

1. 수직선 위의 두 점 $A(-2)$, $B(4)$ 에 대하여 $P(-5)$ 일 때, $\overline{PA} + \overline{PB}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

수직선 위의 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 를 구한다.

$A(-2), B(4), P(-5)$ 에 대하여

$$\overline{PA} = |-5 - (-2)| = 3, \overline{PB} = |-5 - 4| = 9$$

$$\therefore \overline{PA} + \overline{PB} = 3 + 9 = 12$$

2. 두 점 $A(-3, 1)$, $B(2, 5)$ 사이의 거리는?

① 5

② $4\sqrt{2}$

③ 6

④ $\sqrt{41}$

⑤ $\sqrt{43}$

해설

$$\overline{AB} = \sqrt{\{2 - (-3)\}^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{41}$$

3. 두 점 $A(1, 4)$, $B(3, 2)$ 에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 P 의 x 좌표를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

점 P 의 좌표를 $(x, 0)$ 이라 하면,

($\because$ x 축 위의 점은 $y = 0$)

$\overline{AP} = \overline{BP}$ 이므로

$$\sqrt{(x-1)^2 + 4^2} = \sqrt{(x-3)^2 + 2^2}$$

양변을 제곱하여 x 의 값을 구하면

$$x^2 - 2x + 1 + 16 = x^2 - 6x + 9 + 4 \therefore x = -1$$

그러므로 구하는 점 P 의 좌표는 $(-1, 0)$

4. 직선 $x + y = 2$ 위에 있고, 두 점 $A(2, 3)$, $B(3, 2)$ 에 이르는 거리가 같은 점 P 의 좌표는?

① $(0, 2)$

② $(1, 1)$

③ $(2, 0)$

④ $(3, -1)$

⑤ $(4, -2)$

해설

점 P 의 좌표를 $P(a, 2 - a)$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}\overline{PA} &= \sqrt{(a - 2)^2 + (2 - a - 3)^2} \\ &= \sqrt{2a^2 - 2a + 5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{PB} &= \sqrt{(a - 3)^2 + (2 - a - 2)^2} \\ &= \sqrt{2a^2 - 6a + 9}\end{aligned}$$

그런데 $\overline{PA} = \overline{PB}$ 이므로 $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$ 에서

$$2a^2 - 2a + 5 = 2a^2 - 6a + 9$$

$$4a = 4 \text{ 에서 } a = 1$$

$$\therefore P(1, 1)$$

5. 세 점 $A(-1, -1)$, $B(1, -5)$, $C(3, 1)$ 을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 어떤 삼각형인가?

- ① 이등변삼각형이다.
- ② 정삼각형이다.
- ③ $\angle A$ 가 직각인 직각이등변삼각형이다.
- ④ $\angle B$ 가 직각인 직각이등변삼각형이다.
- ⑤ 예각삼각형이다

해설

두 점 사이의 거리를 모두 구해본다.

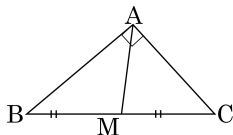
$$\overline{AB} = \sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{5}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{16 + 4} = 2\sqrt{5}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{4 + 36} = 2\sqrt{10}$$

$\triangle ABC$ 는 $\angle A$ 가 직각인 직각이등변삼각형

6. 다음은 $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$ 을 증명한 것이다. 다음 그림과 같이 변 BC의 중점을 M이라 하면



$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \boxed{가} \left(\overline{BM}^2 + \boxed{나}^2 \right)$$

이 때, $\overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ 이고,

$$\boxed{나} = \boxed{다} \overline{BC} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 &= \boxed{가} \left(\boxed{라} \overline{BC}^2 \right) \\ &= \overline{BC}^2 \end{aligned}$$

위의 증명에서 (가), (나), (다), (라)에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

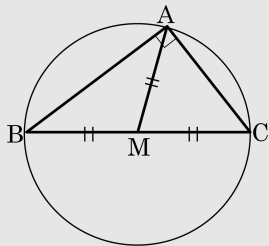
- ① 3, $2\overline{AM}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ ② 4, $2\overline{AM}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$
 ③ 2, $\overline{AM}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ ④ 2, $\overline{AM}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$
 ⑤ $\frac{16}{5}$, $\overline{AM}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{16}$

해설

파푸스의 중선정리에 의해

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \boxed{2} \left(\overline{BM}^2 + \boxed{\overline{AM}}^2 \right)$$

이 때, $\triangle ABC$ 는 $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로 점 A는 점 M을 중심으로 하고, 변 BC를 지름으로 하는 원 위의 점이다.



$$\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM} \text{ 이므로 } \boxed{\overline{AM}} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 &= 2 \left(\frac{\overline{BC}^2}{4} + \frac{\overline{BC}^2}{4} \right) \\ &= \boxed{2} \left(\boxed{\frac{1}{2}} \overline{BC}^2 \right) = \overline{BC}^2 \end{aligned}$$

7. 두 점 A(3, 4), B(1, 6)의 중점 G의 좌표는?

① $G(-2, 5)$

② $G(2, -5)$

③ $G(2, 5)$

④ $G(-2, -5)$

⑤ $G(2, 0)$

해설

두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \text{ 이므로}$$

$$G\left(\frac{3+1}{2}, \frac{4+6}{2} \right),$$

$$\text{즉 } G(2, 5)$$

8. 삼각형 ABC의 세 꼭짓점의 좌표가 A(2, -1), B(-3, 5), C(a, b)이고 무게중심의 좌표가 G(-1, 1)일 때, a와 b의 차 $a - b$ 의 값은?

① -3

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 5

해설

세 점을 알 때 무게중심을 구하는 공식에서

$$\{2 + (-3) + a\} \div 3 = -1$$

$$\therefore a = -2$$

$$\{(-1) + 5 + b\} \div 3 = 1$$

$$\therefore b = -1$$

따라서, $a - b$ 의 값은 $-2 - (-1) = -1$

9. $A(-1, -1), B(5, -2), C(3, 3)$ 을 세 꼭짓점으로 하고 $\overline{AB}$ 와 $\overline{BC}$ 를 이웃하는 두 변으로 하는 평행사변형 ABCD에서 꼭짓점 D의 좌표는?

① $(2, -\frac{3}{2})$

② $(1, 1)$

③ $(-3, 4)$

④ $(8, 1)$

⑤ $(4, \frac{1}{2})$

해설

평행사변형의 두 대각선이 서로 이등분하므로

$\overline{AC}$ 와 $\overline{BD}$ 의 중점이 일치

$D(x, y)$ 라 하면

$$\overline{AC} \text{의 중점} : \left(\frac{-1+3}{2}, \frac{-1+3}{2} \right) = (1, 1)$$

$$\overline{BD} \text{의 중점} : \left(\frac{5+x}{2}, \frac{-2+y}{2} \right)$$

$$\frac{5+x}{2} = 1, \frac{-2+y}{2} = 1$$

$$\therefore x = -3, y = 4$$

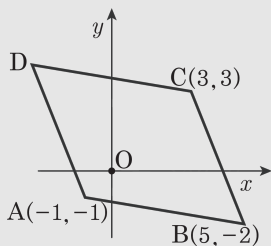
$$\therefore D(-3, 4)$$

해설

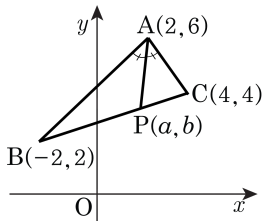
$B \rightarrow C$ 로 갈 때 x 축으로 -2 , y 축으로 $+5$ 만큼 이동했으므로

$A \rightarrow D$ 로 갈때도 같은 만큼 이동한다.

$$\therefore D = (-1 - 2, -1 + 5) = (-3, 4)$$



10. 다음 그림과 같이 세 점 $A(2, 6)$, $B(-2, 2)$, $C(4, 4)$ 를 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 에서 $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 $P(a, b)$ 라 할 때, $3ab$ 의 값은?



- ① 10 ② 15 ③ 20
④ 25 ⑤ 30

해설

$\triangle ABC$ 에서 $\angle A$ 의 이등분선이

변 BC 와 만나는 점을 $P(a, b)$ 라 하면

$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BP} : \overline{CP}$ 가 성립한다.

$$\text{이때, } \overline{AB} = \sqrt{(-2-2)^2 + (2-6)^2} = 4\sqrt{2},$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(4-2)^2 + (4-6)^2} = 2\sqrt{2} \text{ 이므로}$$

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BP} : \overline{CP} = 2 : 1$$

따라서 점 $P(a, b)$ 는 변 BC 를 2 : 1 로 내분하는 점이다.

$$\therefore a = \frac{2 \cdot 4 + 1 \cdot (-2)}{2 + 1} = 2,$$

$$b = \frac{2 \cdot 4 + 1 \cdot 2}{2 + 1} = \frac{10}{3}$$

$$\therefore 3ab = 3 \cdot 2 \cdot \frac{10}{3} = 20$$

11. 세 점 $O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(2,-2)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB 의 외심의 좌표를 $P(a,b)$ 라 할 때, $a^2 - b^2$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

외심 (외접원의 중심)은 세 꼭지점으로부터 거리가 같은 점이므로

$$\overline{PO}^2 = \overline{PA}^2 \text{ 으로부터}$$

$$a^2 + b^2 = (a-1)^2 + (b-1)^2, \quad a+b=1 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\overline{PO}^2 = \overline{PB}^2 \text{ 으로부터}$$

$$a^2 + b^2 = (a-2)^2 + (b+2)^2, \quad a-b=2 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{로 부터 } a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = 1 \times 2 = 2$$

12. 두 점 $A(1,4), B(5,2)$ 에 대하여 점 P 는 x 축 위를 움직이고 점 Q 는 y 축 위를 움직일 때, $\overline{AQ} + \overline{PQ} + \overline{BP}$ 의 최솟값을 구하면?

- ① $2\sqrt{2}$ ② $3\sqrt{2}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ $5\sqrt{2}$ ⑤ $6\sqrt{2}$

해설

다음 그림과 같이 점 A 를 y 축에 대하여

대칭이동한 점을 A' , 점 B 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 B' 이라고 하면

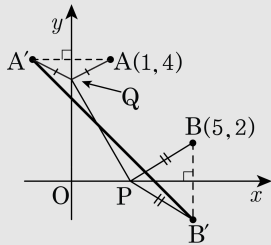
$A'(-1,4), B'(5,-2)$

$$\begin{aligned}\therefore \overline{AQ} + \overline{PQ} + \overline{BP} &= \overline{A'Q} + \overline{PQ} + \overline{B'P} \\ &\geq \overline{A'B'}\end{aligned}$$

$$= \sqrt{(5+1)^2 + (-2-4)^2}$$

$$= \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

따라서 구하는 최솟값은 $6\sqrt{2}$ 이다.



13. $(0, 0)$, $(0, 4)$, $(4, 4)$ 와 $(4, 0)$ 을 꼭짓점으로 하는 정사각형을 생각하자. $(0, 1)$ 에서 출발하여 윗변과 밑변으로 반사시켜 $(4, 2)$ 에 도달하는 꺾인 직선을 그리려면 윗변의 어느 점을 지나야 하는가? (단, 입사각과 반사각은 같다)

① $(1, 4)$

② $\left(\frac{10}{7}, 4\right)$

③ $\left(\frac{5}{3}, 4\right)$

④ $\left(\frac{4}{3}, 4\right)$

⑤ $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$

해설

대칭성을 이용하여 $(0, 1)$ 과 $(4, 10)$ 을 연결하는 직선과 $y = 4$ 와의 교점을 계산하면 된다.

$$\begin{cases} y = \frac{9}{4}x + 1 \\ y = 4 \end{cases} \quad \therefore x = \frac{4}{3}$$

따라서, $\left(\frac{4}{3}, 4\right)$ 를 지난다.

14. 네 점 $A(-2, 3)$, $B(3, a)$, $C(b, 4)$, $D(2, 8)$ 을 꼭짓점으로 하는 $\square ABCD$ 가 마름모가 되도록 하는 a, b 의 합을 구하면?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$\square ABCD$ 가 마름모이므로
 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, $\overline{AD} = \overline{BC}$ 이다.

따라서 점 D 는 점 A 를 x 축 방향으로 4만큼
 y 축 방향으로 5만큼 평행이동한 것이므로
점 C 도 점 B 를 x 축 방향으로 4만큼
 y 축 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.

$$\therefore (3 + 4, a + 5) = (b, 4)$$

$$\therefore a = -1, b = 7$$

$$\therefore a + b = 6$$

15. $\triangle ABC$ 의 무게중심이 $G(1, 4)$ 이고, 세 변 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의 중점이 각각 $(-1, 6)$, (a, b) , $(3, 4)$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$\triangle ABC$ 의 무게중심 G 는

세변 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의 중점을 꼭지점으로 하는 삼각형의 무게중심과 일치한다.

따라서 $\frac{-1 + a + 3}{3} = 1$, $\frac{6 + b + 4}{3} = 4$ 이므로

$a = 1$, $b = 2$ 이고, $\therefore a + b = 3$