

1. 방정식 $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ 이 나타내는 도형의 중심의 좌표를 $C(a, b)$, 반지름의 길이를 r 라 할때 $a + b + r$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = -1 + 1 + 4$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 2^2 \text{ 이므로}$$

$$\therefore C(1, -2), r = 2 \quad \therefore a + b + r = 1$$

2. 세 점 $P(1, 0)$, $Q(0, -1)$, $R(2, 2)$ 을 지나는 원의 방정식은 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 이다. 이때, $a + c$ 의 값은?

㉠

-1

㉡ -2

㉢ -3

㉣ 2

㉤ 3

해설

P , Q , R 의 좌표를 원의 방정식에 각각 대입하면

$$\begin{cases} 1 + a + c = 0 \cdots \textcircled{㉠} \\ 1 - b + c = 0 \cdots \textcircled{㉡} \\ 2a + 2b + c + 8 = 0 \cdots \textcircled{㉢} \end{cases}$$

$$\therefore \textcircled{㉠} \text{에서 } a + c = -1$$

3. 중심이 $y = x - 1$ 위에 있고 두 점 $(0, 3)$, $(4, 3)$ 을 지나는 원의 반지름의 길이는?

① $\sqrt{5}$

② $\sqrt{6}$

③ $\sqrt{7}$

④ $2\sqrt{2}$

⑤ 3

해설

중심을 $(a, a - 1)$, 반지름을 r 이라 하면,
구하는 원의 방정식은

$$(x - a)^2 + (y - a + 1)^2 = r^2 \dots\dots \textcircled{㉠}$$

i) $\textcircled{㉠}$ 이 $(0, 3)$ 을 지나므로

$$a^2 + (4 - a)^2 = r^2$$

$$\Rightarrow 2a^2 - 8a + 16 = r^2 \dots\dots \textcircled{㉡}$$

ii) $\textcircled{㉠}$ 이 $(4, 3)$ 을 지나므로

$$(4 - a)^2 + (4 - a)^2 = r^2$$

$$\Rightarrow 2a^2 - 16a + 32 = r^2 \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉡} - \textcircled{㉢} : 8a - 16 = 0$$

$$\therefore a = 2$$

$$\therefore \textcircled{㉡} \text{에서 } r^2 = 8 - 16 + 16 = 8$$

$$\therefore r = 2\sqrt{2} \quad (\because r > 0)$$

4. 방정식 $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ 으로 나타내어지는 원이 y 축에 접할 조건은?

① $b^2 = c$

② $c^2 = b$

③ $a^2 = c$

④ $c^2 = a$

⑤ $b = 2c$

해설

y 축과의 공유점을 구하는 식은

$x = 0$ 으로부터 $y^2 + 2by + c = 0$

y 축에 접할 조건은 $D/4 = b^2 - c = 0$

5. 다음은 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 직선 $y = 2x + k$ 가 서로 만나지 않을 때, k 의 값의 범위를 구하는 과정이다. (가), (나), (다)에 들어갈 알맞은 것을 고르면?

$$x^2 + y^2 = 1 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$y = 2x + k \cdots \textcircled{㉡}$$

㉡을 ㉠에 대입하여 식을 정리하면

$$5x^2 + 4kx + k^2 - 1 = 0 \cdots \textcircled{㉢}$$

㉠과 ㉡이 서로 만나지 않으려면

$$D = (4k)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (k^2 - 1)$$

(가) 0

k^2 (나) 5 $\therefore$ (다)

① (가):> , (나):< , (다):- $\sqrt{5} < k < \sqrt{5}$

② (가):= , (나):= , (다): $k = \pm \sqrt{5}$

③ (가):> , (나):< , (다):- $\sqrt{5} < k < \sqrt{5}$

④ (가):> , (나):> , (다): $k > \sqrt{5}$ 또는 $k < -\sqrt{5}$

⑤ (가):< , (나):> , (다): $k > \sqrt{5}$ 또는 $k < -\sqrt{5}$

해설

(가): 원과 직선이 만나지 않으면 판별식이 0보다 작다.

(나): 판별식을 정리하면, $k^2 > 5$

(다): $k^2 - 5 > 0 \Rightarrow k > \sqrt{5}$ 또는 $k < -\sqrt{5}$

6. 원 $x^2 + y^2 = 5$ 위의 점 $(1, 2)$ 에서의 접선의 방정식은?

① $x + y = 3$

② $2x - y = 0$

③ $x - 2y = -3$

④ $2x + y = 4$

⑤ $x + 2y = 5$

해설

원 $x^2 + y^2 = 5$ 위의 점 $(1, 2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$1 \cdot x + 2 \cdot y = 5$$

$$\therefore x + 2y = 5$$

7. 두 점 $A(1, 5)$, $B(-3, -1)$ 을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식은?

① $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 13$

② $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 52$

③ $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 13$

④ $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 13$

⑤ $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 52$

해설

원의 중심은 두 점 A , B 의 중점이므로,

$$\left(\frac{1-3}{2}, \frac{5-1}{2}\right) = (-1, 2) \text{ 이다.}$$

또, 원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}\sqrt{(-3-1)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{13}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 13$$

8. $x^2 + y^2 + x - y + k = 0$ 의 그래프가 원을 나타내도록 하는 상수 k 의 값의 범위는?

- ① $k \leq \frac{1}{2}$ ② $k < \frac{1}{2}$ ③ $k > \frac{1}{2}$ ④ $k \geq \frac{1}{2}$ ⑤ $k < \frac{1}{3}$

해설

주어진 방정식을 정리하면,

$$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - k$$

$$\therefore \text{원이 되려면, } \frac{1}{2} - k > 0 \rightarrow k < \frac{1}{2}$$

9. 점 $(2, 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 반지름의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

원이 점 $(2, 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 접하면
제 1 사분면에 위치하므로 반지름이 r 이면
중심이 (r, r) 이다.

$$(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2 \text{ 이고}$$

또한 $(2, 1)$ 을 지나므로

$$(2-r)^2 + (1-r)^2 = r^2 ,$$

$$(r-1)(r-5) = 0$$

$$\therefore r = 1 \text{ 또는 } 5$$

$$\therefore (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \text{ 또는 } (x-5)^2 + (y-5)^2 = 5^2$$

$$\therefore 1 + 5 = 6$$

10. 점(2, 1) 을 중심으로 하고, 직선 $x + y - 5 = 0$ 에 접하는 원의 반지름은?

① 1

② $\sqrt{2}$

③ $\sqrt{3}$

④ 4

⑤ $\sqrt{5}$

해설

원의 반지름 r 은 점 (2, 1) 에서
직선 $x + y - 5 = 0$ 까지의 거리이므로

$$r = \frac{|2 + 1 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

11. 다음 원 $x^2 + y^2 = 9$ 와 직선 $y = x + 5$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 0 개

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면,

$$\frac{|5|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} > 3$$

반지름보다 크므로 원과 직선은 만나지 않는다.

12. 점 $A(-2, 3)$ 에서 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ 에 그은 접선의 접점을 B 라 할 때, AB 의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

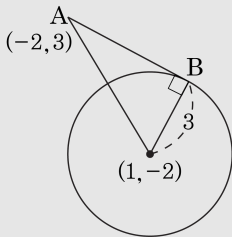
해설

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 3^2$$

원의 중심은 $(1, -2)$, 반지름은 3 이므로

$$\overline{AB} = \sqrt{(3^2 + (-5)^2) - 3^2} = 5$$



13. $x^2 + y^2 = 9$ 에 접하고 기울기가 2 인 직선의 방정식을 구하면?

① $y = x \pm \sqrt{5}$

② $y = 2x \pm 3\sqrt{5}$

③ $y = 4x \pm 2\sqrt{5}$

④ $y = 5x \pm 5\sqrt{5}$

⑤ $y = x \pm 2\sqrt{5}$

해설

구하는 접선의 방정식은

$$y = 2x \pm 3\sqrt{1+2^2} \leftarrow m=2, r=3$$

$$\therefore y = 2x \pm 3\sqrt{5}$$

14. 원 $x^2 + y^2 - 4ax + 2ay + 30a - 48 = 0$ 의 넓이가 최소일 때, 이 원의 중심의 좌표가 (p, q) 이다. 이 때 $p + q$ 의 값은?

① -9

② -6

③ -3

④ 3

⑤ 6

해설

$$x^2 + y^2 - 4ax + 2ay + 30a - 48 = 0 \text{ 을}$$

표준형으로 고치면

$$(x - 2a)^2 + (y + a)^2 = 5a^2 - 30a + 48$$

이 원의 넓이는

$$\pi(5a^2 - 30a + 48) = 5\pi(a - 3)^2 + 3\pi$$

따라서 $a = 3$ 일 때 넓이가 최소.

중심은 $(6, -3)$

$$\therefore p = 6, q = -3$$

$$\therefore p + q = 3$$

15. 직선 $y = x + 4$ 가 원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 의해서 잘린 현의 길이를 구하여라.

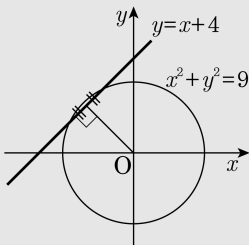
▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

원의 중심 원점에서 직선에 이르는 거리는 직선 $x - y + 4 = 0$

$$\text{이므로 } \frac{|4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$



원의 중심에서 현에 내린 수선은 현을
수직이등분하므로 피타고라스 정리에서,

$$\text{현의 길이는 } 2\sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2$$

16. 직선 $ax + (1-a)y - 1 = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 - x + y - 1 = 0$ 의 넓이를 이등분할 때, 상수 a 의 값은?

① $\frac{1}{2}$

② $\frac{3}{2}$

③ $\frac{5}{2}$

④ $\frac{7}{2}$

⑤ $\frac{9}{2}$

해설

직선 $ax + (1-a)y - 1 = 0$ 이 원의 넓이를 이등분하려면 원의 중심을 지나야 한다.

$x^2 + y^2 - x + y - 1 = 0$ 에서

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}$$

따라서 원의 중심의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

직선의 방정식에 대입하면

$$\frac{1}{2}a + (1-a)\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = 0$$

$$\therefore a = \frac{3}{2}$$

17. 좌표평면 위의 두 점 A(-1, 0), B(1, 0) 으로부터의 거리의 비가 2 : 1 이 되도록 움직이는 점 P 가 있다. 이때, $\triangle PAB$ 의 넓이가 자연수가 되는 점의 개수는?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

점 P 의 좌표를 $P(x, y)$ 라 하면

$\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$ 이므로

$$\overline{AP} = 2\overline{BP}$$

$$\therefore \overline{AP}^2 = 4\overline{BP}^2$$

$$(x+1)^2 + y^2 = 4\{(x-1)^2 + y^2\}$$

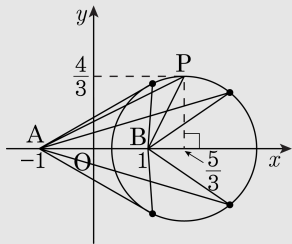
$$3x^2 + 3y^2 - 10x + 3 = 0$$

$$\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16}{9}$$

이때, $\triangle PAB$ 의 넓이는 밑변 AB 가 고정되어 있으므로 높이에 따라 변하게 된다.

즉, 높이가 반지름의 길이와 같을 때, 넓이가 최대이며 $\triangle PAB$ 의 넓이의 최댓값은 $\frac{4}{3}$ 이므로,

넓이가 자연수 1 이 되는 점은 4 개다.



18. 점 $(3, -1)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 5$ 에 그은 두 접선과 y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 S 라 할 때, $4S$ 의 값은?

① 33

② 35

③ 45

④ 49

⑤ 55

해설

접선의 기울기를 m 이라고 하면 점 $(3, -1)$ 에서

원에 그은 접선의 방정식을 $y + 1 = m(x - 3)$ 이라 하자.

이 때, 원의 중심 $(0, 0)$ 에서 직선 $y + 1 = m(x - 3)$,

즉 $mx - y - 3m - 1 = 0$ 에 이르는 거리가
반지름의 길이 $\sqrt{5}$ 와 같으므로

$$\frac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = \sqrt{5}, |3m+1| = \sqrt{5(m^2+1)}$$

양변을 제곱하여 정리하면 $2m^2 + 3m - 2 = 0$, $(2m-1)(m+2) = 0$

$$\therefore m = \frac{1}{2} \text{ 또는 } m = -2$$

즉, 구하는 접선의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}, y = -2x + 5$$

따라서 구하는 삼각형의 넓이 S 는

$$S = \frac{1}{2} \times \left\{ 5 - \left(-\frac{5}{2} \right) \right\} \times 3 = \frac{45}{4}$$

$$\therefore 4S = 45$$

