pi(a^2-2a+4)=\pi(a-1)^2+3\pi$

$\therefore\ a=1$ 일 때 최소 면적 : 3π

15. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에서 중심이 1 사분면 위에 있고, 반지름의 길이가 1 인 원이 y 축과 직선 $y = \sqrt{3}x$ 에 동시에 접한다. 이 원의 중심의 좌표를 $(a,\ b)$ 라고 할 때, $a+b$ 의 값은?



① 2 ② $2+\sqrt{2}$

③ $3+\sqrt{3}$ ④ 5

⑤ $5+\sqrt{5}$

해설

y 축에 접하고 반지름이 1 이므로
주어진 원의 방정식은
$(x-1)^2+(y-b)^2=1$ 이라 하면
$y=\sqrt{3}x$ 가 이원에 접하므로
$(x-1)^2+(\sqrt{3}x-b)^2=1$
$x^2-2x+1+3x^2-2\sqrt{3}bx+b^2=1$
$4x^2-2(1+\sqrt{3}b)x+b^2=0$
이 방정식이 중근을 가지므로
$(1+\sqrt{3}b)^2-4b^2=0$
$3b^2+2\sqrt{3}b+1-4b^2=0,\ b^2-2\sqrt{3}b-1=0$
$\therefore b=\sqrt{3}\pm\sqrt{3+1}=\sqrt{3}\pm 2$
그런데 $b>0$ 이므로 $b=\sqrt{3}+2$
$\therefore a=1,\ b=2+\sqrt{3}$ 이므로 $a+b=3+\sqrt{3}$

16. 좌표평면에서 중심이 (a, b) 이고 x 축에 접하는 원이 두 점 A(0, 5) 와 B(8, 1) 을 지난다. 이 때, 원의 중심 (a, b) 와 직선 AB 사이의 거리는? (단, $0 \le a \le 8$)

① $\sqrt{3}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{6}$ ④ $\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

해설

주어진 원이 x 축에 접하므로 그 방정식은

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = b^2$

$\therefore\ x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 = 0$

이 원이 두 점 A(0, 5), B(8, 1) 을 지나므로

$a^2 - 10b + 25 = 0,\ a^2 - 16a - 2b + 65 = 0$

두 식을 연립하면

$4a^2 - 80a + 300 = 0,\ 4(a-5)(a-15) = 0$

그런데

$0 \le a \le 8$ 이므로 $a = 5,\ b = 5$ 이다.

이 때, 직선 AB 의 방정식은

$$y - 5 = \frac{1-5}{8-0}(x-0)$$

$\therefore\ x + 2y - 10 = 0$

따라서 원의 중심 (5, 5) 와 직선 AB 사이의 거리 d 는

$$d = \frac{|5 + 2\cdot 5 - 10|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \sqrt{5}$$

17. 점 $(-4,\ 2)$ 를 지나고 x 축, y 축에 모두 접하는 원은 2 개가 있다. 이 때, 두 원 중 큰 원의 넓이는?

① 25π ② 50π ③ 75π ④ 100π ⑤ 125π

해설

제 2 사분면의 점$(-4, 2)$ 를 지나고
x 축, y 축에 접하는 원의 방정식은
$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2(r>0)$
$(-4+r)^2+(2-r)^2=r^2$
$16-8r+r^2+4-4r+r^2=r^2,\ (r-2)(r-10)=0$
$\therefore\ r=2$ 또는 $r=10$
따라서 큰 원의 반지름의 길이가 10 이므로
넓이는 $\pi\cdot 10^2=100\pi$

18. 원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ 이 x 축과 y 축에 동시에 접할 때, $c=ka^2$ 이 성립한다. 이 때, 상수 k 의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

해설

$x^2+y^2+ax+by+c=0$ 을 표준형으로 나타내면

$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2-4c}{4}$

따라서, 중심이 $\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)$ 이고

반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$ 이므로

이 원이 x 축과 y 축에 동시에 접하기 위해서는

$\left|-\frac{a}{2}\right|=\left|-\frac{b}{2}\right|=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$ 이어야 한다.

(i) $\left|-\frac{a}{2}\right|=\left|-\frac{b}{2}\right|$ 에서 $|a|=|b|$

$\therefore a^2=b^2 \cdots\cdots$ ㉠

(ii) $\left|-\frac{a}{2}\right|=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$ 의 양변을 제곱하면 $\frac{a^2}{4}=\frac{a^2+b^2-4c}{4}$

$\therefore b^2=4c \cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $a^2=4c$

$\therefore c=\frac{1}{4}a^2$

$\therefore k=\frac{1}{4}$

19. 두 점 $\mathrm{A}(3,0)$, $\mathrm{B}(-2,0)$ 에서의 거리의 비가 $2:3$ 인 점 P 의 자취의 넓이는?

① 9π ② 16π ③ 25π ④ 36π ⑤ 49π

해설

점 P 의 좌표를 $\mathrm{P}(x,y)$ 라 하면
$\overline{\mathrm{PA}} : \overline{\mathrm{PB}} = 2:3$
즉 $4\overline{\mathrm{PB}}^2 = 9\overline{\mathrm{PA}}^2$ 이므로
$4\left\{(x+2)^2+y^2\right\} = 9\left\{(x-3)^2+y^2\right\}$
$x^2+y^2-14x+13=0$
$\therefore (x-7)^2+y^2=36$
따라서 점 P 는 중심이 $(7,\ 0)$ 이고,
반지름의 길이가 6 인 원 위를 움직이므로
구하는 자취의 넓이는 $\pi\cdot 6^2 = 36\pi$

20. 좌표평면 위의 두 점 A(−1, 0), B(1, 0) 으로부터의 거리의 비가 2 : 1 이 되도록 움직이는 점 P 가 있다. 이때, △PAB 의 넓이가 자연수가 되는 점의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

점 P 의 좌표를 $P(x, y)$ 라 하면

$\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$ 이므로

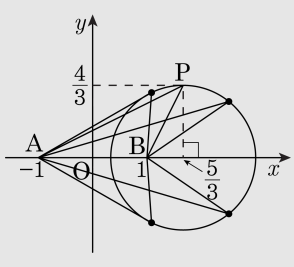
$\overline{AP} = 2\overline{BP}$

$\therefore \overline{AP}^2 = 4\overline{BP}^2$

$(x+1)^2 + y^2 = 4\{(x-1)^2 + y^2\}$

$3x^2 + 3y^2 - 10x + 3 = 0$

$\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16}{9}$



이때, △PAB 의 넓이는 밑변 AB 가 고정되어 있으므로 높이에 따라 변하게 된다.

즉, 높이가 반지름의 길이와 같을 때, 넓이가 최대이며 △PAB 의 넓이의 최댓값은 $\frac{4}{3}$ 이므로,

넓이가 자연수 1 이 되는 점은 4 개다.

21. 점 A(7, 7)과 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=4$ 위의 점을 이은 선분의 중점의 자취의 방정식은?

① $x^2+y^2=4$ ② $(x-4)^2+(y-4)^2=1$

③ $(x+4)^2+(y-4)^2=1$ ④ $(x+4)^2+(y+4)^2=1$

⑤ $(x-4)^2+(y+4)^2=1$

해설

$(x-1)^2+(y-1)^2=4$ 위의 점을 $P(a,b)$라 하면
$A(7,7), P(a,b)$의 중점의 좌표 $M(x,y)$는
$M\left(\frac{a+7}{2}, \frac{b+7}{2}\right)$ 이다.

$\therefore\ x=\frac{a+7}{2},\ \ y=\frac{b+7}{2}$

$\therefore\ \ a=2x-7,\ b=2y-7$

이 때, 점 P는 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=4$
위의 점이므로 $(a-1)^2+(b-1)^2=4$ 가 성립한다.

$(2x-8)^2+(2y-8)^2=4$

$\therefore (x-4)^2+(y-4)^2=1$

22. 두 점 A$(-5,\ -2)$, B$(2,\ 5)$ 에 대하여 원 $x^2+y^2=9$ 위를 움직이는 점을 P 라고 할 때, $\triangle$ABP 의 무게중심 G 가 나타내는 도형의 자취의 길이는?

① π ② 2π ③ 3π ④ 4π ⑤ 5π

해설

A$(-5,\ -2)$ B$(2,\ 5)$ P$(x,\ y)$

G $\left(\dfrac{x-3}{3},\ \dfrac{y+3}{3}\right)$

$X=\dfrac{x-3}{3},\ Y=\dfrac{y+3}{3}$

$x=3X+3,\ y=3Y-3$

$(x,\ y)$ 가 $x^2+y^2=9$ 위를 움직이므로,

$(3X+3)^2+(3Y-3)^2=9$

$(X+1)^2+(Y-1)^2=1$

따라서 G$(X,\ Y)$ 는 반지름이 1 인 원

$\rightarrow\ 2\pi\cdot 1=2\pi$