1. 방정식 $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ 이 나타내는 도형의 중심의 좌표를 $\mathrm{C}(a, b)$, 반지름의 길이를 r 라 할때 $a+b+r$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2+y^2-2x+4y+1=0$
$(x-1)^2+(y+2)^2=-1+1+4$
$(x-1)^2+(y+2)^2=2^2$ 이므로
$\therefore \mathrm{C}(1, -2),\ r=2 \quad \therefore a+b+r=1$

2. 세 점 P(1, 0), Q(0, -1), R(2, 2)을 지나는 원의 방정식은 $x^2+y^2+ax+by+c=0$이다. 이때, $a+c$의 값은?

① -1　② -2　③ -3　④ 2　⑤ 3

해설

P, Q, R의 좌표를 원의 방정식에 각각 대입하면

$$\begin{cases} 1+a+c=0 & \cdots ㉠ \\ 1-b+c=0 & \cdots ㉡ \\ 2a+2b+c+8=0 & \cdots ㉢ \end{cases}$$

$\therefore$ ㉠에서 $a+c=-1$

3. 중심이 $y = x - 1$ 위에 있고 두 점 $(0,\ 3)$, $(4,\ 3)$ 을 지나는 원의 반지름의길이는?

① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $\sqrt{7}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

해설

중심을 $(a,\ a-1)$, 반지름을 r이라 하면,
구하는 원의 방정식은
$(x-a)^2 + (y-a+1)^2 = r^2$ ······㉠
ⅰ) ㉠ 이 $(0,\ 3)$ 을 지나므로
$a^2 + (4-a)^2 = r^2$
$\Rightarrow\ 2a^2 - 8a + 16 = r^2$ ······㉡
ⅱ) ㉠이 $(4,\ 3)$ 을 지나므로
$(4-a)^2 + (4-a)^2 = r^2$
$\Rightarrow\ 2a^2 - 16a + 32 = r^2$ ······㉢
㉡ − ㉢ : $8a - 16 = 0$
$\therefore\ a = 2$
$\therefore$ ㉡에서 $r^2 = 8 - 16 + 16 = 8$
$\therefore\ r = 2\sqrt{2}\quad (\because\ r > 0)$

4. 방정식 $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$ 으로 나타내어지는 원이 y 축에 접할 조건은?

① $b^2=c$　② $c^2=b$　③ $a^2=c$
④ $c^2=a$　⑤ $b=2c$

해설
y 축과의 공유점을 구하는 식은
$x=0$ 으로부터 $y^2+2by+c=0$
y 축에 접할 조건은 $D/4=b^2-c=0$

5. 다음은 원 $x^2+y^2=1$ 과 직선 $y=2x+k$ 가 서로 만나지 않을 때, k 의 값의 범위를 구하는 과정이다. (가), (나), (다)에 들어갈 알맞은 것을 고르면?

$x^2+y^2=1\cdots$㉠ $y=2x+k\cdots$㉡ ㉡을 ㉠에 대입하여 식을 정리하면 $5x^2+4kx+k^2-1=0\cdots$㉢ ㉠과 ㉡이 서로 만나지 않으려면 $D=(4k)^2-4\cdot5\cdot(k^2-1)$ (가)0 k^2(나)5 $\quad\therefore$ (다)

① (가):> , (나):< , (다):$-\sqrt{5}<k<\sqrt{5}$

② (가):= , (나):= , (다):$k=\pm\sqrt{5}$

③ (가):> , (나):< , (다):$-\sqrt{5}<k<\sqrt{5}$

④ (가):> , (나):> , (다):$k>\sqrt{5}$ 또는 $k<-\sqrt{5}$

⑤ (가):< , (나):> , (다):$k>\sqrt{5}$ 또는 $k<-\sqrt{5}$

해설

(가): 원과 직선이 만나지 않으면 판별식이 0보다 작다.
(나): 판별식을 정리하면, $k^2>5$
(다): $k^2-5>0 \quad\Rightarrow\quad k>\sqrt{5}$ 또는 $k<-\sqrt{5}$

6. 원 $x^2 + y^2 = 5$ 위의 점 $(1,\ 2)$ 에서의 접선의 방정식은?

① $x + y = 3$ ② $2x - y = 0$ ③ $x - 2y = -3$
④ $2x + y = 4$ ⑤ $x + 2y = 5$

해설
원 $x^2 + y^2 = 5$ 위의 점 $(1,\ 2)$ 에서의 접선의 방정식은
$1 \cdot x + 2 \cdot y = 5$
$\therefore\ x + 2y = 5$

7. 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 5)$, $B(-3,\ -1)$을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식은?

① $(x+1)^2+(y+2)^2=13$　② $(x-1)^2+(y-2)^2=52$
③ $(x-1)^2+(y+2)^2=13$　④ $(x+1)^2+(y-2)^2=13$
⑤ $(x+1)^2+(y-2)^2=52$

해설

원의 중심은 두 점 $A,\ B$ 의 중점이므로,
$\left(\frac{1-3}{2},\ \frac{5-1}{2}\right)=(-1,\ 2)$ 이다.
또, 원의 반지름의 길이는
$\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\sqrt{(-3-1)^2+(-1-5)^2}=\sqrt{13}$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x+1)^2+(y-2)^2=13$

8. $x^2+y^2+x-y+k=0$ 의 그래프가 원을 나타내도록 하는 상수 k 의 값의 범위는?

① $k \le \frac{1}{2}$ ② $k < \frac{1}{2}$ ③ $k > \frac{1}{2}$ ④ $k \ge \frac{1}{2}$ ⑤ $k < \frac{1}{3}$

해설

주어진 방정식을 정리하면,

$\Rightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}-k$

$\therefore$ 원이 되려면, $\frac{1}{2}-k>0 \rightarrow k<\frac{1}{2}$

9. 점 $(2,\ 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 반지름의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

원이 점 $(2,\ 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 접하면
제 1 사분면에 위치하므로 반지름이 r 이면
중심이 $(r,\ r)$ 이다.
$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$ 이고
또한 $(2,\ 1)$ 을 지나므로
$(2-r)^2+(1-r)^2=r^2$,
$(r-1)(r-5)=0$
$\therefore\ r=1$ 또는 5
$\therefore\ (x-1)^2+(y-1)^2=1$ 또는 $(x-5)^2+(y-5)^2=5^2$
$\therefore 1+5=6$

10. 점(2, 1) 을 중심으로 하고, 직선 $x+y-5=0$ 에 접하는 원의 반지름은?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 4 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

원의 반지름 r 은 점 (2, 1) 에서
직선 $x+y-5=0$ 까지의 거리이므로
$r=\frac{|2+1-5|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

11. 다음 원 $x^2+y^2=9$와 직선 $y=x+5$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 0개

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면,

$$\frac{|5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}>3$$

반지름보다 크므로 원과 직선은 만나지 않는다.

12. 점 A$(-2,\ 3)$ 에서 원 $x^2+y^2-2x+4y-4=0$에 그은 접선의 접점을 B라 할 때, AB의 길이를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

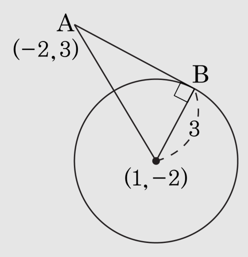
해설

$x^2+y^2-2x+4y-4=0$

$(x-1)^2+(y+2)^2=3^2$

원의 중심은 $(1,\ -2)$, 반지름은 3이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(3^2+(-5)^2)-3^2}=5$



13. $x^2 + y^2 = 9$ 에 접하고 기울기가 2 인 직선의 방정식을 구하면?

① $y = x \pm \sqrt{5}$ ② $y = 2x \pm 3\sqrt{5}$ ③ $y = 4x \pm 2\sqrt{5}$
④ $y = 5x \pm 5\sqrt{5}$ ⑤ $y = x \pm 2\sqrt{5}$

해설
구하는 접선의 방정식은
$y = 2x \pm 3\sqrt{1 + 2^2} \quad \leftarrow \quad m = 2, r = 3$
$\therefore y = 2x \pm 3\sqrt{5}$

14. 원 $x^2+y^2-4ax+2ay+30a-48=0$ 의 넓이가 최소일 때, 이 원의 중심의 좌표가 (p, q) 이다. 이 때 $p+q$ 의 값은?

① -9　　② -6　　③ -3　　④ 3　　⑤ 6

해설

$x^2+y^2-4ax+2ay+30a-48=0$을
표준형으로 고치면
$(x-2a)^2+(y+a)^2=5a^2-30a+48$
이 원의 넓이는
$\pi(5a^2-30a+48)=5\pi(a-3)^2+3\pi$
따라서 $a=3$ 일 때 넓이가 최소.
중심은 $(6,-3)$
$\therefore p=6,\ q=-3$
$\therefore p+q=3$

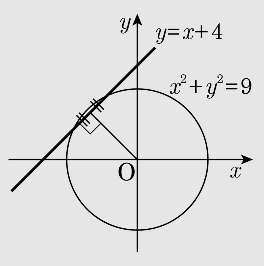
15. 직선 $y = x+4$가 원 $x^2+y^2 = 9$에 의해서 잘린 현의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

원의 중심 원점에서 직선에 이르는 거리는 직선 $x-y+4=0$ 이므로 $\frac{|4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$



원의 중심에서 현에 내린 수선은 현을
수직이등분하므로 피타고라스 정리에서 ,
현의 길이는 $2\sqrt{3^2-(2\sqrt{2})^2} = 2$

16. 직선 $ax+(1-a)y-1=0$ 이 원 $x^2+y^2-x+y-1=0$ 의 넓이를 이등분할 때, 상수 a 의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

해설

직선 $ax+(1-a)y-1=0$ 이 원의 넓이를 이등분하려면 원의 중심을 지나야 한다.

$x^2+y^2-x+y-1=0$ 에서

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{2}$

따라서 원의 중심의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

직선의 방정식에 대입하면

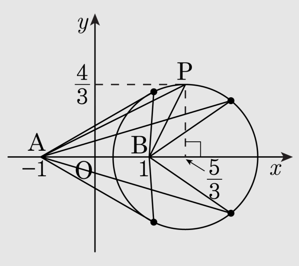
$\frac{1}{2}a+(1-a)\left(-\frac{1}{2}\right)-1=0$

$\therefore a=\frac{3}{2}$

17. 좌표평면 위의 두 점 A$(-1,\ 0)$, B$(1,\ 0)$ 으로부터의 거리의 비가 $2:1$ 이 되도록 움직이는 점 P 가 있다. 이때, $\triangle$PAB 의 넓이가 자연수가 되는 점의 개수는?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설



점 P 의 좌표를 $P(x, y)$ 라 하면

$\overline{AP}\ :\ \overline{BP} = 2\ :\ 1$ 이므로

$\overline{AP} = 2\overline{BP}$

$\therefore \overline{AP}^2 = 4\overline{BP}^2$

$(x+1)^2 + y^2 = 4\left\{(x-1)^2 + y^2\right\}$

$3x^2 + 3y^2 - 10x + 3 = 0$

$\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16}{9}$

이때, $\triangle$PAB 의 넓이는 밑변 AB 가 고정되어 있으므로 높이에 따라 변하게 된다.

즉, 높이가 반지름의 길이와 같을 때, 넓이가 최대이며 $\triangle$PAB 의 넓이의 최댓값은 $\frac{4}{3}$ 이므로,

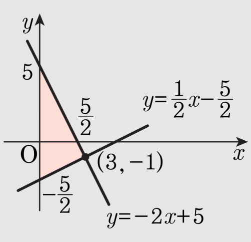
넓이가 자연수 1 이 되는 점은 4 개다.

18. 점 $(3, -1)$ 에서 원 $x^2+y^2=5$ 에 그은 두 접선과 y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 S 라 할 때, $4S$ 의 값은?

① 33　② 35　③ 45　④ 49　⑤ 55

해설

접선의 기울기를 m 이라고 하면 점 $(3, -1)$ 에서
원에 그은 접선의 방정식을 $y+1=m(x-3)$ 이라 하자.
이 때, 원의 중심 $(0, 0)$ 에서 직선 $y+1=m(x-3)$,
즉 $mx-y-3m-1=0$ 에 이르는 거리가
반지름의 길이 $\sqrt{5}$ 와 같으므로



$\frac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$, $|3m+1|=\sqrt{5(m^2+1)}$

양변을 제곱하여 정리하면 $2m^2+3m-2=0$, $(2m-1)(m+2)=0$

$\therefore m=\frac{1}{2}$ 또는 $m=-2$

즉, 구하는 접선의 방정식은

$y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$, $y=-2x+5$

따라서 구하는 삼각형의 넓이 S 는

$S=\frac{1}{2}\times\left\{5-\left(-\frac{5}{2}\right)\right\}\times 3=\frac{45}{4}$

$\therefore 4S=45$