1. 이차부등식 $x^2 - 2x - 8 < 0$의 해가 $a < x < b$일 때, $b - a$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$x^2 - 2x - 8 < 0$ 에서 $(x-4)(x+2) < 0$

$\therefore -2 < x < 4$

$b - a = 6$

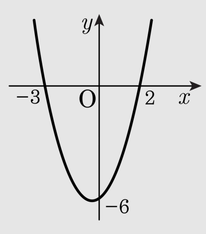
2. 이차함수의 그래프를 이용하여 이차부등식 $x^2 + x - 6 > 0$을 풀면?

① $x < -3$ 또는 $x > 2$　　② $x < -2$ 또는 $x > 3$

③ $x < -1$ 또는 $x > 4$　　④ $x < 0$ 또는 $x > 5$

⑤ $x < 1$ 또는 $x > 6$

해설



이차방정식 $x^2 + x - 6 = 0$ 에서 $(x+3)(x-2) = 0$

$\therefore x = -3$ 또는 $x = 2$

$f(x) = x^2 + x - 6$ 으로 놓으면 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

이차부등식 $f(x) > 0$의 해는 $x < -3$ 또는 $x > 2$

3. 부등식 $|x-2|<k$를 만족하는 모든 x의 값이 부등식 $|x^2-8|\le 8$을 만족할 때, 실수 k의 최댓값은? (단, $k>0$)

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

부등식 $|x^2-8|\le 8$을 풀면
$-8\le x^2-8\le 8$
$0\le x^2\le 16$
$\therefore -4\le x\le 4$
$k>0$이므로 부등식 $|x-2|<k$을 풀면
$-k<x-2<k$
$-k+2<x<k+2$
이때, 이 부등식의 모든 해가 $|x^2-8|\le 8$을 만족하려면
$-k+2\ge -4,\ k+2\le 4$이어야 하므로
$k\le 6,\ k\le 2$
$\therefore 0<k\le 2$
따라서 실수 k의 최댓값은 2이다.

4. 부등식 $\left(x+\frac{1}{x}\right)(x^2-|x|-2) \le 0$ 을 풀면?

① $0 < x \le 1$ 또는 $x \le -1$ ② $0 < x \le 1$ 또는 $x \le -1$
③ $0 < x \le 2$ 또는 $x \le -1$ ④ $0 < x \le 2$ 또는 $x \le -2$
⑤ $0 < x \le 2$ 또는 $x \le 0$

해설

① $x > 0$ 이면 $|x| = x,\ x + \frac{1}{x} > 0$ 이므로
$x^2 - x - 2 \le 0 \ \rightarrow\ (x-2)(x+1) \le 0$
$\therefore\ -1 \le x \le 2$
$\therefore\ 0 < x \le 2\ (\because\ x > 0)$
② $x < 0$ 이면 $|x| = -x,\ x + \frac{1}{x} < 0$ 이므로
$x^2 + x - 2 \ge 0 \ \rightarrow\ (x-1)(x+2) \ge 0$
$\therefore\ x \le -2,\ x \ge 1$
$\therefore\ x \le -2\ (\because\ x < 0)$
①, ②에서 $0 < x \le 2,\ x \le -2$

5. 모든 실수 x에 대해 이차부등식$x^2 - x(kx-3) + 3 > 0$이 항상 성립하기 위한 정수 k의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

주어진 부등식을 정리하면

$(1-k)x^2 + 3x + 3 > 0$

$D = 3^2 - 4 \times (1-k) \times 3 < 0$

$\therefore k < \frac{3}{12} = 0.25$

최대 정수 $k = 0$

6. 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2 + 2kx - k + 6 > 0$이 항상 성립하도록 k의 범위를 구하면 $m < k < n$이다. 이 때, $m^2 + n^2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$x^2 + 2kx - k + 6 > 0$이 항상 성립하려면
판별식 $D < 0$이다.
$\frac{D}{4} = k^2 - (-k + 6) < 0$
$k^2 + k - 6 < 0$, $(k + 3)(k - 2) < 0$
$-3 < k < 2$
$\therefore m = -3$, $n = 2$
$\therefore$ $m^2 + n^2 = (-3)^2 + 2^2 = 13$

7. 모든 실수 x에 대하여 $x^2-2mx-m\geq 0$을 만족하는 실수 m의 범위는 $a\leq m\leq b$이다. $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a+b=-1$

해설

$x^2-2mx-m\geq 0$이

항상 성립하려면 판별식 $D\leq 0$

$\frac{D}{4}=m^2+m\leq 0$

$m(m+1)\leq 0$, $-1\leq m\leq 0$

$\therefore\ a+b=(-1)+0=-1$

8. 모든 실수 x 에 대하여 다항식 $(m+1)x^2-2(m-1)x+3$ 의 값이 항상 2보다 크도록 하는 상수 m 의 범위가 $a<m<b$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(m+1)x^2-2(m-1)x+3>2$

$(m+1)x^2-2(m-1)x+1>0$ 이므로

$m \neq -1,\ m>-1$ 이고, $D<0$ 이다.

$\frac{D}{4}=m^2-3m<0 \qquad \therefore\ 0<m<3$

$\therefore a=0,\ b=3$

$\therefore a+b=3$

9. 부등식 $ax^2 + 5x + b > 0$ 을 풀어서 $2 < x < 3$ 이라는 해가 구해졌다. 이 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab = 6$

해설

$ax^2 + 5x + b > 0 \quad \cdots\cdots ㉠$

해가 $2 < x < 3$ 이 되는 이차부등식은

$(x - 2)(x - 3) < 0$ 전개하면

$x^2 - 5x + 6 < 0 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠과 일차항의 계수를 맞추기위해

양변에 -1 을 곱하면

$-x^2 + 5x - 6 > 0 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉠, ㉢이 일치해야 하므로 $a = -1$, $b = -6$

10. 이차부등식 $x^2 + ax + b < 0$ 의 해가 $-2 < x < 3$ 일 때, 두 상수 $a,\ b$ 의 곱은?

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

해설

해가 $-2 < x < 3$ 이고,
이차항의 계수가 1인 이차부등식은
$(x+2)(x-3) < 0$
$x^2 - x - 6 < 0$
$\therefore a = -1,\ b = -6$
$ab = 6$

11. x 에 대한 이차부등식 $x^2+ax+b>0$ 의 해가 $x<1$ 또는 $x>4$ 일 때 상수 $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2+ax+b>0$ 의 해가 $x<1$ 또는 $x>4$ 이려면
$(x-1)(x-4)>0$ 에서 $x^2-5x+4>0$ 이므로
$a=-5$, $b=4$ 따라서 $a+b=-1$

12. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 10일 때, 방정식 $f(4x-3)=0$의 두 근의 합은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=10$
$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)=0$로 놓으면
$f(4x-3)=a(4x-3-\alpha)(4x-3-\beta)=0$
$x=\dfrac{3+\alpha}{4},\ \dfrac{3+\beta}{4}$
$\therefore$ 두 근의 합은 $\dfrac{6+\alpha+\beta}{4}=4$

13. x에 관한 이차방정식 $x^2+(a^2-5a-6)x-a+1=0$이 서로 다른 부호의 실근을 갖고, 양근이 음근의 절대값보다 크거나 같을 때, 만족하는 정수 a의 값을 모두 더하면?

① 15　　② 17　　③ 19　　④ 20　　⑤ 21

해설

서로 다른 부호의 실근이므로 (두 근의 곱) <0
양근이 음근의 절대값보다 크거나 같으므로
(두 근의 곱) <0이므로
$-a+1<0 \quad \therefore a>1 \cdots$ ①
(두 근의 합) ≥ 0이므로
$-(a^2-5a-6)\geq 0$
$a^2-5a-6\leq 0$
$(a-6)(a+1)\leq 0$
$\therefore -1\leq a\leq 6 \cdots$ ②
①, ②에서 $a=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$
$\therefore\ 2+3+4+5+6=20$

14. 어부 김씨는 둘레 길이가 $28\,\mathrm{cm}$ 인 직사각형 모양의 양식장의 넓이를 $48\,\mathrm{m}^2$ 이상이 도도록 지으려고 한다. 이 때 양식장의 한 변의 길이를 최대 얼마로 해야 하는가?

① $5\,\mathrm{m}$　② $6\,\mathrm{m}$　③ $7\,\mathrm{m}$　④ $8\,\mathrm{m}$　⑤ $9\,\mathrm{m}$

해설

양식장의 가로의 길이를 $x\,\mathrm{m}$ 라고 하면
둘레의 길이는 $28\,\mathrm{m}$ 이므로
세로의 길이는 $(14-x)\,\mathrm{m}$ 이다.
양식장의 넓이가 $48\,\mathrm{m}^2$ 이상이므로
$x(14-x) \geq 48,\ 14x - x^2 - 48 \geq 0$
$x^2 - 14x + 48 \leq 0, (x-6)(x-8) \leq 0$
$\therefore 6 \leq x \leq 8$
따라서 한 변의 길이를 최대 $8\,\mathrm{m}$ 로 해야 한다.

15. 이차함수 $y = -x^2 + (a-1)x + 3a$ 의 그래프가 직선 $y = x - 2$ 보다 항상 아래쪽에 있기 위한 실수 a 값의 범위는?

① $-3 < a < 1$ ② $-6 < a < -2$ ③ $a \geq 3$, $a \leq -1$

④ $a \geq 0$ ⑤ $a \leq 5$

해설

$x - 2 > -x^2 + (a-1)x + 3a$

$\Rightarrow x^2 - (a-2)x - 2 - 3a > 0$

항상 성립하려면, 판별식이 0 보다 작아야 한다.

$\Rightarrow D = (a-2)^2 - 4(-2-3a) < 0$

$\Rightarrow a^2 + 8a + 12 < 0$

$\Rightarrow -6 < a < -2$

16. $1 \le x \le 2$ 인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $ax < 4 + x - x^2$ 이 항상 성립할 때, 실수 a의 값의 범위를 구하면?

① $a < 1$　② $a < 2$　③ $a < 3$　④ $a < 4$　⑤ $a < 5$

해설

부등식 $ax < 4 + x - x^2$ 에서 $x^2 + (a-1)x - 4 < 0$
$1 \le x \le 2$ 에서
이 부등식이 항상 성립해야 하므로
방정식 $x^2 + (a-1)x - 4 = 0$ 의 한 근이1 보다 작고, 다른 한 근은 2 보다 커야 한다.
$f(x) = x^2 + (a-1)x - 4$ 로 놓으면
$f(1) = 1 + (a-1) - 4 < 0$ 에서 $a < 4 \cdots$ ㉠
$f(2) = 4 + 2(a-1) - 4 < 0$ 에서 $a < 1 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $a < 1$

17. <보기> x에 대한 부등식 $ax^2+4ax+5a>0$의 설명으로 옳은 것은 모두 고른 것은?

보기

㉠ $a>0$일 때 해는 모든 실수이다.
㉡ $a=0$일 때 해는 $x=0$뿐이다.
㉢ $a<0$일 때 해는 없다.

① ㉠　　② ㉠, ㉡　　③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$ax^2+4ax+5a>0$에서
$a(x^2+4x+5)>0,\ a\{(x+2)^2+1\}>0$
㉠ $a>0$일 때 $(x+2)^2+1>0$ $\therefore$ 모든 실수
㉡ $a=0$일 때 $0\cdot\{(x+2)^2+1\}>0$ $\therefore$ 해는 없다.
㉢ $a<0$일 때 $(x+2)^2+1<0$ $\therefore$ 해는 없다.

18. $6[x]^2 - 31[x-1] - 13 < 0$을 풀면? (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수)

① $-3 \leq x < 3$　② $-2 \leq x < 5$　③ $0 \leq x < 3$
④ $1 \leq x < 5$　⑤ $1 \leq x < 6$

해설

$n \leq [x] < n+1$에서
$n-1 < [x-1] < n$이므로
$[x-1] = [x]-1$
$\therefore 6[x]^2 - 31[x-1] - 13$
$= 6[x]^2 - 31([x]-1) - 13$
$= 6[x]^2 - 31[x] + 18 < 0$
$\therefore (2[x]-9)(3[x]-2) < 0$
$\frac{2}{3} < [x] < \frac{9}{2}$
$\therefore 1 \leq [x] \leq 4$이므로
$[x] = 1,\ 2,\ 3,\ 4$
$\therefore 1 \leq x < 5$

19. 모든 실수 x에 대하여 $(|a|+a)x \geq a^2+a-20$이 성립할 때, 정수 a의 개수를 구하면?

① 9개　② 6개　③ 5개　④ 4개　⑤ 3개

해설

$(|a|+a)x \geq a^2+a-20$에서
a의 부호에 따라 범위를 나누면,
① $a<0 : |a|=-a$
$0 \cdot x \geq a^2+a-20,\ (a+5)(a-4) \leq 0$에서
$-5 \leq a \leq 4$
$\therefore\ -5 \leq a < 0$
② $a=0 : 0 \cdot x \geq -20$이므로, 항상 성립한다.
$\therefore\ a=0$
③ $a>0 : |a|=a$
$2a \cdot x \geq a^2+a-20,\ x \geq \frac{1}{2a}(a^2+a-20)$
모든 x에 대해서 위 부등식이 성립할 수 없다.
$\therefore$ ①과 ②를 동시에 만족하는 a의 범위는 $-5 \leq a \leq 0$,
따라서 정수 a의 개수는 6개

20. 이차부등식 $ax^2 + bx + c > 0$을 만족하는 x의 범위가 $-2 < x < 1$일 때, 부등식 $cx^2 - ax + b < 0$을 만족하는 x의 범위는?

① $-2 < x < 1$　② $-1 < x < \frac{1}{2}$　③ $-\frac{1}{2} < x < 2$
④ $\frac{1}{2} < x < 1$　⑤ $\frac{1}{2} < x < 2$

해설

$ax^2 + bx + c > 0$의 해가 $-2 < x < 1$이므로

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} < 0 (a < 0)$

$\Leftrightarrow (x+2)(x-1) = x^2 + x - 2 < 0$

$\therefore\ \frac{b}{a} = 1, \frac{c}{a} = -2$

$cx^2 - ax + b < 0$에서

양변을 a로 나누면

$\frac{c}{a}x^2 - x + \frac{b}{a} > 0 \Leftrightarrow -2x^2 - x + 1 > 0$

$2x^2 + x - 1 < 0, (2x-1)(x+1) < 0$

$\therefore\ -1 < x < \frac{1}{2}$